

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА

Редакционный совет:

БОЛСИНОВ А. В.

School of Mathematics, Loughborough University, Loughborough (UK)

БОРИСОВ А. В.

Ижевский институт компьютерных исследований, Ижевск

КОЗЛОВ В. В.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва

МАМАЕВ И. С.

Ижевский институт компьютерных исследований, Ижевск

ТАЙМАНОВ И. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

ТРЕЩЕВ Д. В.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА

Вышли в свет:

Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.

Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений.
Методы и приложения

Богопольский О. В.

Введение в теорию групп

Борисов А. В., Мамаев И. С.

Современные методы теории интегрируемых систем

Брур Х. В., Дюмортье Ф., ван Стрин С., Такенс Ф.

Структуры в динамике. Конечномерные детерминированные системы

Бураго Д., Бураго Ю., Иванов С.

Курс метрической геометрии

Гукенхеймер Дж., Холмс Ф.

Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей

Добеши И.

Десять лекций по вейвлетам

Капеллер Т., Пёшь Ю.

КДФ и КАМ

Кассел К., Россо М., Тураев В.

Квантовые группы и инварианты узлов

Кудряшов Н. А.

Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений

Леонов Г. А.

Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости

Леповски Дж., Ли Х.

Введение в вершинные операторные алгебры и их представления

Морозов А. Д.

Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах

Мохов О. И.

Симплектическая и пуассонова геометрия на пространствах петель
гладких многообразий и интегрируемые уравнения

Пеллер В. В.

Операторы Ганкеля и их приложения

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА

Песин Я.

Теория размерности и динамические системы:
современный взгляд и приложения

Рамис Ж. П.

Расходящиеся ряды и асимптотические теории

Рюэль Д.

Термодинамический формализм

Рейман А. Г., Семенов-Тянь-Шанский М. А.

Интегрируемые системы. Теоретико-групповой подход

Сб. работ под редакцией Дж. Бернштайна и Ст. Гелбарта

Введение в программу Ленглендса

Тюрин А. Н.

Квантование, классическая и квантовая теории поля и η -функции

Холесто А. С.

Статистическая структура квантовой теории

Цыганов А. В.

Интегрируемые системы в методе разделения переменных

Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л.

Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть I

Щепилов А. В.

Анализ и механика на двухточечно-однородных римановых пространствах

де ла Яве Р.

Введение в КАМ-теорию

Готовятся к печати:

Заславский Г. М.

Гамильтонов хаос и дробная динамика

Шафаревич А. И.

Введение в теорию квазиклассического квантования изотропных многообразий

METHODS OF QUALITATIVE THEORY IN NONLINEAR DYNAMICS

LEONID P. SHILNIKOV, ANDREY L. SHILNIKOV,
DMITRY V. TURAEV

Research institute for
Applied Mathematics and Cybernetics,
Nizhny Novgorod, Russia

LEON O. CHUA

University of California, Berkeley, USA



World Scientific

Singapore • New Jersey • London • Hong Kong

**Л. П. Шильников, А. Л. Шильников,
Д. В. Тураев, Л. Чуа**

МЕТОДЫ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ В НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ

ЧАСТЬ 2

Перевод с английского
В. А. Осотовой

Под научной редакцией
Д. В. Тураева и А. Л. Шильникова



Москва ♦ Ижевск

2009

УДК 22.236

ББК 531.3

Ш 607



Издание осуществлено при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований
по проекту №05-01-14070.

Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л.

Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2. — М.—Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009. — 548 с.

Книга представляет собой полное руководство по качественным методам теории динамических систем и теории бифуркаций в нелинейной динамике. В ней обсуждаются вопросы структурной устойчивости, теория локальных и гомоклинических бифуркаций, инвариантные торы и теоремы о центральном многообразии, а также рассмотрены многочисленные примеры.

Наряду с общеизвестными классическими результатами в книге представлены новые результаты и методы, полученные и разработанные Нижегородской школой профессора Л. П. Шильникова.

Для студентов, аспирантов и исследователей, специализирующихся в области динамических систем и задач нелинейной динамики.

ISBN 978-5-93972-700-6

ББК 531.3

© Л. П. Шильников, А. Л. Шильников, Д. В. Тураев, Л. Чуа, 2009

© Перевод на русский язык:

НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009

<http://shop.rcd.ru>

<http://ics.org.ru>

Людмиле, Свете и Ане

Оглавление

Введение в часть 2	12
ГЛАВА 7. Структурно устойчивые системы	27
7.1. Грубые системы на плоскости. Теорема Андронова–Понтрягина	28
7.2. Множество центральных движений	33
7.3. Общая классификация центральных движений	37
7.4. Замечания о грубости динамических систем высокого порядка	43
7.5. Системы Морса–Смейла	46
7.6. Некоторые свойства систем Морса–Смейла	53
ГЛАВА 8. Бифуркации динамических систем	61
8.1. Системы первой степени негрубости	62
8.2. Замечания, касающиеся бифуркаций многомерных систем	69
8.3. Негрубые гомоклинические и гетероклинические орбиты. Модули топологической эквивалентности	72
8.4. Бифуркации в конечнопараметрических семействах. Постановка задачи Андронова	75
ГЛАВА 9. Поведение динамических систем на границах областей устойчивости состояний равновесия	81
9.1. Теоремы редукции. Функции Ляпунова	82
9.2. Первый критический случай	88
9.3. Второй критический случай	94
ГЛАВА 10. Поведение динамических систем на границах областей устойчивости периодических траекторий	102
10.1. Редукция отображения Пуанкаре. Функции Ляпунова	102
10.2. Первый критический случай	106
10.3. Второй критический случай	114
10.4. Третий критический случай. Слабые резонансы	117
10.5. Сильные резонансы	123

10.6. Переход через сильный резонанс на границе устойчивости . .	138
10.7. Дополнительные замечания, касающиеся резонансов	148
ГЛАВА 11. Локальные бифуркации при пересечении границы устойчивости	151
11.1. Бифуркационные поверхности и трансверсальные семейства .	151
11.2. Бифуркации состояния равновесия с одним нулевым показателем	157
11.3. Бифуркации периодических орбит с мультипликатором, равным $+1$	177
11.4. Бифуркации периодических орбит с мультипликатором -1 . .	191
11.5. Бифуркация Андронова–Хопфа	206
11.6. Рождение инвариантного тора	220
11.7. Бифуркации резонансных периодических орбит, сопровождающие рождение инвариантного тора	231
ГЛАВА 12. Глобальные бифуркации при исчезновении седло-узловых состояний равновесия и периодических орбит	243
12.1. Бифуркации гомоклинической петли к состоянию равновесия типа седло-узел	243
12.2. Рождение инвариантного тора	255
12.3. Рождение бутылки Клейна	271
12.4. Катастрофа голубого неба	275
12.5. О вложении в поток	286
ГЛАВА 13. Бифуркации гомоклинических петель седловых состояний равновесия	292
13.1. Устойчивость петли сепаратрисы на плоскости	293
13.2. Бифуркации предельного цикла от петли сепаратрисы к седлу с ненулевой седловой величиной	304
13.3. Бифуркации петли сепаратрисы с нулевой седловой величиной	317
13.4. Рождение периодических орбит из гомоклинической петли (случай $\dim W^u = 1$)	325
13.5. Поведение траекторий вблизи гомоклинической петли в случае $\dim W^u > 1$	348
13.6. Бифуркации гомоклинических петель коразмерности два . . .	352
13.6.1. Случай $A = 0$	359
13.6.2. Случай $\Gamma \subset W^s$	363
13.6.3. Случай $\sigma = 0$	365

13.7. Бифуркации гомоклинических восьмерок и гетероклинических циклов	368
13.8. Оценки на поведение траекторий вблизи седлового состояния равновесия	391
ГЛАВА 14. Безопасные и опасные границы устойчивости	403
14.1. Основные границы области устойчивости состояний равновесия и периодических орбит	404
14.2. Классификация границ областей устойчивости коразмерности один	406
14.2.1. Список безопасных границ	408
14.2.2. Список опасных границ	412
14.3. Динамически определенные и неопределенные границы областей устойчивости	414
Приложение С. Примеры, задачи и упражнения	419
С.1. Качественное интегрирование	419
С.2. Грубые состояния равновесия и границы устойчивости	420
С.2.1. Критерий Рауса–Гурвица	420
С.2.2. Трехмерный случай	423
С.3. Периодически возмущенные системы	441
С.4. Приведение к нормальной форме	455
С.5. Поведение на границах устойчивости	472
С.6. Бифуркации неподвижных точек и периодических орбит	479
С.7. Гомоклинические бифуркации	509
Литература	534

Введение в часть 2

Следующие главы посвящены теории бифуркаций динамических систем с простой динамикой. Роль теории бифуркаций в нелинейной динамике трудно переоценить. Причина проста — методы теории бифуркаций служат рабочим средством для изучения динамических моделей. Кроме того, теория бифуркаций предоставляет исследователям из разных областей науки универсальный язык для общения и обмена идеями, обеспечивающий взаимопонимание при междисциплинарных дискуссиях.

Теория бифуркаций изучает перестройки в фазовом пространстве при изменении параметров системы. По существу, это оригинальная формулировка, которая была изначально предложена Анри Пуанкаре, когда он изучал гамильтоновы системы с одной степенью свободы. Надо, впрочем, заметить, что это интуитивно очевидное определение не всегда приемлемо на современном этапе развития теории. В действительности, чтобы сформулировать понятие структуры фазового пространства и ее изменений, необходимо определенное математическое основание.

Первая попытка такой формализации была сделана в 1937 году Андроновым и Понтрягиным, которые ввели понятие грубой системы. Система является грубой, если любая достаточно близкая система топологически эквивалентна ей. Более того, необходимо, чтобы сопрягающий гомеоморфизм был близок к тождественному. Другими словами, фазовые портреты обеих систем должны совпадать, а соответствующие траектории могут различаться лишь незначительно.

В той же работе Андронов и Понтрягин предложили необходимые и достаточные условия грубости для систем на плоскости. Благодаря этому многие задачи нелинейной динамики, которые можно смоделировать при помощи двумерных динамических систем, получили необходимое математическое обоснование.

Основные положения теории Андронова и Понтрягина представлены в первом параграфе главы 7, с которой начинается вторая часть этой книги. Там же дается определение структурной устойчивости (по Пейшото). Различие между понятиями структурной устойчивости и грубости состоит в том, что для первого из них не предполагается, что сопрягающий диффеоморфизм близок к тождественному. С чисто математической точки зрения

непосредственно из определения очевидно, что структурно устойчивые системы образуют открытое множество. Заметим, что в известных доказательствах структурной устойчивости тех или иных систем обычно устанавливалась и грубость. Таким образом, разница между этими двумя понятиями не кажется существенной. Необходимо, впрочем, заметить, что определение «структурная устойчивость» значительно шире известно за рубежом, особенно в странах Западной Европы и Америки. В этой книге мы также будем часто использовать этот термин. Несмотря на это, мы считаем, что определение грубости в принципе более разумно, так как оно предоставляет естественную картину малого изменения в ходе реальных процессов при малом изменении параметров.

Более сложные, по сравнению с двумерными грубыми системами, многомерные системы Морса–Смейла обсуждаются в параграфе 7.4. Список предельных множеств таких систем включает только состояния равновесия и периодические орбиты. Более того, такие системы могут иметь только конечное число предельных орбит. В системах Морса–Смейла нет гомоклинических траекторий. Действительно, состояния равновесия не могут иметь гомоклинических петель, так как они не являются грубыми — устойчивые и неустойчивые инвариантные множества состояний равновесия пересекаются вдоль гомоклинической петли нетрансверсально. Грубые гомоклинические траектории Пуанкаре (гомоклинические к периодическим орбитам) также не могут существовать, потому что они влекут существование бесконечного множества периодических орбит. Свойства грубых систем Морса–Смейла аналогичны свойствам двумерных систем. Предполагалось также (в начале 60-х годов и ранее), что системы Морса–Смейла плотны в пространстве всех динамических систем. Открытие динамического хаоса уничтожило эту идеалистическую картину.

Ответ на фундаментальный вопрос «что отличает системы с простой динамикой от систем с хаотической динамикой?» может быть получен, только если мы сможем установить соответствие между определенными типами траекторий и материальными процессами, доступными для наблюдения. Мы начинаем классификацию с изучения квазипериодических траекторий (глава 4 первой части книги). Несмотря на то что эти траектории не являются грубыми, они необходимы, чтобы адекватно смоделировать такие явления, как модулированные колебания и биения.

Квазипериодические траектории — частный случай траекторий, устойчивых по Пуассону. Последние играют одну из ведущих ролей в теории динамических систем, образуя класс центральных движений по Биркгофу (параграф 7.2). Биркгоф разделил устойчивые по Пуассону траектории на подклассы. Данная классификация схематически представлена в парагра-

фе 7.3. Используя данную схему в качестве основы, в самом начале 30-х годов Андронов предпринял попытку описания всех возможных типов динамических режимов и сопоставления их с движениями, наблюдаемыми в физических экспериментах. Так как его аргументы основывались на понятии устойчивости индивидуальной траектории по Ляпунову, Андронов пришел к заключению, что все возможные устойчивые по Ляпунову и устойчивые по Пуассону траектории исчерпываются положениями равновесия, периодическими и почти-периодическими траекториями (к последним относятся квазипериодические и предельно-периодические движения).

Таким образом, казалось естественным предположить, что всякий интересный динамический режим обладает дискретным спектром частот. В связи с этим полезно будет упомянуть, что Ландау и Хопф предложили в качестве математической модели гидродинамической турбулентности квазипериодические движения с достаточно большим количеством независимых частот (где количество частот возрастает до бесконечности при увеличении некоторого структурного параметра, такого как число Рейнольда).

Все прочие устойчивые по Пуассону траектории по Ляпунову неустойчивы. Какую пользу можно извлечь из таких траекторий в динамике? Ответ был найден почти 30 лет спустя. Значение устойчивого предельного множества, состоящего из индивидуально неустойчивых траекторий, для объяснения сложного хаотического поведения нелинейных динамических процессов впервые установил Лоренц в 1963 году.

В грубом случае анализ структуры подобного предельного множества (называемого квазимиимальным множеством, которое определяется как замыкание незамкнутых устойчивых по Пуассону траекторий) может быть проведен с использованием леммы о замыкании Пью. Главный вывод, который следует из этого анализа (см. параграф 7.3), — периодические орбиты плотны в грубом квазимиимальном множестве. В частности, количество периодических орбит бесконечно. Системы, обладающие такими предельными множествами, называются системами со сложной динамикой.

Характерным признаком систем со сложным поведением является наличие гомоклинической траектории Пуанкаре, т.е. траектории, биасимптотической к седловой периодической орбите при $t \rightarrow \pm\infty$. Существование гомоклинической орбиты, которая лежит в трансверсальном пересечении устойчивых и неустойчивых инвариантных многообразий седловой периодической орбиты, влечет существование бесконечного множества других седловых периодических орбит в фазовом пространстве (см. параграф 7.5).

Заметим, однако, что грубые системы (как с простой, так и сложной динамикой) с размерностью фазового пространства больше чем два не плотны

в пространстве динамических систем. Здесь ключевая роль принадлежит *негрубым* притягивающим предельным множествам с неустойчивым поведением траекторий.

Примером такого множества является аттрактор Лоренца, который встречается во многих моделях. Еще одним интересным примером служит дикий спиральный аттрактор [153]¹.

Сходство между обоими странными аттракторами заключается в том, что ни один из них не содержит устойчивых периодических орбит. Различие между ними заключается в том, что все гомоклинические орбиты Пуанкаре в аттракторе Лоренца грубы, в то время как отличительной чертой дикого аттрактора является сосуществование грубых и негрубых гомоклинических орбит Пуанкаре (гомоклинических касаний). Сходство состоит в том, что оба аттрактора «сконцентрированы» на грубом состоянии равновесия, которое является седлом в случае аттрактора Лоренца и седло-фокусом в случае дикого аттрактора. Среди прочих особенностей моделей с такими странными аттракторами мы можем выделить существование областей параметров, где значения параметра, отвечающие гомоклиническим петлям к состоянию равновесия, плотны.

Полное понимание таких сложных явлений невозможно без знания основ теории бифуркаций, как локальной, так и глобальной. Общие аспекты этой теории представлены в главе 8. Мы начинаем анализ с простейших двумерных негрубых систем, следуя основополагающим работам Андронова и Леонтовича. Они провели систематическую классификацию всех основных бифуркаций предельных циклов на плоскости, которые разделяются на четыре подтипа: именно рождение предельного цикла из:

- (1) простого слабого фокуса;
- (2) простого полуустойчивого предельного цикла;
- (3) петли сепаратрисы простого седло-узла;
- (4) петли сепаратрисы седла, в котором дивергенция векторного поля не равна нулю.

Классификация Андронова–Леонтовича использует дополнительное понятие так называемой «степени негрубости». Дальнейшее развитие теории приобретает другое направление: основные бифуркации отвечают бифуркационным множествам коразмерности один, а произвольная (конечная)

¹Спиралевидная форма этого аттрактора обусловлена формой гомоклинических петель к седло-фокусу $(2, 1)$, которые образуют его скелет. А его дикость означает одновременное существование седловых периодических орбит разного топологического типа, а также как грубых, так и негрубых гомоклинических орбит Пуанкаре.

коразмерность отвечает общему случаю. Более того, хотя все двумерные потоки из одной связной компоненты бифуркационной поверхности топологически эквивалентны (теорема Леонтович–Майера), для многомерных систем это уже не так.

Так, Пэлис показал, что двумерные диффеоморфизмы с гетероклинической орбитой, в точках которой устойчивое многообразие одного седла имеет квадратичное касание с устойчивым многообразием другого седла, могут быть топологически сопряжены, только если значения некоторых непрерывных инвариантов совпадают. Эти непрерывные инварианты называются модулями. Другие негрубые примеры, где появляются модули, представлены в параграфе 8.3.

Даже негрубые системы коразмерности один могут иметь бесконечное множество модулей. Таким образом, поскольку модели нелинейной динамики — это явно заданные динамические системы с конечным числом параметров, возникает новое препятствие, которое не встречалось в классической теории бифуркаций. Хотя случай гомоклинических петель коразмерности один не представляет никакой проблемы, более высокие коразмерности менее тривиальны. Например, в случае гомоклинического или гетероклинического цикла с седло-фокусами структура бифуркационных диаграмм напрямую определяется значениями соответствующих модулей.

Таким образом, андроновский подход (параграф 8.3.) к изучению динамических моделей нуждается в корректировке в случаях, когда полный бифуркационный анализ невозможен без модулей. Заметим, однако, что если допустимо прогнозировать какие-то тонкие явления или если ограничить анализ неблуждающими орбитами, т. е. состояниями равновесия, периодическими и квазипериодическими движениями, то изучение основных бифуркаций в системах с простой динамикой все же реалистично проводить в рамках конечнопараметрических семейств при выполнении определенных разумных требований (параграф 8.4).

Отметим, что для систем со сложной динамикой ситуация резко изменяется. В большинстве случаев (например, когда возникают гомоклинические касания) введение модулей неизбежно, поскольку они служат существенными параметрами, управляющими бифуркациями (см. [63]).

Хотя теория типичных бифуркаций предельных циклов в двумерных системах была создана Андроновым и Деонтович в 30-е годы², систематическое развитие теории бифуркаций периодических орбит и состояний

²Об этом сообщалось в предисловии к первой книге «Теория колебаний» Андропова, Витт и Хайкина (которая была напечатана без имени Витта в 1937).

равновесия в многомерных системах началось только после того, как их результаты оказались доступными для научного общества (работа Хопфа 1942 г. была, возможно, единственным исключением).

Прямое обобщение двумерных бифуркаций произошло довольно скоро. Сюда относятся некоторые естественные модификации, например, бифуркация рождения двумерного инвариантного тора из периодической орбиты. Также было понято, что бифуркация гомоклинической петли в многомерном пространстве не всегда приводит к появлению только периодической орбиты. Один вопрос оставался открытым долгое время: могут ли существовать другие кодировки бифуркаций периодических орбит коразмерности один? Лишь одна новая такая бифуркация была открыта только недавно в связи с так называемой «катастрофой голубого неба» [152]. Все эти многомерные бифуркации представлены в части II.

В главе 9 и 10 мы детально рассматриваем грубые состояния равновесия и периодические орбиты. Бифуркации этих траекторий замкнутых множеств представлены в главе 11. Эти три главы посвящены *локальным* бифуркациям. Результаты по локальным бифуркациям хорошо представлены в литературе, и эта теория продолжает быстро развиваться. Поэтому здесь мы ограничиваемся детальным изучением только основных случаев. Прежде всего, для бифурцирующего состояния равновесия, характеристические показатели которого не лежат на мнимой оси, предположим, что они лежат слева от нее. Предположим, что на мнимой оси есть или единственный нулевой показатель³, или пара сопряженных мнимых показателей. Аналогичные предположения делаются в случае периодических движений: мультипликаторы, не лежащие на единичной окружности, должны лежать внутри нее; мультипликаторы, лежащие на единичной окружности, равны $+1$ или -1 , или это пара $e^{\pm i\varphi}$, $0 < \varphi < \pi$. Соответствующие бифуркации в таких случаях достаточно просты, поэтому, пока есть возможность, мы не ограничиваем вид нелинейных членов.

Причина таких ограничений на спектр характеристических показателей достаточно очевидна: мы обращаем особое внимание на проблему потери устойчивости состояниями равновесия и периодическими движениями и на бифуркации, сопровождающие потерю устойчивости. Без сомнения, эти проблемы составляют основной предмет нелинейной динамики.

Конечно, случаи более высоких вырождений в линейной части тоже очень интересны; например, состояние равновесия с тремя экспонентами 0 , $\pm i\omega$ или с двумя парами воображаемых экспонент $\pm i\omega_1$, $\pm i\omega_2$ и т. д. В этих

³Случай двойного нулевого показателя частично представлен в параграфе 13.2.

случаях коразмерности два укороченными нормальными формами являются двумерные системы с конечным числом параметров. Детальное изучение этих нормальных форм представлено в [21, 40, 64, 82].

Нужно учитывать, однако, что нормальная форма не всегда гарантирует полную реконструкцию динамики исходной системы. Например, когда укороченные нормальные формы обладают дополнительными симметриями, эти симметрии в принципе разрушаются, если мы снова учитываем отброшенные члены, и это может привести к хаосу в некоторых областях пространства параметров. Эти области очень узки вблизи бифуркационной точки, но они могут резко увеличиться в размере, как только мы отойдем на конечное расстояние от бифуркационной точки.

Важность более высоких вырождений в линейной части обусловлена тем, что эффективные нормальные формы становятся трехмерными, и в результате сложная динамика, так называемый «мгновенный хаос», возникает уже в нормальной форме. Такие примеры включают нормальные формы для бифуркации состояния равновесия с тремя нулевыми показателями с полным либо неполным жордановым блоком, в которых может быть спиральный аттрактор [18], или аттрактор Лоренца [129], последний случай требует дополнительной симметрии. Поскольку мы фокусируем наше внимание только на простой динамике, мы не будем включать эти примеры в нашу книгу.

Наша презентация локальных бифуркаций основана на теореме о центральном многообразии и на технике инвариантных слоений (см. параграф 5.1, часть I). Предположение о том, что нет характеристических показателей справа от мнимой оси (или мультипликаторов вне единичной окружности), позволяет нам выполнить гладкую редукцию системы до очень удобной «стандартной формы». Мы используем эту редукцию во всей книге при рассмотрении как локальных бифуркаций, так и глобальных бифуркаций при переходе через границу устойчивости.

Изучение этих глобальных бифуркаций связано с тем, что в противоположность состоянию равновесия, которое всегда сохраняется на любой границе области устойчивости, периодическая орбита может не существовать на границе устойчивости. В частности, периодическая орбита может исчезнуть по одному из следующих сценариев:

- а) она влипает в состояние равновесия;
- б) на ней возникает состояние равновесия типа седло-узел;
- в) она влипает в гомоклиническую петлю к седловому состоянию равновесия;

- г) она претерпевает «катастрофу голубого неба», когда при приближении к границе устойчивости и период, и длина траектории стремятся к бесконечности. В противоположность гомоклиническим бифуркациям, в «катастрофе голубого неба» состояния равновесия не участвуют.

В главе 12 мы изучим глобальные бифуркации исчезновения состояний равновесия и периодических орбит типа седло-узел. Вначале мы приведем многомерный аналог теоремы Андронова и Леонтович о рождении устойчивого предельного цикла из сепаратрисы седло-узла на плоскости. По сравнению с первоначальным доказательством в [130], наше доказательство значительно упрощено за счет использования инвариантного слоения. Мы также рассматриваем случай, когда гомоклиническая петля к седло-узлу входит в край узловой области.

Бифуркация сепаратрисы седло-узла была открыта Андроновым и Виттом [14] при изучении явления перехода от синхронизации к пульсирующим модуляциям в радиотехнике. Точнее, они изучали периодически вынужденное уравнение Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = \mu A \sin \omega t,$$

где $\mu \ll 1$ и $\omega_0 - \omega \sim \mu$.

В соответствующем усредненном уравнении Андронов и Витт доказали существование бифуркаций седло-узла, которые объясняют простой переход от устойчивого состояния равновесия к периодическому движению. Тем не менее в то время не был решен вопрос о соответствии предельных множеств усредненного уравнения предельным множествам исходного уравнения. Андронов и Витт вернулись к этой проблеме в следующей статье, где, используя метод малого параметра Пуанкаре, доказали соответствие грубого состояния равновесия усредненной системы периодической орбите исходной системы. Позже Крылов и Боголюбов доказали соответствие грубой периодической орбиты в усредненных уравнениях двумерному инвариантному тору в исходной системе. Таким образом, строгое объяснение перехода от синхронизации к модуляциям в исходной системе требует изучения бифуркаций возможного возникновения инвариантного тора при исчезновении седло-узловой периодической орбиты.

Задача о глобальных бифуркациях при исчезновении седло-узловой периодической орбиты ставится так. Предположим, что существует периодическая орбита типа седло-узел и что все траектории, которые стремятся к данной периодической орбите при $t \rightarrow -\infty$, стремятся к ней также при $t \rightarrow +\infty$ вдоль центрального многообразия. Иными словами, неустойчи-

вое многообразие W^u седло-узла возвращается к седло-узлу со стороны узлового сектора. В этом случае или

- а) W^u — двумерное инвариантное многообразие, тор или бутылка Клейна, или
- б) W^u не является многообразием.

Если система имеет глобальную секущую поверхность (которая всегда существует, когда мы имеем дело с периодически вынужденной автономной системой), неустойчивое многообразие W^u может быть только тором. Пересечение W^u с секущей поверхностью является в этом случае замкнутой кривой, которая инвариантна относительно отображения Пуанкаре.

Возможны два следующих случая:

- 1) инвариантная кривая гладкая;
- 2) кривая не является гладкой.

Если кривая гладкая, то при исчезновении седло-узла на секущей остается замкнутая притягивающая инвариантная кривая (Афраймович и Шильников (1974)).

Если инвариантная кривая не является гладкой, ситуация становится значительно более сложной, т. к. исчезновение седло-узла может вывести исходную систему из класса Морса–Смейла, т. е. может возникнуть сложная динамика. Афраймович и Шильников обнаружили, что если выполнены так называемые условия «большой петли» или «малой петли», то существует последовательность интервалов значений параметра, отвечающая появлению сложной динамики. Этот результат был позднее улучшен Ньюхаусом, Пэлисом и Такенсом, которые доказали, что существует последовательность значений параметра, отвечающая трансверсальной гомоклинической орбите (и, следовательно, всегда существует последовательность интервалов, отвечающая сложной динамике), даже если условие «большой петли» не выполнено, но только для однопараметрических семейств специального вида. Аналогичный результат для этой бифуркации в общих однопараметрических семействах был получен в [151], где доказывается, что если условие большой петли выполнено, то хаос существует при всех (малых) значениях параметра сразу после исчезновения седло-узла. Напротив, если это условие не соблюдается, то на оси параметра могут чередоваться интервалы сложной и простой динамики (в случае простой динамики существует непрерывная инвариантная кривая).

Отметим, что эффект чередующихся зон простой и сложной динамики впервые открыл Ван-дер-Поль [154] в экспериментах с периодическим

усилением лампового генератора (этот эффект возникает при настройке радио, когда слышен характерный шум при переходе от одной станции к другой). Первое теоретическое объяснение эффекту Ван-дер-Поля дали Картрайт и Литтлвуд [36].

В параграфе 12.2 мы приводим изложение результатов для случая, когда неустойчивое многообразие W^u седло-узла гомеоморфно тору. Мы также изложим общую теорию эффективного сведения задачи к изучению некоторого семейства эндоморфизмов (гладких необратимых отображений) окружности.

Когда система не имеет глобальной секущей, неустойчивое многообразие W^u седло-узла может быть также бутылкой Клейна (если система задана в R^n с $n \geq 4$). Если бутылка Клейна в момент бифуркации является гладкой, она сохранится после исчезновения седло-узла. По топологическим причинам на бутылке Клейна всегда будет существовать пара периодических орбит, длина которых возрастает до бесконечности при приближении к моменту появления исходного седло-узла. В общем случае эти периодические орбиты будут менять устойчивость бесконечное множество раз посредством прямой и обратной бифуркаций удвоения периода. Если же бутылка Клейна не гладкая, применимы условия большой и малой петли. Первое гарантирует сложную динамику при всех малых значениях параметра после исчезновения седло-узла. Напротив, условие малой петли может гарантировать только существование последовательности интервалов значений параметров, отвечающих сложной динамике. Отметим, что в противоположность случаю, когда W^u гомеоморфна тору, в случае негладкой бутылки Клейна динамика может быть простой при всех малых значениях параметра, если условие малой петли не выполняется (случай «очень малой петли»). Эти результаты представлены в параграфе 12.3.

Совершенно другая ситуация становится возможной в случае, когда система не имеет глобальной секущей и W^u — не многообразие. В этом случае (параграф 12.4) исчезновение периодической орбиты типа седло-узел может при некоторых дополнительных условиях привести к возникновению другой (единственной и устойчивой) периодической орбиты. При подходе к границе области устойчивости длина и период этой орбиты возрастают до бесконечности. Это явление называется «катастрофа голубого неба». Поскольку в настоящее время мало известно физических моделей, в которых возникает такая бифуркация, мы проиллюстрируем ее рядом естественных примеров.

Отметим, что в n -мерном случае, когда $n \geq 4$, могут реализовываться другие топологические конфигурации W^u . Такие бифуркации седло-узла обязательно выводят систему из класса систем с простой динамикой.

кой. Например, в [139, 152] доказано, что гиперболический аттрактор типа Смейла–Вильямса может возникнуть сразу после исчезновения периодической орбиты типа седло-узел.⁴

Другой типичной (в этой книге не затрагиваемой) бифуркацией коразмерности один систем Морса–Смейла является так называемая бифуркация седло-седла, когда грубое седловое состояние равновесия сталкивается с другим седлом, имеющим другой топологический тип. Если при этом устойчивое и неустойчивое многообразия седла-седла пересекают друг друга трансверсально вдоль некоторых гомоклинических орбит, тогда при исчезновении седла-седла из гомоклинических петель возникают седловые периодические орбиты. Если имеется только одна гомоклиническая петля, тогда из нее рождается единственная периодическая орбита, и соответственно эта бифуркация не выводит систему из класса систем Морса–Смейла. Однако если существует более одной гомоклинической петли, то после исчезновения седло-седла возникнет гиперболическое предельное множество с бесконечным множеством седловых периодических орбит [135].

Подобное явление возникает, и когда исчезает периодическая орбита типа седло-седло (один мультипликатор равен 1, а другие лежат как внутри, так и снаружи единичной окружности). Если устойчивое и неустойчивое многообразия периодической орбиты типа седло-седло пересекаются по двум (по крайней мере) гладким торам, тогда исчезновение такой периодической орбиты сопровождается появлением предельного множества, в котором имеется бесконечное плотное множество гладких седловых инвариантных торов [6].

В главе 13 мы рассмотрим бифуркации гомоклинической петли к седловому состоянию равновесия. Мы начинаем с двумерного случая. Сначала мы исследуем устойчивость петли сепаратрисы⁵ в общем случае (не нулевая седловая величина), а затем в случае нулевой седловой величины. Далее, мы описываем случаи произвольной конечной коразмерности при помощи так называемой последовательности Дюлака, которая позволяет определить устойчивость петли по знаку первого отличного от нуля члена этой последовательности.

В случае ненулевой седловой величины мы приводим классические результаты Андронова и Леонтович о рождении единственного предельного цикла при бифуркации петли сепаратрисы. Наше доказательство отличается

⁴В [139] также рассматривается более общий случай, касающийся исчезновения седло-узловой тора, за которым следует появление аттракторов Аносова и многомерных соленоидов.

⁵В действительности рассматривается только односторонняя устойчивость.

от исходного доказательства в [9], которое существенно использует топологию плоскости. Однако, аналогично Андронову и Леонтович, мы проводим наше доказательство при минимальных требованиях к гладкости ($\mathbb{C}^1$).

Случай нулевой седловой величины рассматривался Е. А. Леонович в 1951 году. Ее основные результаты представлены в параграфе 13.3, в несколько отличных терминах. В случае коразмерности n (т. е. когда точно $(n - 1)$ первых членов в последовательности Дюлака равны нулю) при бифуркации петли сепаратрисы на плоскости может возникнуть не более n предельных циклов; более того, эта оценка является строгой.

В том же параграфе мы приводим бифуркационные диаграммы для случая коразмерности 2: нулевой первая седловая величина и ненулевая первая сепаратрисная величина (второй член последовательности Дюлака) в момент бифуркации. Метод Леонтович основан на построении отображения Пуанкаре, которое также позволяет рассматривать гомоклинические петли на неориентируемых двумерных поверхностях, когда малая окрестность петли сепаратрисы может быть лентой Мёбиуса. Мы приводим бифуркационные диаграммы для обоих случаев.

Бифуркации рождения периодических орбит из гомоклинических петель многомерного седлового состояния равновесия рассматриваются в параграфе 13.4. Сначала мы даем условия появления устойчивой периодической орбиты. Эти условия заключаются в том, что неустойчивое многообразие состояния равновесия должно быть одномерным, а седловая величина должна быть отрицательной. Фактически результат (теорема 13.6) является прямым обобщением теоремы Андронова–Леонтович на многомерный случай. Вновь мы подчеркиваем, что по сравнению с исходным доказательством Шильникова [130] наше доказательство требует только $\mathbb{C}^1$ -гладкости векторного поля.

Далее мы рассматриваем гомоклинические бифуркации седла, неустойчивое многообразие которого по-прежнему является одномерным, но теперь мы полагаем, что седловая величина положительна. В отличие от случая отрицательной седловой величины, здесь необходимо наложить на систему некоторые дополнительные условия невырожденности. Фактически эти условия подразумевают существование в системе устойчивого двумерного инвариантного $\mathbb{C}^1$ -многообразия: либо цилиндра, либо ленты Мёбиуса, в зависимости от знака так называемой сепаратрисной величины. Таким образом, задача, по сути, сводится к двумерному случаю, рассмотренному в параграфе 13.2. Поскольку эта задача является частным случаем более общей (случай многомерного неустойчивого многообразия), рассматриваемой в параграфе 13.5, мы в основном сосредотачиваемся на геометрии.

Полученная картина полезна для изучения аттракторов Лоренца, а также гомоклинических бифуркаций большей коразмерности.

В конце параграфа мы рассматриваем гомоклиническую петлю к седло-фокусу, неустойчивое многообразие которого одномерно. Мы показываем, что, когда седловая величина положительна, вблизи гомоклинической петли седло-фокуса существует бесконечное множество седловых периодических орбит (теорема 13.8).

Существование сложной динамики вблизи гомоклинической петли к седло-фокусу было открыто Л. Шильниковым в трехмерном случае в [131]. Позднее четырехмерный случай⁶ рассматривался в [132]; и общий случай в [136].

В параграфе 13.5 мы рассматриваем бифуркацию гомоклинической петли седла без ограничений на размерности ее устойчивого и неустойчивого многообразий. Мы доказываем теорему, которая дает условия рождения единственной периодической орбиты из петли седла [134], а также приводим формулировку (без доказательства) теоремы о сложной динамике в окрестности гомоклинической петли седло-фокуса. При этом мы в случае седла используем теорему о нелокальном центральном многообразии (глава 6 части 1), что позволяет свести задачу к рассмотренной ранее (теорема 13.6).

В случае седло-фокуса результат [136] не может быть получен редукцией ни на какое инвариантное многообразие. Однако, вообще говоря, при выполнении некоторых дополнительных простых условий невырожденности задачу можно свести на трех- или четырехмерное инвариантное многообразие [120, 150].

Параграф 13.6 изучает три основных случая бифуркаций коразмерности 2 гомоклинической петли к седлу. Эти случаи выделил Шильников в [138] для объяснения мгновенного возникновения аттрактора Лоренца из гомоклинической бабочки. Позднее эти бифуркации привлекли значительный интерес (см. ссылки в параграфе 13.6). Здесь мы рассматриваем многомерный случай гомоклинической петли к седлу с нулевой седловой величиной и случаи нулевой сепаратрисной величины и вхождения по ведущему направлению, которые не приводят к сложной динамике. Хотя соответствующие бифуркационные диаграммы широко известны (см. [126, 77, 129] для случая нулевой сепаратрисной величины, [119] для случая вхождения по неведущим направлениям и [99, 38, 77, 65] для случая нулевой седловой величины), полное доказательство опубликовано в этой книге, по-видимому, впервые.

⁶Здесь седло-фокус имеет две пары комплексно-сопряженных характеристических показателей и дивергенция векторного поля в седло-фокусе не обращается в нуль.

В параграфе 13.7 мы описываем два других случая коразмерности 2, а именно бифуркации гомоклинической восьмерки и гетероклинического цикла с двумя седлами. И тот и другой случай рассматриваются внутри класса систем Морса–Смейла (в случае гомоклинической восьмерки требуется, чтобы седловая величина была отрицательной; в случае гетероклинического цикла либо седловые величины должны быть отрицательными, либо должны выполняться условия, гарантирующие существование двумерного инвариантного многообразия). Результаты, обзор которых приводится в этом параграфе, собраны из [148, 151, 50, 149] для гомоклинической восьмерки и [121, 122, 123, 124, 125] для гетероклинических циклов. Также приводятся некоторые результаты о гетероклинических циклах другого типа [34, 35]. Структура бифуркационных диаграмм в случае с седло-фокусами сложнее, чем в случае цикла с седлами (несмотря на то что динамика и в том и в другом случае остается простой). Согласно [158], тонкая структура бифуркационных диаграмм в случае седло-фокусов чувствительна к произвольно малым изменениям непрерывных топологических инвариантов (модулей), рассмотренных в параграфе 8.3.

Последняя глава посвящена задаче о переходе через границы устойчивости состояний равновесия и периодических орбит. Эти вопросы очень важны для нелинейной динамики, например при изучении случаев, когда изменения параметров работающего устройства могут вывести его из области устойчивости, или когда управляющие параметры сознательно выбираются по возможности близко к границе устойчивости, чтобы достигнуть максимальной производительности. Соответствующие задачи для стационарных режимов рассматривал Баутин в своей монографии, впервые опубликованной в 1949 году. Он разделил границы устойчивости на безопасные и опасные. Когда пересекают безопасную границу, фазовая точка не покидает малую окрестность состояния равновесия или периодической орбиты, претерпевающей бифуркацию, несмотря на то что последняя становится неустойчивой. В случае опасной границы фазовая точка убегает из малой окрестности траектории, претерпевающей бифуркацию. Очевидно, что в случае опасных границ локальный анализ становится неадекватным: здесь необходимо исследовать, как неустойчивые множества ведут себя в критический момент. Например, если устойчивый предельный цикл сливается с гомоклинической петлей седла, важно узнать, куда идет другая сепаратриса, поскольку ее ω -предельное множество будет новым динамическим режимом системы. В других случаях, однако, может быть так, что при критическом значении параметра в границу неустойчивого множества входит более одного устойчивого предельного множества (если эта бифуркация в классе систем Морса–Смейла, этими предельными множествами

являются устойчивые множества или периодические орбиты). В этом случае мы говорим о так называемых динамически неопределенных границах устойчивости, где случайный выбор нового режима является естественным динамическим явлением.

Количество статей и монографий по теории бифуркций очень велико и постоянно возрастает. Некоторые вопросы, рассмотренные в этой книге, отражены также и в других книгах (см. в особенности книги, обозначенные звездочкой в списке литературы). Мы подчеркиваем, однако, что во многих работах, при изучении глобальных бифуркаций, допущение гладкой линеаризации уравнений вблизи состояний равновесия и периодических орбит часто делается только из соображений максимального удобства. Допущение линеаризации подразумевает отсутствие резонансов, что в свою очередь означает наложение бесконечного множества ненужных дополнительных требований на систему (или же количество таких допущений, хотя и конечное, очень быстро растет при увеличении размерности системы). Таким образом, подход, основанный на линеаризации, вызывает сомнения по поводу применимости теоретических результатов к динамическим моделям⁷. Методы, представленные в этой книге, свободны от таких проблем. Это достигнуто при помощи техники, разработанной нашей исследовательской группой в Нижнем Новгороде. Мы используем эту технику в главах 12 и 13 для изучения нелокальных бифуркаций. Подчеркнем, что нам достаточно очень малая степень гладкости. Это, возможно, делает анализ более сложным, зато повышается достоверность и адекватность сделанных на его основе выводов о бифуркации. Методы, представленные в этой книге, использовались также и для систем со сложной динамикой, в частности, при изучении гомоклинических касаний [58, 59, 62], см. также [100, 101].

Мы благодарим за помощь в работе над этой книгой С. Гонченко, М. Шашкова, О. Стенькина, Л. Лермана и Дж. Мойолу. Мы также благодарим за поддержку Центр морских исследований США и Швейцарский федеральный институт технологий (EPFL и ETH).

⁷Довольно часто бывает так, что результаты, выглядящие вполне корректно с математической точки зрения, будучи сформулированными для «типичных» или «общих» семейств динамических систем, при использовании в специфических задачах требуют проверки соответствующих условий типичности или общности. Несправедливо, однако, принуждать исследователя тратить время и вычислительные ресурсы, только чтобы проверить условия, которые, в сущности, необязательны.

ГЛАВА 7

Структурно устойчивые системы

Качественная теория динамических систем начала развиваться в 19 веке в связи с исследованием задач небесной механики. Как мы знаем, уравнения небесной механики по большей части гамильтоновы, т. е. являются уравнениями довольно специального вида. В сущности, в то время не было особой необходимости в качественной теории неконсервативных систем. Тем не менее Пуанкаре создал значительную часть общей теории динамических систем на плоскости вместе с ее ключевым следствием — теорией предельных циклов, а Ляпунов — общую теорию устойчивости. Обе эти математические теории были применены позже — в 1920–30-х годах в связи с изобретением радио и дальнейшим интенсивным развитием радиотехники.

В радиотехнике динамическими режимами являются автоколебания. Любое реальное устройство, такое как неоновая лампа или вакуумная трубка, обладает определенным набором регулируемых параметров. На практике значения параметра, соответствующие режиму автоколебаний одного и того же устройства или группы схожих устройств, не могут быть полностью идентичными. Следовательно, если устройство неоднократно демонстрирует схожие колебания, это означает, что небольшие отклонения параметров в некоторых допустимых пределах не приводят к изменению качественных характеристик процесса. Естественно, разумная математическая модель системы должна также воспроизводить это свойство реальной физической системы.

В случае когда физическая система может быть адекватно смоделирована с помощью динамической системы на плоскости, этой физической «устойчивости» можно придать точный математический смысл, что и сделал Андронов. Во-первых, он применил теорию предельных циклов Пуанкаре и теорию устойчивости Ляпунова для изучения моделирующих уравнений, что позволило ему и Витту объяснить множество реальных явлений в радиотехнике. Затем он связал понятие устойчивого предельного цикла Пуанкаре с наблюдаемыми периодическими колебаниями, которые он на-

звал «автоколебаниями». Кроме того, Андронов ввел для математического описания устойчивых автоколебаний понятие «грубого» цикла, то есть цикла, который сохраняется при малом гладком возмущении системы.

Однако выход регулирующих параметров за пределы определенного диапазона может вызвать фундаментальные изменения в режиме колебаний. В динамической системе это означает качественные модификации фазового портрета. В своем обзоре «Математические задачи теории автоколебаний» [8] Андронов подчеркнул, что изучение бифуркаций колебательных режимов требует расширения понятия грубости с отдельной траектории (такой как предельный цикл или состояние равновесия) на систему в целом. Эта задача была решена им и Понтрягиным. Ниже мы описываем их теорию *systemes grossiers*¹.

7.1. Грубые системы на плоскости.

Теорема Андронова–Понтрягина

Рассмотрим множество двумерных систем на плоскости, заданных уравнением

$$\dot{x} = X(x), \quad (7.1.1)$$

где $X(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^r$ -гладкая ($r \geq 1$) функция, определенная в замкнутой ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^2$.

Введем на этом множество следующую норму:

$$\|X\|_{C^1} = \sup_{x \in G} \left(\|X\| + \left\| \frac{\partial X}{\partial x} \right\| \right). \quad (7.1.2)$$

В данной норме множество систем становится *банаховым пространством*, которое мы обозначаем через $\mathcal{B}$ или $\mathcal{B}_G$, подчеркивая выбор области G .

Мы также определим δ -окрестность системы X как множество всех систем $\tilde{X}$, удовлетворяющих условию

$$\|\tilde{X} - X\|_{C^1} < \delta.$$

Определение 7.1. Динамическая система X называется грубой в области G , если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

- 1) все системы в δ -окрестности X топологически эквивалентны X ; и, кроме того,
- 2) гомеоморфизм, который устанавливает эту эквивалентность, является ε -близким к тождественному (то есть расстояние между двумя соответствующими точками меньше, чем ε).

¹«Грубых» систем на плоскости.

Естественно наложить некоторые ограничения, касающиеся границы ∂G области G , как это было сделано в исходном определении грубости, а именно: ∂G должна быть гладкой замкнутой кривой, не касательной к векторному полю² (кривой без контакта). Заметим, что в случае динамических систем на компактных гладких поверхностях область G совпадает со всей поверхностью таким образом, каких-либо граничных условий не возникает.

Теорема 7.1 (Андронов–Понтрягин). Система X является грубой в области G тогда и только тогда, когда

- (1) не существует состояний равновесия с характеристическим показателем на мнимой оси;
- (2) не существует периодических орбит с мультипликатором на единичной окружности и
- (3) не существует сепаратрис, идущих из седла в другое (или то же самое) седло.

Последнее условие может быть переформулировано как отсутствие гоомоклинических и гетероклинических траекторий.

Из приведенной выше теоремы следует, что грубая система на плоскости может обладать только грубыми состояниями равновесия (узлами, фокусами и седлами) и грубыми предельными циклами. Что касается сепаратрис седел, они либо асимптотически стремятся к узлу, фокусу или предельному циклу, или покидают область G за конечный отрезок времени.

Очевидно, что эта картина сохраняется при малых гладких возмущениях. Поэтому *грубые системы образуют открытое подмножество в пространстве B_G .*

Более того, из представленных ниже простых соображений, основанных на повороте векторного поля, следует, что если X не является грубой системой, то для любых $\delta > 0$ существует грубая система, которая δ -близка к X . Другими словами, *грубые системы образуют плотное множество в B_G .*

Из теоремы Андронова–Понтрягина непосредственно следует, что *грубая система может обладать только конечным числом состояний равновесия и периодических орбит в G .*

²Это условие можно ослабить, т. е. допустить на ∂G существование конечного числа точек квадратичного касания с векторным полем. В этом случае к теореме Андронова–Понтрягина должно быть добавлено четвертое условие: ни периодические орбиты, ни сепаратрисы не проходят через эти точки контакта.

Состояния равновесия, периодические орбиты и сепаратрисы седел являются *особыми* траекториями. Вместе они задают *схему* — полный топологический инвариант (подробнее см. главу 1). Легко убедиться, что все системы, δ -близкие к данной грубой системе, имеют ту же самую схему.

Необходимость условий (1) и (2) теоремы Андронова–Понтрягина очевидна. Действительно, если система грубая в G , она должна оставаться грубой и в любой подобласти G . Поэтому, выбрав малую окрестность состояния равновесия, заключаем, что система в окрестности этого состояния равновесия также должна быть грубой. Аналогичное наблюдение верно и для грубых предельных циклов.

Объясним теперь, почему в грубых системах не могут существовать сепаратрисы, соединяющие седла.

Запишем систему X в виде

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y), \\ \dot{y} &= Q(x, y).\end{aligned}\tag{7.1.3}$$

Рассмотрим специальное возмущение системы $\tilde{X}_\mu$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y) + \mu Q(x, y), \\ \dot{y} &= Q(x, y) - \mu P(x, y),\end{aligned}\tag{7.1.4}$$

где μ — параметр. Отметим, что состояния равновесия системы (7.1.4) не двигаются при изменении μ . В любой точке угол ψ между векторами фазовой скорости $\tilde{X}_\mu$ и X определяется из

$$\tan \psi = \frac{\frac{Q - \mu P}{P + \mu Q} - 5 \frac{Q}{P}}{1 + \frac{Q - \mu P}{P + \mu Q} \cdot \frac{Q}{P}} = -\mu,\tag{7.1.5}$$

то есть угол ψ постоянен.

Благодаря этому свойству $\tilde{X}_\mu$ называется *поворотом* векторного поля X на постоянный угол. Этот угол положителен, если $\mu > 0$, или отрицателен, если $\mu < 0$. Следовательно, если при $\mu = 0$ сепаратриса одного седла соединяется с другим седлом [см. рис. 7.1.1(a)], то при произвольно малых ненулевых μ это соединение будет разрушаться одним из способов, показанных на рис. 7.1.1 (b) и 7.1.1 (c).

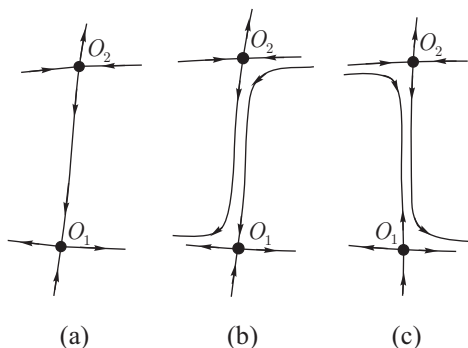


Рис. 7.1.1. (а) Нетрансверсальное гетероклиническое соединение между двумя седлами в $\mathbb{R}^2$ при $\mu = 0$ разваливается двумя способами: (b) $\mu < 0$ и (c) $\mu > 0$

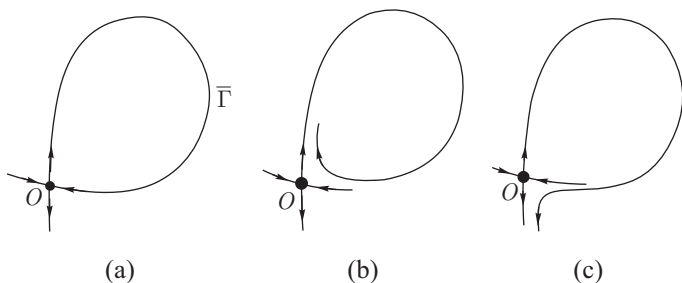


Рис. 7.1.2. (а) Гомоклиническая петля седла — негрубая траектория. Поведение сепаратрисы до (b) и после (c) момента образования петли

Аналогично, если существует петля сепаратрисы седла при $\mu = 0$, она будет расщепляться при ненулевых μ , как показано на рис. 7.1.2. Мы видим, что произвольно малое гладкое возмущение векторного поля изменяет фазовый портрет системы с гомоклинической петлей или гетероклиническим соединением; это, очевидно, означает, что данная система не является грубой.

Доказательство достаточности условий теоремы Андронова–Понтрягина основано на теории Пуанкаре–Бендиксона, которая дает классификацию всех возможных типов траекторий в двумерных системах на плоскости (см. параграф 1.3). За подробностями мы отсылаем читателя к книгам [11, 12].

Теория Пуанкаре–Бендиксона также применима для систем на цилиндре и на двумерной сфере. Что касается других компактных поверхностей, таких как торы, крендели (сферы с ручками) и т. д., на них могут существо-

вать векторные поля, которые помимо состояний равновесия и предельных циклов обладают также незамкнутыми устойчивыми по Пуассону траекториями.

Особую значимость в нелинейной динамике имеют потоки на двумерном торе. Рассмотрим системы на торе, которые не имеют состояний равновесия и которые можно привести к ориентируемым диффеоморфизмам окружности вида:

$$\bar{\theta} = \theta + f_0(\theta) \equiv f(\theta) \pmod{2\pi}.$$

Если ввести метрику

$$\text{dist}(f_1, f_2)_{C^1} = \max_{\theta} (\|f_1(\theta) - f_2(\theta)\| + \|f'_1(\theta) - f'_2(\theta)\|),$$

то множество этих диффеоморфизмов составит метрическое пространство, где (с учетом теоремы Майера из главы 4) *грубые диффеоморфизмы плотны*.

Грубые системы также плотны в пространстве систем на двумерных ориентируемых компактных поверхностях, для которых необходимые и достаточные условия грубости аналогичны приведенным в теореме Андронова–Понтрягина. Теория таких систем была разработана Пейшото [107]. Базовая часть этой теории состоит в доказательстве отсутствия незамкнутых устойчивых по Пуассону траекторий в грубых системах (они могут быть уничтожены вращением векторного поля).

Здесь следует отметить, что Пейшото использовал другое определение грубости. В случае систем на плоскости, оно может быть сформулировано следующим образом:

Определение 7.2. Система X называется структурно устойчивой в области G , если существует такое $\delta > 0$, что при $\|X - \tilde{X}\|_{C^1} < \delta$ системы X и $\tilde{X}$ топологически эквивалентны.

В сравнении с определением грубых систем вышеприведенное определение имеет преимущество: из определения Пейшото непосредственно следует, что структурно устойчивые системы образуют открытое множество. Аналогичное утверждение для грубых систем на плоскости вытекает только из теоремы Андронова–Понтрягина. Фактически Пейшото доказал, что необходимые и достаточные условия грубости в смысле определения 7.1 совпадают для двумерных систем с необходимыми и достаточными условиями грубости в смысле определения 7.2.

Понятие грубости (структурной устойчивости) может быть без труда распространено на многомерный случай. Однако, когда мы пытаемся явно найти необходимые и достаточные условия грубости, возникают принципиально новые проблемы. Мы отмечали, что Андронов и Понтрягин, так же

как и Пейшото, основывались на общей классификации траекторий двумерных систем. Поэтому, чтобы перейти к многомерному случаю, мы должны остановиться и ознакомиться с базовыми понятиями и фактами из общей теории динамических систем.

7.2. Множество центральных движений

Возвращаясь к радиотехнике 1920–30-х годов, можно предположить, что тогда все еще оставались задачи, требующие моделирования при помощи динамических систем порядка больше двух. Таким образом, возникает вопрос, какой тип колебательных движений, отличных от периодических, можно наблюдать в соответствующих физических системах и какая математическая картина может быть адекватно сопоставима с ним. Чтобы решить этот вопрос, необходимо иметь сравнительную классификацию всех возможных траекторий. Ее первый этап начинается с *блуждающих* и *неблуждающих* точек. Определение точек этих двух типов было приведено в главе 1 для систем на компактных множествах. Ниже мы будем рассматривать систему

$$\dot{x} = X(x),$$

где $X \in \mathbb{C}^1$ в ограниченной и замкнутой области $G \subset \mathbb{R}^n$, границы которой состоят из гладких $(n - 1)$ -мерных поверхностей без контакта с векторным полем, ориентированным внутрь, G . Следовательно, для любой точки $x_0 \in G$ положительная полутраектория $x(t, x_0)$ определена при любой начальной точке x_0 .

Определение 7.3. Точка x_0 называется блуждающей, если у нее существует такая окрестность U , что при некотором $T > 0$ и всех $t \geq T$

$$U \cap x(t, U) = \emptyset.$$

Здесь, как и ранее:

$$x(t, U) = \bigcup_{\xi \in U} x(t, \xi).$$

Из определения следует, что каждая точка $\xi \in U$ также является блуждающей. Поэтому множество всех блуждающих точек открыто. Кроме того, легко видеть, что если точка x_0 — блуждающая, то точка $x(t, x_0)$ также блуждающая для любого t . Следовательно, $x(t|_{t \geq 0}; x_0)$ можно назвать *блуждающей положительной полутраекторией*. Более того, если $x(t, x_0) \in G$ при любом $t < 0$, т. е. если отрицательная полутраектория,

проходящая через x_0 , целиком лежит в G , то $x(t, x_0)_{t < 0}$ также будет состоять из блуждающих точек. Следовательно, вся траектория $x(t, x_0)$ может называться блуждающей. По очевидным причинам маловероятно, что блуждающая (полу-) траектория связана с тем типом движений, который мы ищем.

Поэтому мы обратимся к неблуждающим точкам. Даже из названия можно ожидать определенной «возвращаемости».

Определение 7.4. Точка x_0 называется неблуждающей, если для любой окрестности $U(x)$ для любого $T > 0$ найдется такое $\bar{t} \geq T$, что

$$U \cap x(\bar{t}, U) \neq \emptyset.$$

Таким образом, U возвращается к самой себе бесконечное количество раз. Легко видеть, что если точка x_0 неблуждающая, то $x(t, x_0) \in G$ при всех $t \in (-\infty, +\infty)$ и любая точка на траектории также неблуждающая.

Так как множество блуждающих точек открыто, его дополнение, которым является множество неблуждающих точек, является замкнутым. Мы будем обозначать его через M_1 . Докажем, что оно не пусто при наших допущениях. Прежде всего заметим, что множество ω -предельных точек любой полутраектории не пустое. Это следует из компактности G .

Утверждение 7.1. *Любая ω -предельная точка любой траектории $x(t, x_0)$ неблуждающая.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x(t, x_0)$ — полутраектория, а y — ее предельная точка. Пусть U — произвольная окрестность y . Выберем сколь угодно большое T . Так как y — ω -предельная точка, можно найти такие два сколь угодно больших t_1 и t_2 , что $y_1 = x(t_1, x_0) \in U$ и $y_2 = x(t_2, x_0) \in U$. Можно допустить, что $t_2 - t_1 > T$. Отсюда следует, что $x(t_2 - t_1, U) \cap U \neq \emptyset$ (это пересечение включает точку y_2). Поэтому y — действительно неблуждающая точка. ■

Обратное утверждение неверно. В общем случае могут существовать неблуждающие точки, которые не являются ω - или α -предельными ни для какой траектории.

Состояния равновесия и периодические орбиты — неблуждающие траектории. В первом случае — в любой окрестности состояния равновесия это состояние равновесия находится постоянно; в случае периодической орбиты любая ее точка возвращается бесконечное множество раз в начальную окрестность просто в силу периодичности.

Важнейший подкласс множества неблуждающих точек составляют точки, устойчивые по Пуассону. Главной характеристикой точки, устойчивой по Пуассону, является не только возвращаемость ее окрестности, но

и возвращаемость самой траектории. Определение точек, устойчивых по Пуассону, данное ниже, имеет некоторые отличия от определения, данного в главе 1, но тем не менее эквивалентно ему.

Определение 7.5. Точка x_0 называется устойчивой по Пуассону в положительном направлении (P^+ -устойчивой), если существует такая последовательность t_n , где $t_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow +\infty$, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x(t_n, x_0) = x_0.$$

Другими словами, точка x_0 является ω -предельной точкой своей положительной полутраектории.

Определение точки, устойчивой по Пуассону в отрицательном направлении, аналогично вышеприведенному за исключением того, что $t_n \rightarrow -\infty$. В случае когда точка одновременно P^+ -устойчива и P^- -устойчива, говорят, что она устойчива по Пуассону.

Можно увидеть, что если x_0 является P^+ (P^-)-устойчивой, то ее траектория также P^+ (P^-)-устойчива. Следовательно, мы можем обобщить определение устойчивости по Пуассону на полутраектории и целые траектории.

Важно отличать P^+ -, P^- - и P -устойчивые траектории друг от друга. В самом деле, рассмотрим пример (из параграфа 1.2) системы на двумерном торе, имеющей состояние равновесия с P^+ -траекторией, которая является α -предельной к состоянию равновесия, и P^- -траекторией, которая ω -предельна к нему; все прочие траектории на торе являются устойчивыми по Пуассону и плотно покрывают его.

Вернемся к множеству $\mathcal{M}_1$ неблуждающих точек. Мы установили, что оно не пустое, замкнутое и инвариантное (состоит из целых траекторий). Множество $\mathcal{M}_1$ может рассматриваться как фазовое пространство динамической системы, и поэтому можно повторить процедуру и построить множество $\mathcal{M}_2$, состоящее из неблуждающих точек для системы, ограниченной на $\mathcal{M}_1$. Очевидно, что $\mathcal{M}_2 \subseteq \mathcal{M}_1$. Подобно $\mathcal{M}_1$, множество $\mathcal{M}_2$ также является компактным инвариантным множеством. Если $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_1$, то говорят, что $\mathcal{M}_1$ — *центр* или *множество центральных движений*. Ситуация в точности такова, когда мы рассматриваем грубые двумерные системы.

В общем случае имеем

$$\mathcal{M}_1 \supset \mathcal{M}_2 \supset \dots \supset \mathcal{M}_k \supset \dots$$

Если $\mathcal{M}_k = \mathcal{M}_{k+1}$, начиная с некоторого k , тогда $\mathcal{M}_k$ также называется *центром*, а k называется *порядковым числом* центральных движений.

Если $\mathcal{M}_k \neq \mathcal{M}_{k+1}$ для всех k , тогда мы можем определить множество

$$\mathcal{M}_\omega = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k,$$

которое является пересечением замкнутых инвариантных множеств. Следовательно, $\mathcal{M}_\omega$ также инвариантно. Действительно, если $x_0 \in \mathcal{M}_\omega$, тогда $x_0 \in \mathcal{M}_k$ при всех k . Все $\mathcal{M}_k$ являются инвариантными, и поэтому $x(t, x_0) \in \mathcal{M}_k$ при всех t и всех k , следовательно, $x(t, x_0) \in \mathcal{M}_\omega$.

Мы можем повторить процедуру и получить *трансфинитную* последовательность замкнутых множеств

$$\mathcal{M}_1 \supset \dots \supset \mathcal{M}_k \supset \dots \supset \mathcal{M}_\omega \supset \dots \supset \mathcal{M}_\alpha \supset \dots$$

Известно (из теоремы Кантора для конечномерных множеств), что можно найти такое счетное α , что $\mathcal{M}_\alpha = \mathcal{M}_{\alpha+1} = \dots$, то есть процесс завершается. В данном случае $\mathcal{M}_\alpha$ является *центром*, где α — *порядковое число*. Если α конечно, оно называется *трансфинитным порядковым числом первого класса*; если $\alpha \geq \omega$ — *трансфинитным порядковым числом второго класса*.

Это может показаться странным, но динамические системы с трансфинитным порядковым числом α второго класса существуют. Майер [93] доказал, что для любого заданного трансфинита α второго класса существует система, порядковое число центральных движений которой превосходит α .

Для грубых систем на плоскости теорема Андронова–Понтрягина дает $\alpha = 1$. Случай $\alpha = 2$ имеет место в системах, которые обладают петлей сепаратрисы Γ к седлу O , причем петля является предельной траекторией для близлежащих орбит (см. рис. 7.2.1) и не является блуждающей. Здесь $\mathcal{M}_1 = \Gamma \cup O$. На втором шаге вышеприведенной процедуры получают $\mathcal{M}_2 = O$, то есть центр области G сокращается до состояния равновесия.

Чем так важен центр? Во-первых, это множество, рядом с которым все траектории системы задерживаются значительно дольше, чем где-либо еще, т. е. проводят большую часть времени. Во-вторых, центр характеризуется теоремой Биркгофа.

Теорема 7.2 (Биркгофа). *Устойчивые по Пуассону траектории плотны в множестве центральных движений.*

Эта теорема похожа на известную теорему Пуанкаре о рекуррентности областей для случая консервативных систем, то есть для потоков и диффеоморфизмов, сохраняющих объем, при условии, что объем фазового пространства конечен. Собственно говоря, именно это было целью, которую

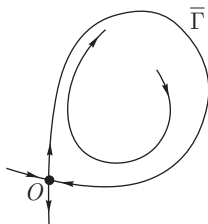


Рис. 7.2.1. Гомоклиническая петля к седлу является ω -предельной для траектории из внутренней области

хотел достичь Биркгоф, создавая теорию центральных движений; а именно выделить из диссипативной системы множество траекторий, на которых система будет вести себя как консервативная. Например, на периодической орбите уравнение движения в нормальных координатах имеет вид $\dot{\theta} = 1$. Этот поток сохраняет длину дуги. Аналогичная ситуация возникает на устойчивом инвариантном торе, плотно покрываемом квазипериодической траекторией, например, для уравнения:

$$\dot{\theta} = \omega_1, \quad \dot{\varphi} = \omega_2,$$

где ω_1 не кратно ω_2 .

В заключение заметим, что читатель может найти более глубокое исследование этих проблем в книге «Динамические системы» Биркгофа [31] и в книге «Качественная теория дифференциальных уравнений» Немуцки и Степанова [98].

7.3. Общая классификация центральных движений

Мы уже отмечали, что теория структурно устойчивых систем второго порядка на плоскости, в сущности, основана на теории Пуанкаре–Бендиксона, т. е. на классификации всех возможных видов движений. Ниже приведена диаграмма, предложенная Андроновым, которая описывает общую классификацию движений по Биркгофу.

В предыдущих параграфах мы обсуждали множество центральных движений. В сущности, мы обнаружили, что это замыкание множества устойчивых по Пуассону траекторий. Это не исключает случай, когда последние могут быть просто периодическими орбитами. Но если имеется хотя бы одна устойчивая по Пуассону незамкнутая траектория, тогда в силу теоремы Биркгофа из параграфа 1.2 существует континуум устойчивых



по Пуассону траекторий. Что касается остальных траекторий в центре, то известно, что множество точек центра, которые неустойчивы по Пуассону, является совокупностью не более чем счетного числа замкнутых и нигде не плотных множеств. Это значит, что большая часть траекторий в множестве центральных движений состоит из устойчивых по Пуассону траекторий.

Устойчивые по Пуассону траектории могут быть, в свою очередь, разделены на два типа в зависимости от того, ограничена или нет последовательность $\{\tau_k(\varepsilon)\}$ времен возвращения Пуанкаре P -траектории в ее ε -окрестность. Биркгоф называл траектории первого типа *рекуррентными траекториями*. Такие траектории замечательны тем, что вне зависимости от выбора начальной точки, при заданном $\varepsilon > 0$ вся траектория лежит в ε -окрестности сегмента траектории, отвечающего временному интервалу $L(\varepsilon)$. Очевидно, что состояния равновесия и периодические орбиты являются замкнутыми рекуррентными траекториями.

Вспомним далее определение минимального множества.

Определение 7.6. Множество M называется минимальным, если оно не пустое, замкнутое, инвариантное и не содержит других подмножеств с такими же свойствами.

Отметим, что при вышеуказанных допущениях касательно системы и области G всегда существует минимальное множество. Любопытно, что для того чтобы доказать существование, Биркгоф также использовал трансфинитную процедуру.

Взаимосвязь между минимальными множествами и рекуррентными траекториями описывается следующими теоремами.

Теорема 7.3 (Биркгоф). *Любая траектория минимального множества рекуррентна.*

Теорема 7.4 (Биркгоф). *Замыкание рекуррентной траектории является минимальным множеством.*

Из этих теорем следует, что траектории минимального множества (отличного от состояния равновесия или периодической орбиты) образуют совокупность «двойников».

Замыкание незамкнутой устойчивой по Пуассону траектории, время возвращения которой не ограничено при некотором $\varepsilon > 0$, называется *квазiminимальным множеством*. Квазiminимальное множество содержит, кроме всюду плотных в нем устойчивых по Пуассону траекторий, еще и какие-то другие инвариантные замкнутые подмножества. Ими могут быть состояния равновесия, периодические орбиты, нерезонансные инвариантные торы, другие минимальные множества, гомоклинические и гетероклинические орбиты и т. д., к которым P -траектории подходят неограниченно близко. Это объясняет, почему время возвращения нетривиальных незамкнутых P -траекторий не ограничено. Благодаря их непредсказуемому поведению во времени, устойчивые по Пуассону траектории квазiminимального множества представляют наибольший интерес для описания установившихся колебательных процессов хаотического характера.

В случае рекуррентных траекторий существует определенная закономерность во временах возвращения Пуанкаре, не характерная для истинных устойчивых по Пуанкаре траекторий. Тем не менее существует подкласс рекуррентных траекторий, которые представляют интерес для нелинейной динамики. Это класс так называемых *почти периодических движений*, т. е. таких, у которых каждая компонента есть почти периодическая функция (чьи аналитические свойства хорошо изучены, например, см. [49, 66, 84]).

Почти периодические функции однозначно заданы тригонометрическим рядом Фурье «в среднем»

$$f(t) \approx \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{i\lambda_n t},$$

где λ_n — действительные числа. Если все λ_n являются линейными комбинациями (с целыми коэффициентами) конечного числа рационально независимых элементов базиса частот $\omega_1, \dots, \omega_m$ (см. главу 4), то возникает частный случай почти периодических функций, а именно квазипериодические функции. Квазипериодическая функция записывается в виде

$$f(t) = \varphi(\omega_1 t, \dots, \omega_m t),$$

где φ является периодической по всем аргументам, с одинаковым периодом. Если k -мерная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X(x) \tag{7.3.1}$$

имеет квазипериодическое решение

$$x(t) \equiv \varphi(\omega_1 t, \dots, \omega_m t),$$

то она также допускает решение

$$x = \varphi(\omega_1 t + C_1, \dots, \omega_m t + C_m),$$

где $C_1, \dots, C_m$ — произвольные константы. Это означает, что соответствующее минимальное множество (замыкание $x(t)$) является m -мерным инвариантным тором. Андронов и Витт [15] установили, что его размерность должна удовлетворять следующему условию:

$$m \leq k - 1.$$

Если конечномерная система имеет почти периодическое не квазипериодическое решение, то коэффициенты λ_n являются линейными комбинациями конечного числа базисных частот $\omega_1, \dots, \omega_m$ с рациональными коэффициентами. Такие решения называются *предельно-квазипериодическими*. Для этого случая Понтрягин [112] доказал, что размерность m минимального множества должна удовлетворять следующему неравенству:

$$m \leq k - 2.$$

В частности, для системы третьего порядка имеем $m = 1$, т. е. ее предельно-квазипериодические решения имеют вид

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{ir_n \omega t}$$

с некоторыми рациональными r_n такими, что частичные суммы ряда Фурье

$$\sum_{n=-N}^N a_n e^{ir_n \omega t}$$

функции $f(t)$ являются периодическими функциями с периодом, стремящимся к бесконечности при $N \rightarrow \infty$.

Структура минимального множества предельно-квазипериодической траектории фрактальна. Другими словами, оно локально характеризуется как прямое произведение m -мерного диска и нуль-мерного канторова множества K . В предельно-периодическом случае — это прямое произведение отрезка и K .

Для того чтобы наглядно представить структуру минимального множества предельно-периодической траектории в $\mathbb{R}^3$, полезно построить объект, называемый *соленоидом Вьеториса–ван–Данцинга*.

Первый этап геометрического построения заключается в следующем. Рассмотрим полноторий $\Pi_1 \in \mathbb{R}^3$, где $\Pi_1 = \mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$, $\mathbb{D}^2$ — двумерный диск и $\mathbb{S}^1$ — окружность. Вложим другой полноторий Π_2 в Π_1 таким образом, чтобы он пересекал каждый диск $\{\varphi = \text{const}\}$ в Π_1 (где $\varphi \in \mathbb{S}^1$ — угловая переменная) по двум непересекающимся дискам, т. е. Π_2 совершает два оборота вдоль $\mathbb{S}^1$ без самопересечения, как показано на рис. 7.3.1. Таким образом, Π_2 примерно в 2 раза длиннее, чем Π_1 , и в 4 раза уже. На втором этапе мы вкладываем полноторий Π_3 в Π_2 так же, как описано выше, так что теперь имеется 4 пересечения Π_3 с каждым диском $\{\varphi = \text{const}\}$, по две внутри каждой прошлой пары пересечений.

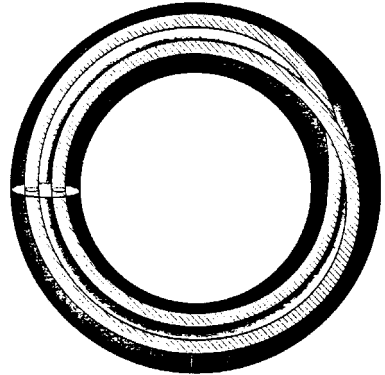


Рис. 7.3.1. Первый этап в построении соленоида Вьеториса–ван–Данцинга

Повторяя процедуру, мы получим последовательность полноториев Π_n , таких что $\Pi_{n+1} \subset \Pi_n$. Получающийся соленоид представляет собой пересечение

$$\Sigma = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Pi_n.$$

Это множество замкнуто, а $\Sigma \cap \{\varphi = \text{const}\}$ является канторовым множеством. Вьеторис и ван-Данциг доказали, что на Σ можно задать такой поток, что Σ станет минимальным множеством почти периодического движения. При этом они понимали почти периодичность с качественной точки зрения.

Определение 7.7. Движение $x(t)$ называется почти периодическим, если при любом $\varepsilon > 0$ существуют такие числа $L(\varepsilon)$ и последовательность $\{\tau_k(\varepsilon)\}$, удовлетворяющая условию $|\tau_{k+1} - \tau_k| < L(\varepsilon)$, что

$$\begin{aligned} \text{dist}(x(t), x(t + \tau_k)) &< \varepsilon, \\ -\infty < t < +\infty. \end{aligned} \tag{7.3.2}$$

Периодическая орбита, которая является простейшим частным случаем почти периодического движения, имеет, кроме своего наименьшего периода τ , также период $k\tau$, кратный τ , где k — любое целое число. Совокупность $\{\tau_k\}$ играет практически такую же роль для почти периодической траектории, что и периоды для периодической орбиты; поэтому числа $\tau_k(\varepsilon)$ называются *почти периодами*.

Замыкание почти периодической траектории включает только почти периодические траектории. Более того, $L(\varepsilon)$ и почти периоды остаются прежними.

Вышеприведенные наблюдения порождают следующий фундаментальный вопрос: «Какое свойство выделяют почти периодические траектории среди рекуррентных?» Для того чтобы ответить на этот вопрос, мы должны ввести еще одно определение.

Определение 7.8. Траектория обладает S -свойством, если при заданном $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при любых t_1 и t_2

$$\text{dist}(x(t_1, x_0), x(t_2, x_0)) < \delta$$

влечет

$$\text{dist}(x(t + t_1, x_0), x(t + t_2, x_0)) < \varepsilon$$

при $0 \leq t < +\infty$.

В сущности, вышеприведенное свойство является скрытым условием равномерной устойчивости по Ляпунову.

Теорема 7.5 (Франклин, Марков). *Если рекуррентная траектория обладает S -свойством, то она является почти периодической.*

Одно из следствий этой теоремы заключается в том, что истинно рекуррентная траектория должна быть неустойчивой. Известно несколько экзотических примеров динамических систем на некоторых компактных многообразиях, называемых нуль-многообразиями, где все траектории являются рекуррентными. Более того, эти траектории неустойчивы. Однако их неустойчивость не экспоненциальная, а только полиномиальная. В противоположность почти периодической траектории, спектр частот которой является дискретным, спектр рекуррентной траектории дополнительно имеет непрерывную компоненту. Более подробно см. [23].

7.4. Замечания о грубости динамических систем высокого порядка

Многие колебательные режимы необходимо моделировать при помощи динамических систем высокого порядка. Как и в случае низкого порядка, состояния равновесия и периодические орбиты таких систем соответствуют устойчивым режимам и периодическим колебаниям, в частности, автоколебаниям. В главе 4 мы затронули вопросы, относящиеся к описанию автомодуляции и многочастотных режимов посредством квазипериодических движений на инвариантных торах. Но значительное разнообразие возможных типов колебательных явлений в динамических системах высокого порядка не исчерпывается только вышеприведенными движениями. Каков математический образ более сложного колебательного поведения? Можно ли объяснить последнее на языке динамических систем? Чтобы ответить на этот вопрос, нам необходимо выявить роль незамкнутых устойчивых по Пуассону траекторий. Между тем нужно иметь в виду, что любая математическая идеализация наблюдаемого процесса должна быть устойчива во времени, а также при малых гладких возмущениях динамической системы.

В данном контексте важен следующий вопрос, поставленный Андроновым и Виттом: «Какая P -траектория устойчива по Ляпунову?» Ответ на него дает следующая теорема.

Теорема 7.6 (Марков). *Если устойчивая по Пуассону траектория равномерно устойчива по Ляпунову, то она является почти периодической.*

Доказательство этой теоремы представлено в [98]. В сущности, оно основано только на S -свойстве, поэтому для него требуется дополнительное свойство равномерности устойчивости³.

Этот результат показывает, что отдельная траектория не может дать адекватную картину хаотических колебаний. Забегая вперед, мы отметим, что все незамкнутые устойчивые по Пуассону траектории в структурно устойчивых системах являются неустойчивыми, или, более точно, имеют седловой тип.

Если P -траектория неустойчива по Ляпунову, это должно подразумевать, что каждая траектория ее квазиминимального множества также неустойчива. Тем не менее в целом это множество может быть притягивающим, и в этом случае оно может являться искомым математическим образом сложного колебательного процесса. Четкое понимание необходимости таких аттракторов для нелинейной динамики пришло только в 70-х гг.

Поясним свойства рассматриваемых нами геометрических объектов с точки зрения их сохранения при малых гладких возмущениях. Опять же, здесь все достаточно понятно в случае состояний равновесия и периодических орбит. Но что можно сказать в случае, когда структурно устойчивая система имеет незамкнутую P -траекторию? Какими свойствами обладает такая система?

Мы уже упоминали, что P -траектория $\varphi(t, x_0)$ является самопредельной, т. е. она приближается к своей начальной точке x_0 сколь угодно близко. Интуитивно представляется очевидным, что при подходящем выборе достаточно малого возмущения возмущенная система будет иметь периодическую орбиту, проходящую точно через точку x_0 . Как это часто случается в математике, просто сформулированное утверждение может потребовать очень нетривиального доказательства. Следующая гипотеза была доказана Пью в 1967 г [113].

Теорема 7.7 (лемма о замыкании, Пью). *Пусть x_0 — неблуждающая точка гладкого потока. Тогда сколь угодно близко в $\mathbb{C}^1$ -топологии существует гладкий поток, который имеет периодическую орбиту, проходящую через точку x_0 ⁴.*

Так как каждая точка на P -траектории является неблуждающей, эта теорема также верна для точек, устойчивых по Пуассону. Лемма о замыкании влечет следующее содержательное следствие: *грубая система с P -траекторией имеет бесконечное число периодических орбит.*

³В случае равномерной устойчивости по Ляпунову размеры двух малых окрестностей, включенных в определение, не зависят от выбора начальной точки, т. е. они одинаковые для каждой точки на траектории; см. Малкин [91].

⁴Справедливость $\mathbb{C}^r$ -варианта этой теоремы с $r \geq 2$ до сих пор остается неизвестной.

Действительно, так как исходная система грубая, она топологически эквивалентна любой достаточно близкой системе. Согласно теореме 7.7 это означает, что исходная система имеет периодическую орбиту, которая проходит через точку x_1 , достаточно близкую к x_0 (следует также заметить, что чем меньше возмущение, тем длиннее будет период периодической орбиты). В силу тех же аргументов, система должна иметь другую периодическую орбиту, которая проходит через еще более близкую точку x_2 , и так далее.

Таким образом, мы видим, что наша система с незамкнутой устойчивой по Пуассону траекторией обладает бесконечным множеством периодических орбит $\varphi(t, x_k)$, где $\varphi(0, x_k) = x_k$ ($k = 1, 2, \dots$), с периодами τ_k , и $x_k \rightarrow x_0$, и $\tau_k \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$.

Отметим, что в этом доказательстве мы существенно используем грубость (в противоположность структурной устойчивости) системы, т. е. что гомеоморфизм, устанавливающий топологическую эквивалентность достаточно близких систем, близок к тождественному. Однако и без такого допущения утверждение по-прежнему верно, хотя доказательство становится более сложным.

Чтобы охарактеризовать структурно устойчивые системы с P -траекториями, полезен следующий результат.

Теорема 7.8 (Пью). *Сколь угодно близко (в C^1 -смысле) к любому гладкому потоку существует поток, у которого периодические орбиты плотны в неблуждающем множестве⁵.*

Таким образом, если структурно устойчивая система имеет притягивающее квазимиимальное множество — *странный аттрактор*, то периодические орбиты будут в нем плотны.

Что касается притягивающих минимальных множеств, из теоремы Пью следует, что они структурно неустойчивы. Несмотря на то что минимальные множества, состоящие из рекуррентных и предельно-квазипериодических орбит, занимают далеко не ключевое место в нелинейной динамике, квазипериодические движения всегда были наиболее интересными, так как они моделируют многие колебательные явления, имеющие дискретный спектр.

Подводя итог нашим рассуждениям, мы можем сделать предварительное заключение: типичные динамические системы делятся на два основных класса, в зависимости от того, имеет ли система конечное число периодических орбит в ограниченной подобласти фазового пространства, или же

⁵Строго говоря — в неблуждающем множестве минус состояния равновесия.

число периодических орбит бесконечно. В первом случае такие системы обычно называются системами с простой динамикой. Второй класс состоит из систем со сложной динамикой. Понятие грубости или структурной устойчивости легко применяется к системам с простой динамикой. Ситуация для систем со сложной динамикой менее однозначна.

Дело в том, что структурно неустойчивые (негрубые) системы со сложной динамикой могут образовывать *открытые области* в пространстве динамических систем. Более того, необходимо подчеркнуть, что структурно устойчивые (грубые) странные аттракторы до сих пор *никогда не наблюдались* в моделях нелинейной динамики и остаются чисто геометрическими или алгебраическими построениями. Таким образом, представляется, что типичные системы со странными аттракторами принадлежат областям структурной неустойчивости. Такие *структурно неустойчивые странные аттракторы* весьма успешно используются в исследовании динамического хаоса. Для этих аттракторов строгое требование грубости, очевидно, не имеет смысла; при малых возмущениях должны сохраняться только некоторые типичные свойства.

Обычно разумная модель высокого порядка должна демонстрировать оба типа динамики — простую и сложную. Конечно, первым шагом в анализе таких моделей является изучение структуры разбиения фазового пространства на траектории в тех областях параметров, которые соответствуют простой динамике. В следующем параграфе мы рассмотрим довольно широкий класс структурно устойчивых систем с простой динамикой, которые называются *системами Морса–Смейла*. Системы со сложной динамикой требуют особого подхода и будут предметом следующей книги.

7.5. Системы Морса–Смейла

Системы Морса–Смейла вводятся аксиоматически. Рассмотрим динамическую систему

$$\dot{x} = X(x), \quad (7.5.1)$$

где $X(x) \in \mathbb{C}^r$ ($r \geq 1$) in $\mathbb{R}^n$.

Пусть G — некоторая замкнутая, ограниченная область в фазовом пространстве системы (7.5.1). Обозначим через Ω множество неблуждающих траекторий системы (7.5.1) в G . Мы будем предполагать, что $\partial G \cap \Omega = \emptyset$, где ∂G обозначает границу G .

Определение 7.9. Система (7.5.1) в области G называется системой Морса–Смейла, если она удовлетворяет двум следующим аксиомам.

Аксиома 1. Неблуждающее множество Ω состоит из конечного числа орбит.

Аксиома 2. Все периодические орбиты и состояния равновесия в G грубые, и любое пересечение их устойчивых и неустойчивых инвариантных многообразий трансверсально.

Можно показать, что периодические орбиты и состояния равновесия — единственные неблуждающие траектории систем Морса–Смейла. Аксиома 1 исключает существование незамкнутой самопредельной (P -устойчивой) траектории в силу теоремы Биркгофа 7.2. Существование гомоклинических орбит запрещается приведенными ниже теоремами 7.9 и 7.11. Далее, из теоремы 7.12 нетрудно сделать вывод, что ω -предельное (α -предельное) множество любой траектории системы Морса–Смейла является состоянием равновесия или периодической орбитой.

Напомним, что состояние равновесия O ($x = x_0$) является грубым, если ни один из его характеристических показателей, т. е. корней характеристического уравнения

$$\det \left| \frac{\partial X(x_0)}{\partial x} - \lambda I \right| = 0, \quad (7.5.2)$$

не лежит на мнимой оси.

Каждому грубому состоянию равновесия приписывается топологический тип (m, p) , где m — число характеристических показателей в открытой левой полуплоскости, а p — в открытой правой полуплоскости. Следовательно, $m + p = n$. Если $m = n$ ($m = 0$), состояние равновесия является устойчивым (вполне неустойчивым). Состояние равновесия имеет седловой тип, когда $m \neq \{0, n\}$.

Множество всех точек в фазовом пространстве, траектории которых стремятся к O при $t \rightarrow +\infty$ ($-\infty$), называется устойчивым (неустойчивым) многообразием состояния равновесия и обозначается через W_O^s и W_O^u соответственно. Если O имеет тип (m, p) , то W_O^s — m -мерное $\mathbb{C}^r$ -многообразие, а W_O^u — p -мерное $\mathbb{C}^r$ -многообразие. В случае когда $m = n$, W_O^s является областью притяжения O .

Известно также, что W_O^s диффеоморфно $\mathbb{R}^m$ и что W_O^u диффеоморфно $\mathbb{R}^p$. В подходящей системе координат система вблизи седлового состояния равновесия записывается в виде

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A^- \xi + f(\xi, \eta), \\ \dot{\eta} &= A^+ \eta + g(\xi, \eta), \end{aligned}$$

где A^- — $m \times m$ -матрица, спектр которой лежит слева от мнимой оси, A^+ — $p \times p$ -матрица, спектр которой лежит справа от мнимой оси, функции f и g обращаются в нуль в состоянии равновесия O вместе с первыми

производными. В такой системе координат $W_{\text{loc}}^s(O)$ имеет уравнение

$$\eta = \varphi(\xi),$$

а $W_{\text{loc}}^u(O)$ —

$$\xi = \psi(\eta),$$

где φ и ψ — $\mathbb{C}^r$ -гладкие функции такие, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 0$ и $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = 0$.

Теперь предположим, что система (7.5.1) имеет периодическую траекторию L : $x = \vartheta(t)$ с периодом τ . Периодическая орбита L грубая, если ни один из ее $(n - 1)$ мультипликаторов не лежит на единичной окружности. Напомним, что мультипликаторы L являются собственными числами матрицы A линеаризованного отображения Пуанкаре в неподвижной точке, которой является точка пересечения L с секущей. Орбита L является устойчивой (вполне неустойчивой), если все ее мультипликаторы лежат внутри (вне) единичной окружности. При этом устойчивость периодической орбиты может пониматься как в смысле Ляпунова, так и в смысле экспоненциальной устойчивости. В случае когда некоторые мультипликаторы лежат внутри, а другие — вне единичной окружности, периодическая орбита относится к седловому типу.

Множество всех точек фазового пространства, траектории которых стремятся к L при $t \rightarrow +\infty$ ($-\infty$), называется устойчивым (неустойчивым) многообразием периодической орбиты. Их обозначают через W_L^s и W_L^u соответственно. В случае когда $m = n$, область притяжения L совпадает с W_L^s . В седловом случае W_L^s $(m + 1)$ -мерно, где m — число мультипликаторов внутри единичной окружности, а W_L^u $(p + 1)$ -мерно, где p — число мультипликаторов вне единичной окружности, $p = n - m - 1$. В трехмерном случае W_L^s и W_L^u гомеоморфны двумерным цилиндрам, если мультипликаторы положительны, или листам Мёбиуса, если мультипликаторы отрицательны, см. рис. 7.5.1. В общем случае они являются либо многомерными цилиндрами, диффеоморфными $\mathbb{R}^m \times \mathbb{S}^1$, либо многомерными многообразиями Мёбиуса.

Устойчивые инвариантные многообразия состояний равновесия и периодических орбит могут иметь общие точки с неустойчивыми многообразиями. Очевидно, если точка x_0 является такой общей точкой двух инвариантных многообразий, то траектория $x = \varphi(t, x_0)$ целиком принадлежит двум этим многообразиям. В простейшем случае $O = W_O^s \cap W_O^u$, т. е. устойчивые и неустойчивые многообразия положения равновесия пересекаются только по одной траектории, которой является само состояние равновесия.

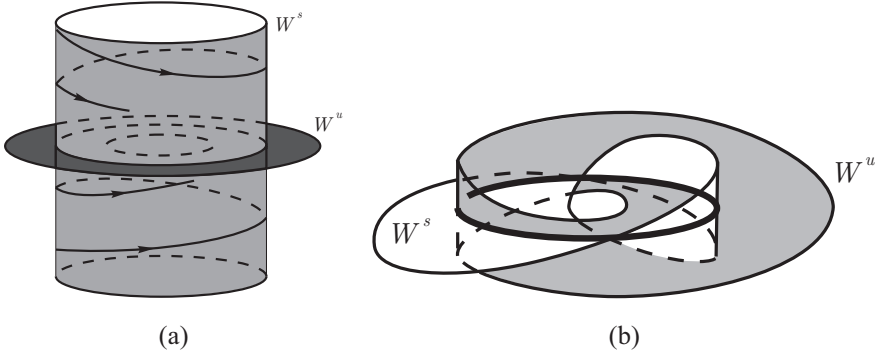


Рис. 7.5.1. Седловые периодические орбиты в $\mathbb{R}^3$ различаются топологией устойчивого и неустойчивого инвариантных множеств, которые могут быть гомеоморфны цилиндру (слева) или листу Мёбиуса (справа)

Аналогично для периодической орбиты L может быть $L = W_L^s \cap W_L^u$. Но это тривиальная ситуация, и мы не собираемся останавливать на ней наше внимание. Нас интересует случай, когда x_0 не является состоянием равновесия и не лежит на периодической орбите. Ниже мы будем рассматривать состояния равновесия и периодические орбиты единообразно и будем обозначать их через Q .

Пусть Q_1 и Q_2 — такие, что $W_{Q_1}^s$ и $W_{Q_2}^u$ имеют общую точку x_0 . Траектория такой точки x_0 называется *гетероклинической*, если Q_1 и Q_2 различны⁶, и *гомеклинической*, если $Q_1 = Q_2$.

Обозначим касательную к $W_{Q_1}^s$ в точке x_0 через $T_{x_0}W_{Q_1}^s$ и касательную к $W_{Q_2}^u$ в точке x_0 через $T_{x_0}W_{Q_2}^u$.

Определение 7.10. Мы будем говорить, что $T_{x_0}W_{Q_1}^s$ и $T_{x_0}W_{Q_2}^u$ пересекаются трансверсально, если

$$\dim T_{x_0}W_{Q_1}^s + \dim T_{x_0}W_{Q_2}^u - n = \dim(T_{x_0}W_{Q_1}^s \cap T_{x_0}W_{Q_2}^u). \quad (7.5.3)$$

⁶Рассмотрим пример системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\mu + x^2, \\ \dot{y} &= -y, \\ \dot{z} &= z, \end{aligned}$$

которая при $\mu > 0$ имеет два седловых состояния равновесия $O_1(-\sqrt{\mu}, 0, 0)$ и $O_2(+\sqrt{\mu}, 0, 0)$ топологических типов $(2,1)$ и $(1,2)$ соответственно. Инвариантные многообразия $W_{O_1}^s$ и $W_{O_2}^u$ пересекаются трансверсально вдоль гетероклинической кривой $(-\sqrt{\mu} < x < \sqrt{\mu}, y = 0, z = 0)$, как изображено на рис. 7.5.2.

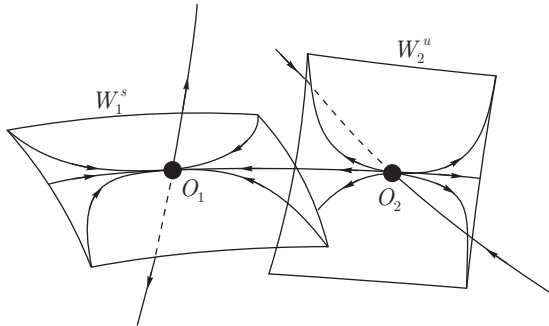


Рис. 7.5.2. Грубая гетероклиническая связка между двумя седлами в $\mathbb{R}^3$

Хорошо известно, что если две поверхности трансверсально пересекаются в одной точке, тогда любые две C^1 -близкие поверхности должны трансверсально пересекаться в близлежащей точке. Напротив, нетрансверсальное пересечение можно уничтожить (или сделать трансверсальным) малым возмущением.

По аксиоме 2 условие трансверсальности пересечения (7.5.3) выполнено для всех пересечений устойчивого и неустойчивого инвариантных множеств состояний равновесия и периодических орбит системы (7.5.1).

Заметим, что, несмотря на то что определение трансверсальности сформулировано в точке x_0 , условие (7.5.3) не зависит от выбора точки x_0 , потому что соответствующие касательные в x_0 и любой другой точке траектории, проходящей через x_0 , отображаются друг на друга посредством невырожденного линейного преобразования (линеаризации отображения, сдвинутого по времени вдоль траектории x_0).

Так как орбита точки пересечения x_0 полностью лежит в обоих инвариантных многообразиях, то и в $T_{x_0}W_{Q_1}^s$, и в $T_{x_0}W_{Q_2}^u$ лежит вектор фазовой скорости в точке x_0 , и отсюда

$$\dim(T_{x_0}W_{Q_1}^s \cap T_{x_0}W_{Q_2}^u) \geq 1.$$

Таким образом, из условия трансверсальности (7.5.3) следует, что в потоке Морса–Смейла возможны только те пересечения инвариантных многообразий, для которых

$$\dim W_{Q_1}^s + \dim W_{Q_2}^u \geq n + 1. \quad (7.5.4)$$

В частности, мы приходим к следующему простому выводу.

Теорема 7.9. *Системы Морса–Смейла не имеют гомоклинических траекторий к состоянию равновесия.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для состояния равновесия $\dim W_O^s + \dim W_O^u = n$, что противоречит (7.5.4). ■

Понятие диффеоморфизма Морса–Смейла вводится аналогично. Рассмотрим диффеоморфизм

$$\bar{x} = X(x), \quad (7.5.5)$$

где $X(x) \in \mathbb{C}^r$ ($r \geq 1$) в некоторой ограниченной, замкнутой подобласти $G \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, что неблуждающее множество не имеет пересечений с границей ∂G .

Определение 7.11. Диффеоморфизм (7.5.5) в области G называется диффеоморфизмом Морса–Смейла, если

- (1) его неблуждающее множество конечно (и состоит только из грубых периодических орбит) и
- (2) для пересечений устойчивых и неустойчивых множеств любых периодических орбит соблюдается условие трансверсальности (7.5.3).

Напомним, что неподвижная точка $O(x = x_0)$ называется грубой, если ни один из ее характеристических показателей, т. е. корней характеристического уравнения (7.5.2), не лежит на единичной окружности. Для нее вводится топологический тип (m, p) , где m — количество корней внутри единичной окружности и p — вне единичной окружности. Если $m = n$ ($m = 0$), то неподвижная точка является устойчивой (вполне неустойчивой). Неподвижная точка относится к седловому типу, когда $m \neq \{0, n\}$. Множество всех точек, траектории которых стремятся к x_0 при положительных (отрицательных) итерациях, называется устойчивым (неустойчивым) многообразием неподвижной точки и обозначается через W_O^s (W_O^u). В случае когда $m = n$, областью притяжения O является W_O^s . Если неподвижная точка седловая, многообразия W_O^s и W_O^u являются $\mathbb{C}^r$ -гладкими вложениями $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^p$ в $\mathbb{R}^n$ соответственно.

В седловом случае диффеоморфизм может быть представлен локально в виде

$$\bar{\xi} = A^-\xi + f(\xi, \eta),$$

$$\bar{\eta} = A^+\eta + g(\xi, \eta),$$

где собственные числа A^- лежат внутри единичной окружности, а собственные числа A^+ лежат вне единичной окружности, функции f и g обращаются в нуль в O вместе с первыми производными. Тогда уравнение $W_{\text{loc}}^s(O)$ имеет вид

$$\eta = \varphi(\xi),$$

а уравнение $W_{\text{loc}}^u(O)$ —

$$\xi = \psi(\eta),$$

где φ и ψ являются $\mathbb{C}^r$ -гладкими функциями, такими что $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 0$ и $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = 0$.

Пусть x_0 — периодическая точка с периодом q для диффеоморфизма (7.5.5). Это означает, что она является неподвижной точкой q -й степени диффеоморфизма

$$x_0 = X^{[q]}(x_0) \equiv \underbrace{X(X \dots (X(x_0)))}_{q \text{ раз}}.$$

Естественно соотнести точку x_0 и ее цикл $C = (x_0, x_1, \dots, x_{q-1})$, где $x_k = X(x_{k-1})$, $k = 1, \dots, q-1$, $x_0 = X(x_{q-1})$. Точка x_0 грубая, если корни $\rho_1, \dots, \rho_n$ уравнения

$$\det \left| \frac{\partial X(x_{q-1})}{\partial x} \frac{\partial X(x_{q-2})}{\partial x} \dots \frac{\partial X(x_0)}{\partial x} - \rho I \right| = 0$$

не лежат на единичной окружности. Заметим, что характеристические корни любой точки цикла C совпадают с корнями для точки x_0 . Устойчивое (неустойчивое) инвариантное многообразие $W_{x_k}^s$ ($W_{x_k}^u$) точки x_k — это множество точек, которые стремятся к x_k при положительных итерациях диффеоморфизма $X^{[q]}$. Очевидно, $X(W_{x_k}^s) = W_{x_{k+1}}^s$ и $X(W_{x_k}^u) = W_{x_{k+1}}^u$. Таким образом, устойчивым многообразием цикла C является $\bigcup_{i=0}^{q-1} W_{x_i}^s$, а неустойчивым многообразием — $\bigcup_{i=0}^{q-1} W_{x_i}^u$.

Как непрерывные, так и дискретные системы Морса–Смейла на компактной гладкой поверхности были выделены Смейлом в его статье «Неравенства Морса для динамических систем» [142]. Само название показывает, что работа касается оценки количества состояний равновесия и периодических орбит посредством топологических инвариантов многообразий. Позднее Пэлис и Смейл [106, 102] доказали следующую теорему.

Теорема 7.10 (Пэлис, Смейл). *Системы Морса–Смейла являются структурно устойчивыми.*

Эта теорема доказана для систем, фазовое пространство которых представляет собой компактное, гладкое многообразие. Она также имеет силу и для нашего случая, если предположить, что граница ∂G является гладкой $(n-1)$ -сферой без контакта, через которую траектория проходит внутрь G в непрерывном случае, или что $X(G) \subset G \setminus \partial G$ в дискретном случае.

7.6. Некоторые свойства систем Морса–Смейла

Сравнивая теорему Андронова–Понтрягина с определением систем Морса–Смейла, можно увидеть, что последние полностью аналогичны грубым системам на плоскости и являются, в сущности, их многомерным обобщением. Как и из теоремы Андронова–Понтрягина, из теоремы Пэлиса–Смейла 7.10 можно вывести достаточные условия грубости. Аксиома 2 в определении 7.9 может рассматриваться как естественное необходимое условие. В отличие от нее, аксиома 1 не имеет отношения к проблеме структурной устойчивости, но она сильно ограничивает класс рассматриваемых систем и отсекает многие скрытые возможности, связанные с седловыми равновесиями и периодическими орбитами в размерностях выше двух.

Например, следующая теорема показывает, что в системах Морса–Смейла нет гомоклинических траекторий к седловым периодическим орбитам.

Теорема 7.11. *Пусть L — седловая периодическая орбита, и пусть Γ — гомоклиническая траектория к ней, вдоль которой трансверсально пересекаются W_L^s и W_L^u . Тогда любая малая окрестность $L \cup \Gamma$ содержит бесконечное множество седловых периодических орбит.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем малую секущую S к L и рассмотрим локальное отображение Пуанкаре $T_0 : S \rightarrow S$. Точка $O = S \cap L$ является седловой неподвижной точкой отображения T_0 . Введем такие координаты (x, y) на S вблизи O , что локальным неустойчивым многообразием O будет $x = 0$, а локальным устойчивым многообразием — $y = 0$ (таким образом, $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$, где $\dim W^s = m$, $\dim W^u = p$). Пусть $M^-(0, y^-) \in W_{\text{loc}}^u$ и $M^+(x^+, 0) \in W_{\text{loc}}^s$ — две точки пересечения гомоклинической орбиты Γ с S . Поток вблизи отрезка Γ между M^- и M^+ задает отображение T_1 малой окрестности Π^- точки M^- на малую окрестность Π^+ точки M^+ в S . Это отображение может быть записано в виде:

$$\begin{aligned}\bar{x}^0 - x^+ &= ax^1 + b(y^1 - y^-) + \dots, \\ \bar{y}^0 &= cx^1 + d(y^1 - y^-) + \dots,\end{aligned}\tag{7.6.1}$$

где многоточия обозначают нелинейные члены; (x^0, y^0) относятся к малой окрестности M^+ , а (x^1, y^1) относятся к малой окрестности M^- . Заметим, что образ $T_1 W_{\text{loc}}^u$ касается в M^+ p -мерной плоскости, заданной параметрическим уравнением

$$x^0 - x^+ = bu, \quad y^0 = du,$$

где $u \in \mathbb{R}^p$. По условию, эта гиперплоскость должна быть трансверсальна $y = 0$, а это значит, что

$$|d| \neq 0. \quad (7.6.2)$$

В параграфе 3.7 было доказано, что для любого достаточно большого k в Π^+ существуют точки, k -я итерация которых под действием локального отображения T_0 лежит в Π^- . Множество таких точек образует «горизонтальную полосу» σ_k^0 . При $k \rightarrow \infty$ горизонтальные полосы накапливаются к $W_{\text{loc}}^s \cap \Pi^+$. Отображение T_0^k сжимает полосу в x -направлении и растягивает ее в y -направлении, так что образы $T_0^k \sigma_k^0$ («вертикальные полосы») накапливаются к $W_{\text{loc}}^u \cap \Pi^-$. Геометрически очевидно (см. рис. 7.5.3), что вследствие трансверсальности $T_1 W_{\text{loc}}^u$ к W_{loc}^s образ $T_1 T_0^k \sigma_k^0$ пересекает σ_k^0 «правильно» для любого достаточно большого k , так что отображение $T_1 T_0^k|_{\sigma_k^0}$ является *седловым отображением* в смысле параграфа 3.15. По теореме 3.28 седловое отображение имеет седловую неподвижную точку. Поскольку как отображение T_1 , так и отображение T_0 задаются орбитами потока, неподвижная точка $T_1 T_0^k$ соответствует периодической орбите системы (она пересекает S точно k раз, первый раз в Π^+ и последний раз в Π^-). Выбирая различные k , мы получим различные периодические орбиты. Соответственно, чтобы доказать теорему, мы должны показать, что отображения $T_1 T_0^k$ действительно имеют седловой тип при всех достаточно больших k .

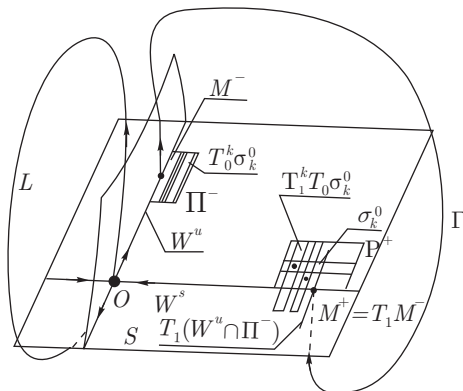


Рис. 7.5.3. Отображение Пуанкаре вблизи трансверсальной гомоклинической орбиты

В соответствии с леммами 3.3 и 3.4 существуют такие функции ξ_k, η_k , которые равномерно стремятся к нулю вместе с их производными при $k \rightarrow \infty$, такие что точка $M^0(x^0, y^0)$ отображается в точку $M^1(x^1, y^1)$ под действием T_0^k тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} x^1 &= \xi_k(x^0, y^1), \\ y^0 &= \eta_k(x^0, y^1). \end{aligned} \quad (7.6.3)$$

Заметим, что, в силу (7.6.2) при достаточно малых x^1 и $\bar{y}^0$ второе уравнение в (7.6.1) может быть разрешено относительно y^1 :

$$y^1 - y^- = d^{-1}\bar{y}^0 - d^{-1}cx^1 + \dots,$$

где многоточия обозначают нелинейные члены. Сравнивая это с первым уравнением в (7.6.3), для достаточно больших k получаем

$$y^1 = y^- + F_k(\bar{y}^0, x^0), \quad (7.6.4)$$

где F_k — гладкая функция, такая что $F_k(0, 0) = 0$ и производные F_k по x^0 равномерно стремятся к нулю при $k \rightarrow \infty$ (мы используем то, что $\frac{\partial \xi_k}{\partial(x, y)} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$).

Таким образом, при всех достаточно больших k отображение $T_1 T_0^k$ может быть записано как

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x^+ + G_k(\bar{y}, x), \\ y &= \eta_k(x, y^- + F_k(\bar{y}, x)), \end{aligned} \quad (7.6.5)$$

где мы убираем верхний индекс 0; здесь G_k — гладкая функция, такая что $G_k(0, 0) = 0$ и производные G_k по x равномерно стремятся к нулю при $k \rightarrow \infty$. Это *перекрестный вид* отображения $T_1 T_0^k$ в смысле параграфа 3.15 (пространства D_1 и D_2 из определения 3.6 — это малые выпуклые окрестности x^+ в x -пространстве и нуля в y -пространстве соответственно). Поскольку производные от η_k по всем переменным и производная от G_k по x равномерно стремятся к нулю при $k \rightarrow \infty$, можно легко видеть, что отображение $T_1 T_0^k$ при всех достаточно больших k удовлетворяет определению 3.7 седлового отображения; таким образом, здесь применима теорема 3.28 о неподвижной точке⁷. Это завершает доказательство. ■

⁷Условия, которые надо проверять, это —

$$\begin{aligned} \|P'_x\|_\circ &< 1, \quad \|Q'_y\|_\circ < 1, \\ \|P'_y\|_\circ \|Q'_x\|_\circ &< (1 - \|P'_x\|_\circ)(1 - \|Q'_y\|_\circ), \end{aligned}$$

Данное доказательство легко переводится на язык диффеоморфизмов с неподвижной точкой, имеющей гомоклиническую траекторию. Оно также распространяется и на случай периодической точки с гомоклинической траекторией. В последнем случае следует рассматривать q -ю итерацию исходного диффеоморфизма, где q — период.

По существу, вышеприведенное доказательство очень близко к предложенному Л. Шильниковым [131]. Результат позволяет избавиться от изначально постулированной Смейлом аксиомы, оговаривающей в качестве особого условия отсутствие в системах Морса–Смейла гомоклинических траекторий.

Заметим, что трансверсальная гомоклиническая орбита, очевидно, сохраняется при малых гладких возмущениях системы. Следовательно, из теоремы 7.11 следует, что, если существует трансверсальная гомоклиника, то любая близкая система не относится к классу систем Морса–Смейла. Это дает нам простой и грубый признак для обнаружения сложной динамики. В настоящее время наличие трансверсальных гомоклиник считается универсальным критерием хаоса.

Для единообразия мы по-прежнему будем рассматривать состояния равновесия и периодические орбиты как одинаковые объекты и обозначать их через Q .

Введем следующее обозначение: мы пишем $Q_i \leq Q_j$, если $W_{Q_i}^s \cap W_{Q_j}^u \neq \emptyset$, в частности, $Q_i \leq Q_i$. Если $(W_{Q_i}^s \setminus Q_i) \cap (W_{Q_j}^u \setminus Q_j) \neq \emptyset$, то будем писать $Q_i < Q_j$. Будем говорить, что $Q_{k_1}, \dots, Q_{k_l}$ образует цепь, если

$$Q_{k_1} < \dots < Q_{k_l}. \quad (7.6.6)$$

Если первый и последний члены цепи равны ($Q_{k_1} = Q_{k_l}$), тогда цепь (7.6.6) называется циклом.

Можно показать, что отношение « $\leq$ » задает частичный порядок на множестве неблуждающих орбит системы Морса–Смейла. Важный результат дается следующей теоремой.

Теорема 7.12. *В системах Морса–Смейла нет циклов.*

Прежде всего заметим, что в них не могут существовать такие циклы, как $Q_0 < Q_0$, потому что в системах Морса–Смейла невозможны

где (P, Q) — правые части перекрестного отображения

$$\bar{x} = P(x, \bar{y}), \quad y = Q(x, \bar{y}).$$

По существу, эти условия означают, что в соответствующей норме перекрестное отображение сжимающее, следовательно, само отображение является сильно растягивающим в y -направлении и сильно сжимающим в x -направлении.

гомоклинические траектории. Кроме того, из условия трансверсальности [см. (7.5.4)] следует, что цикл не может содержать состояния равновесия, и он не может включать периодические орбиты различных топологических типов.

Таким образом, остается только одна гипотеза, а именно, когда цикл

$$L_0 < L_1 < \dots < L_k < L_0$$

состоит из периодических орбит одинакового топологического типа. Рассмотрим цепь

$$L_{k-1} < L_k < L_0,$$

и пусть $W_{L_{k-1}}^s$ пересекает $W_{L_k}^u$ в точке x_0 . В силу λ -леммы (см. параграф 3.7) мы можем утверждать, что, так как $W_{L_k}^s$ пересекает $W_{L_0}^u$ трансверсально, в любой малой окрестности U точки x_0 существует счетное множество гладких кусков $W_{L_0}^u$, сходящихся к $W_{L_k}^u \cap U$. Так как $W_{L_{k-1}}^s$ пересекает $W_{L_k}^u$ трансверсально, то $W_{L_{k-1}}^s$ пересекает эти отрезки $W_{L_0}^u$. Таким образом:

$$L_{k-1} < L_0.$$

Индуктивно продолжив, мы получим

$$L_0 < L_1 < L_0,$$

и отсюда

$$L_0 < L_0,$$

т. е. L_0 содержит гомоклиническую траекторию. Это противоречит теореме 7.11. ■

Из того факта, что в системах Морса–Смейла имеется только конечное число неблуждающих траекторий, следует, что любая цепь имеет конечную длину, которая не превышает общего числа неблуждающих траекторий. Более того, максимальная цепь может заканчиваться только на устойчивом состоянии равновесия или устойчивой периодической орбите.

Из приведенных выше аргументов следует, что для каждой системы Морса–Смейла можно ввести ориентированный граф. Его вершинами являются состояния равновесия и периодические орбиты, для которых указан их топологический тип. Ребра графа ориентированы в убывающем порядке в соответствии с порядком $<$. А именно вершина Q_i соединяется ребром с вершиной Q_j тогда и только тогда, когда $Q_i > Q_j$, и не существует таких Q_k , что $Q_i > Q_k > Q_j$. Подобный градуированный граф называется фазовой диаграммой. Фазовую диаграмму для диффеоморфизма Морса–Смейла можно ввести аналогичным образом. Вершинами являются точки и циклы с указанными локальными характеристиками.

Понятно, что фазовая диаграмма является инвариантом топологической эквивалентности систем Морса–Смейла. Однако, вообще говоря, это не полный инвариант. Например, он не содержит информации о количестве гетероклинических пересечений устойчивых и неустойчивых многообразий седловых траекторий.

Среди всех гетероклинических траекторий выделяются особые траектории, которые играют главную роль.

Определение 7.12. Гетероклиническая траектория Γ называется особой, если имеется окрестность U ее замыкания $\bar{\Gamma}$, которая не содержит других гетероклинических траекторий, кроме Γ .

Очевидно, что все гетероклинические траектории трехмерных потоков Морса–Смейла являются такими особыми траекториями. Это также верно для двумерных диффеоморфизмов.

Основным свойством систем Морса–Смейла, которое отличает их от систем Андронова–Понтрягина, является то, что первые могут содержать бесконечно много особых гетероклинических траекторий. В качестве примера рассмотрим двумерный диффеоморфизм с тремя неподвижными точками седлового типа, O_1 , O и O_2 . Предположим, что $W_{O_1}^s \cap W_O^u \neq \emptyset$ и $W_O^s \cap W_{O_2}^u \neq \emptyset$; соответствующая схема изображена на рис. 7.6.1. Здесь $M_1 \in W_{O_1}^s \cap W_O^u$ и $M_2 \in W_O^s \cap W_{O_2}^u$, т. е. они являются гетероклиническими точками.

Теперь применим λ -лемму (см. параграф 3.7). Выберем малую окрестность U точки M_1 . Из леммы следует, что пересечение $U \cap W_{O_2}^u$ состоит из счетного множества кривых l_k ($k = 1, \dots, \infty$), гладко накапливающихся к W_O^u , как показано на рис. 7.6.2. Так как $W_{O_1}^s$ и W_O^u пересекаются трансверсально, то $W_{O_1}^s$ пересекает каждую l_k в точках M_k , начиная с некоторого k_0 . Точки M_k также являются гетероклиническими и соответствуют различным гетероклиническим траекториям, для которых в качестве α -предельных и ω -предельных точек выступают соответственно O_1 и O_2 .

Аналогичная картина имеет место в случае трехмерных потоков, содержащих цепь $Q_1 < Q < Q_2$, где Q обозначает седловую периодическую орбиту, а Q_1 и Q_2 обозначают либо седловые состояния равновесия, либо периодические орбиты.

В многомерном случае уже не все гетероклинические траектории являются особыми. Гетероклиническая траектория $\Gamma \subset W_{Q_1}^s \cap W_{Q_2}^u$ будет особой, только если размерность соответствующего пересечения равна 1. Мы припишем Γ тип $(\dim W_{Q_1}^s, \dim W_{Q_2}^u)$. Очевидно, что если $\dim W_{Q_1}^s = m + 1$, то тип особой траектории $\Gamma - (m + 1, n - m)$, где n — размерность фазового пространства.

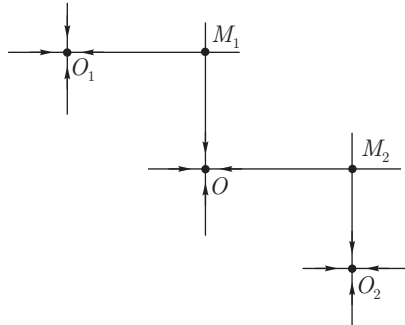
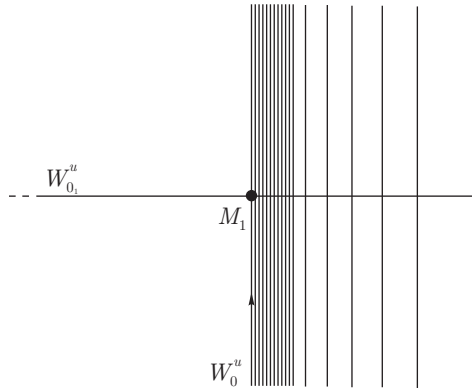


Рис. 7.6.1. Иерархия пересечений многообразий неподвижных точек

Рис. 7.6.2. Окрестность точки M_1 : последовательные образы $W_{0_2}^u$ накапливаются к W_0^u (рис. 7.6.1)

Рассмотрим поток Морса–Смейла, имеющий два неблуждающих движения Q_1 и Q_2 . Пусть $\dim W_{Q_1}^s = m + 1$ и $\dim W_{Q_2}^u = n - m$. Далее предположим, что $W_{Q_1}^s \cap W_{Q_2}^u \neq \emptyset$, т.е. $Q_1 \leq Q_2$.

Теорема 7.13 (Афраймович и Шильников [2]). *Пересечение $W_{Q_1}^s \cap W_{Q_2}^u$ содержит бесконечно много гетероклинических траекторий тогда и только тогда, когда замыкание $\overline{W_{Q_1}^s \cap W_{Q_2}^u}$ содержит периодическую орбиту L типа $(m + 1, n - m)$, отличную от Q_1 и Q_2 .*

Из доказательства этой теоремы следует, что W_L^u должно пересекать $W_{Q_1}^s$ трансверсально и W_L^s должно пересекать $W_{Q_2}^u$ трансверсально. Заметим также, что все траектории в $W_{Q_1}^s \cap W_{Q_2}^u$ являются особыми.

Аналогическое утверждение верно для диффеоморфизмов Морса–Смейла.

Обозначим через N_{m+1} множество всех особых траекторий типа $(m+1, n-m)$ и их предельных неблуждающих точек. В общем случае N_{m+1} состоит из конечного числа связных компонент $N_{m+1}^{(1)}, \dots, N_{m+1}^{(k)}$. В [2] также было доказано, что множество всех траекторий $N_{m+1}^{(l)}$, где $1 \leq l \leq k$, находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством всех траекторий некоторой символической системы с конечным числом состояний. Вообще говоря, символическая динамика исторически была создана в связи с описанием систем со сложной динамикой. Тем не менее оказалось, что ее также можно эффективно применять в системах Морса–Смейла со счетным множеством особых гетероклинических траекторий.

ГЛАВА 8

Бифуркации динамических систем

Под бифуркацией динамической системы понимается качественное изменение разбиения фазового пространства на траектории, т. е. модификация качественных свойств фазового портрета, при изменении параметров системы. Понятие «бифуркации» было введено Пуанкаре при изучении фигур равновесия вращающейся жидкости, которые меняют эллипсоидальную форму на форму, близкую к грушевидной. В то же время Пуанкаре исследовал основные бифуркации состояний равновесия лагранжевых консервативных систем с одной степенью свободы. Он отметил, что изменения параметров могут вызвать появление кратного состояния равновесия, сопровождаемое последующим разветвлением на два равновесия: центр и седло. Следовательно, в данном случае слово бифуркация означает именно раздвоение.

Современная теория бифуркаций динамических систем основана на понятии негрубости или структурной неустойчивости системы. Ее мотивацией служит то, что анализ системы не будет достаточно полным, если ограничить исследование только областями структурной устойчивости. Действительно, меняя параметры, мы можем переходить от одной структурно устойчивой системы к другой, качественно отличной, системе, при этом мы пересекаем некоторые границы в пространстве параметров, которые соответствуют негрубым системам.

В двумерном случае грубые системы составляют открытое и плотное множество в пространстве всех систем на плоскости. Негрубые системы заполняют границы между различными областями структурной устойчивости в этом пространстве. Такая хорошая структура делает возможным математическое описание трансформаций различных колебательных режимов при помощи теории бифуркаций двумерных систем. Хотя пространство многомерных систем организовано не столь правильно, теория бифуркаций многомерных систем также предоставляет адекватное математическое объяснение таким типичным явлениям нелинейной динамики, как переходы между устойчивыми режимами и автоколебаниями, синхронизация и ее разрушение, различные пути к динамическому хаосу и т. д.

В этой книге мы сосредоточимся на всестороннем изучении состояний равновесия и периодических движений, потому что они являются фундаментальными «кирпичиками» нелинейной динамики. Полное исследование двумерных систем читатель может найти в двухтомнике Андронова и др. [11, 12]. В этой книге классификация Андронова и Леонтович основных бифуркаций периодических орбит основана на созданной ими теории двумерных систем первой степени негрубости.

8.1. Системы первой степени негрубости

Мы уже определили следующие ключевые элементы любой структурно устойчивой динамической системы на плоскости, которые определяют ее полный топологический инвариант — схему. Они включают особые траектории:

- ☐ грубые состояния равновесия;
- ☐ грубые периодические орбиты и
- ☐ сепаратрисы седел.

Когда система становится негрубой, должна произойти модификация фазового портрета системы. По теореме Андронова–Понтрягина негрубая система непременно должна иметь или

- состояние равновесия, у которого есть один нулевой характеристический показатель или два характеристических показателя на мнимой оси, или
- периодическую орбиту с единичным мультипликатором, или
- сепаратрису, соединяющую две седловые точки, или
- петлю сепаратрисы к седлу.

Заметим, что состояние равновесия или периодическая орбита может быть сколь угодно вырожденной. Следовательно, логично начинать изучение с простейших структурно неустойчивых систем, которые Андронов и Леонтович назвали *системами первой степени негрубости*.

Пусть X и $\tilde{X}$ — некоторые C^r -гладкие ($r \geq 3$) системы в ограниченной области G на плоскости. В качестве расстояния между X и $\tilde{X}$ возьмем C^r -метрику.

Определение 8.1. Система X называется системой первой степени негрубости, если она не является структурно устойчивой и если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любая негрубая система из δ -окрестности X ε -эквивалентна X^1 .

По существу, системы первой степени негрубости являются структурно устойчивыми в множестве негрубых систем.

Проведенный Андроновым и Леонтович анализ показал, что системы первой степени негрубости должны иметь одну из следующих негрубых траекторий.

(1) Состояние равновесия $O(0, 0)$ с одним нулевым характеристическим показателем и с ненулевым коэффициентом ряда Тейлора l_2 , называемым ляпуновской величиной. Ляпуновскую величину легко можно найти из соответствующей нормальной формы

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y), \\ \dot{y} &= \lambda y + Q(x, y),\end{aligned}\tag{8.1.1}$$

где $\lambda \neq 0$, а P и Q обращаются в нуль в $O(0, 0)$ одновременно с их первыми производными. В этом случае l_2 является коэффициентом при x^2 разложения Тейлора $P(x, y)$. Рассматриваемое состояние равновесия называется (*простым*) *седло-узлом*. Отметим, что все простые седло-узлы локально эквивалентны седло-узлам системы

$$\begin{aligned}\dot{x} &= l_2 x^2, \\ \dot{y} &= \lambda y,\end{aligned}\tag{8.1.2}$$

где $l_2 > 0$. Поведение траекторий системы около $O(0, 0)$ легко описать. Пусть, например, $\lambda < 0$. Тогда существует кривая — сильно устойчивое многообразие W^{ss} , — которая отделяет узловую область W^s от седловой области, как показано на рис. 8.1.1. Сильно устойчивое многообразие состоит из O и двух траекторий, входящих в O при $t \rightarrow +\infty$. Траектории из W^s стремятся к O . В седловой области существует единственная траектория, которая стремится к O при $t \rightarrow -\infty$. Эта траектория называется *сепаратрисой*. Другие траектории проходят мимо O .

Если $\lambda > 0$, существует сильно неустойчивое многообразие W^{uu} , которое делит окрестность O на узловую область W^u , где все траектории уходят от O , и седловую область, где существует единственная устойчивая сепаратриса, входящая в O при $t \rightarrow +\infty$, а другие траектории проходят мимо O .

¹Т.е. топологически эквивалентна, а сопряженный гомеоморфизм ε -близок к тождественному.

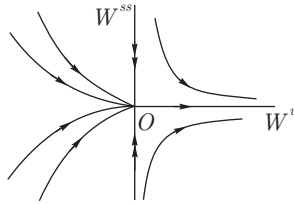


Рис. 8.1.1. Седло-узел, соответствующий случаю $\lambda < 0$, $l_2 > 0$

(2) Состояние равновесия, у которого есть пара чисто мнимых характеристических чисел $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ и ляпуновская (или фокусная) величина $L_1 \neq 0$. Возле бифурцирующего состояния равновесия систему можно представить в виде

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\omega y + (L_1 x - \Omega_1 y)(x^2 + y^2) + \dots, \\ \dot{y} &= \omega x + (\Omega_1 x + L_1 y)(x^2 + y^2) + \dots\end{aligned}\quad (8.1.3)$$

Приведение к такому виду возможно, потому что в данном случае все квадратичные и кубические члены, отличные от выписанных, являются нерезонансными; простейшими резонансными зависимостями здесь будут два резонанса третьей степени

$$\lambda_1 = 2\lambda_1 + \lambda_2,$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 + 2\lambda_2$$

(см. параграф 2.9 и 9.3).

Такое состояние равновесия называется слабым фокусом. Он устойчив, если $L_1 < 0$, и неустойчив, если $L_1 > 0$.

(3) Периодическая орбита с действительным мультипликатором, равным $+1$. Соответствующее отображение Пуанкаре можно представить в виде

$$\bar{u} = u + l_2 u^2 + \dots$$

Если при этом ляпуновская величина $l_2 \neq 0$, то кратная неподвижная точка соответствует кратному (полуустойчивому) предельному циклу исходной системы.

(4) Гетероклиническая траектория Γ , соединяющая два седла [см. рис. 7.1.1 (а)].

(5) Двоякоасимптотическая траектория Γ к седлу. В простейшем случае седло является нерезонансным, т. е. его характеристические показатели удовлетворяют условию

$$\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0.$$

Кроме того, системы первой степени негрубости должны удовлетворять следующим условиям:

- (А) не существует других траекторий вышеприведенных типов;
- (В) не существует сепаратрисы седло-узла, исходящей из или входящей в седло, как показано на рис. 8.1.2;
- (С) не существует сепаратрисы седло-узла, которая принадлежит его сильно устойчивому многообразию, как показано на рис. 8.1.3;
- (D) если существует полуустойчивый (двойной) предельный цикл, то система не может одновременно иметь неустойчивую сепаратрису седла, которая стремится к циклу при $t \rightarrow +\infty$, и устойчивую сепаратрису седла, которая стремится к циклу при $t \rightarrow -\infty$, как показано на рис. 8.1.4; и
- (Е) не существует сепаратрисы, которая стремится к гомоклинической петле седла (вперед или назад во времени), как изображено на рис. 8.1.5.

В совокупности вышеприведенные требования составляют список необходимых и достаточных условий, которым должна удовлетворять система первой степени негрубости.

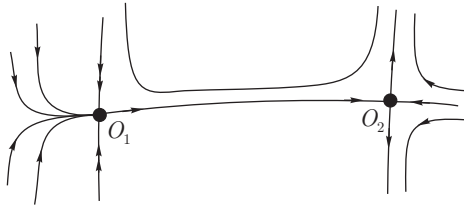


Рис. 8.1.2. Негрубая гетероклиническая связь между седло-узлом O_1 и седлом O_2

Структурно устойчивые системы выделяются в банаховом пространстве $\mathcal{B}_G$ динамических систем на плоскости при помощи условий типа неравенств (см. теорему Андронова–Понтрягина). Системы же первой степени негрубости выделяются не только условиями типа неравенств, но также и еще одним дополнительным условием типа равенства. В частности, пять условий структурной устойчивости из приведенного выше списка схематически принимают следующий вид:

- (1) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $l_2 \neq 0$;
- (2) $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} = 0$, $\omega \neq 0$, $L_1 \neq 0$;

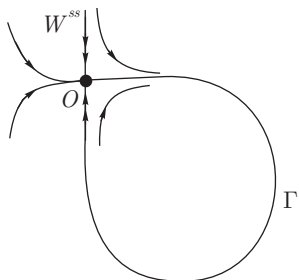


Рис. 8.1.3. Нетрансверсальная гомоклиническая петля Γ к седло-узлу. Сепаратриса входит в состояние равновесия вдоль его сильно устойчивого множества

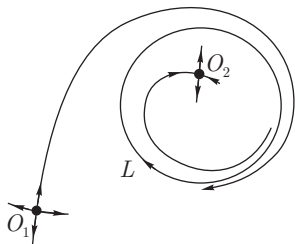


Рис. 8.1.4. Полуустойчивая периодическая орбита L является ω -предельной для сепаратрисы внешнего седла O_1 и α -предельной для сепаратрисы внутреннего седла O_2

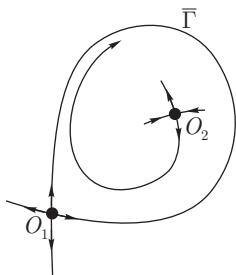


Рис. 8.1.5. Петля сепаратрисы седла O_1 является ω -предельной для сепаратрисы другого седла во внутренней области

- (3) $\rho = 1$, $l_2 \neq 0$;
- (4) $\Gamma_1 = \Gamma_2$, где Γ_1 и Γ_2 обозначают соответственно входящую и исходящую сепаратрису двух связанных седел; и
- (5) $\Gamma_1 = \Gamma_2$, $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$, где Γ_1 и Γ_2 обозначают входящую и исходящую сепаратрису одного седла.

Условия типа равенства можно понимать как условия зануления некоторых функционалов, заданных в окрестности негрубой системы. Условия типа неравенств гарантируют, в частности, что нулевой уровень функционала задает гладкую бесконечномерную поверхность $\mathcal{B}^1$ в банаховом пространстве, которая разделяет окрестность рассматриваемой системы на две области, которые мы обозначим как D^+ и D^- . Чтобы не говорить, что эта поверхность имеет размерность, равную $\infty - 1$, мы просто говорим, что она коразмерности 1. Отличительной чертой систем первой степени негрубости является то, что области D^+ и D^- состоят из грубых систем. В каждой области все системы имеют одинаковую схему, следовательно, они топологически эквивалентны по теореме Леонтович–Майера.

Таким образом, чтобы изучить переход от D^- к D^+ , достаточно исследовать однопараметрическое семейство систем X_μ , для которого $X_{\mu < 0} \in D^-$, $X_{\mu=0} \in \mathcal{B}^1$ и $X_{\mu > 0} \in D^+$. Кроме того, так как все качественные изменения фазового портрета происходят в малой окрестности некоторой негрубой особой траектории, мы можем ограничиться рассмотрением только данной окрестности.

Среди всех бифуркаций в системах первой степени негрубости особенно интересны бифуркации предельных циклов. Андронов и Леонтович доказали, что существует четыре такие бифуркации, а именно

- бифуркация предельного цикла от слабого фокуса;
- бифуркация двойного (или полустойчивого) цикла;
- бифуркация предельного цикла от петли сепаратрисы седла и
- бифуркация предельного цикла от петли сепаратрисы седло-узла.

В последнем параграфе этой книги мы детально рассмотрим эти бифуркации, подробный анализ которых около 20 лет являлся темой многочисленных научно-исследовательских работ; он был начат Андроновым в 30-е годы и закончен, после ряда исчерпывающих публикаций, в 50-е годы.

Чтобы подвести итоги этого параграфа, обсудим ограничения (D) и (E). В случае (E) поверхность, соответствующая двойному циклу, имеет коразмерность 1, и, следовательно, она делит окрестность негрубой системы X_0

на две области: D^- и D^+ . Пусть в D^- двойной предельный цикл распадается на два предельных цикла, и в D^+ он исчезает. Ситуация в D^- проста — все системы в ней структурно устойчивы и, более того, одного типа. Для D^+ ситуация менее тривиальная: если условие (D) нарушено, то очевидно, что в D^+ кроме структурно устойчивых систем имеются и структурно неустойчивые, чья негрубость вызвана существованием гетероклинической траектории между двумя седлами, как показано на рис. 8.1.6 (a). Более того, такая картина может иметь место в любой окрестности X_0 . Другими словами, в области D^+ лежит счетное множество соответствующих бифуркационных поверхностей коразмерности 1, которые накапливаются к B^1 . В таких случаях поверхность B^1 называется *недостижимой* с одной стороны.

Аналогичная ситуация возникает, когда система имеет петлю сепаратрисы, которая является ω -предельной для сепаратрисы другого седла (см. условие (E) и рис. 8.1.5). В этом случае бифуркационная поверхность также недостижима с одной стороны, где близкая негрубая система может иметь гетероклиническую связь, как показано на рис. 8.1.6 (b).

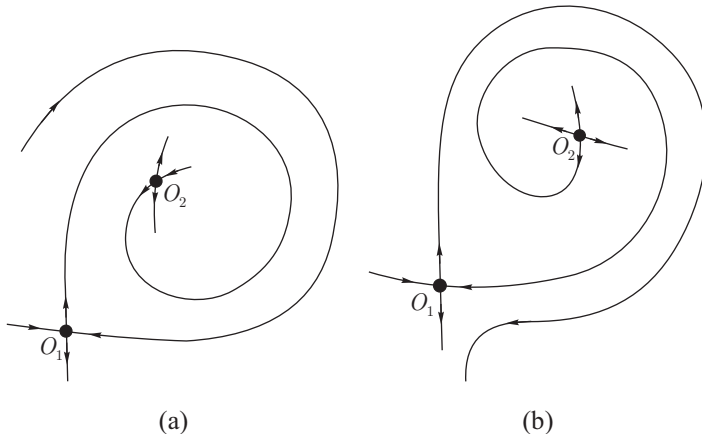


Рис. 8.1.6. (a) Негрубая гетероклиническая связь после исчезновения полуустойчивого цикла на рис. 8.1.4. (b) Фазовая плоскость после расщепления гомоклинической петли на рис. 8.1.5

Случаи, когда бифуркационная поверхность коразмерности 1 недостижима с одной или двух сторон, типичны для многомерных динамических систем. Именно поэтому классификация основных бифуркаций в многомерных системах основана не на степени негрубости — вместо этого в ней сделан акцент на бифуркационных множествах коразмерности 1.

8.2. Замечания, касающиеся бифуркаций многомерных систем

Исследования бифуркаций систем более высоких размерностей, начатые в конце пятидесятых — начале 60-х годов, состоят из ранних попыток распространения известных результатов о бифуркациях на плоскости на системы более высоких размерностей. Отсутствие необходимых и достаточных условий структурной устойчивости многомерных систем сыграло в то время не последнюю роль. Дальнейшее развитие теории многомерных систем в конечном итоге показало, что структурно устойчивые системы не плотны в пространстве динамических систем. Вначале был приведен пример открытого множества структурно неустойчивых систем, в котором негрубость «концентрировалась» на гетероклинических траекториях, т. е. на множестве блуждающих точек (Смейл), а позднее появились аналогичные примеры с негрубыми неблуждающими орбитами. Все представленные примеры «неустраимой структурной неустойчивости» были системами со сложной динамикой. В этой книге мы, однако, сосредотачиваемся на системах с простой динамикой и, в частности, на системах Морса–Смейла, и бифуркациях, которые возникают в таких системах.

Нарушение структурной устойчивости в системах Морса–Смейла вызывается бифуркациями состояний равновесия или периодических орбит, возникновением гомоклинических траекторий и гетероклинических циклов, нарушением условия трансверсальности для гетероклинических траекторий. Надо отметить, что некоторые из этих бифуркаций могут вывести нас из класса Морса–Смейла; более того, некоторые случаи, при довольно простых допущениях, неизбежно приводят к сложной динамике, таким образом указывая на то, что уже в момент бифуркации система далека от систем Морса–Смейла.

Простейшим примером такой ситуации является гомоклиническая петля седло-фокуса в трехмерной системе

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \rho x - \omega y + f(x, y), \\ \dot{y} &= \omega x + \rho y + g(x, y), \\ \dot{z} &= \lambda z + h(x, y),\end{aligned}$$

где $\rho < 0$, $\omega \neq 0$, $\lambda > 0$, и f, g, h — гладкие функции, обращающиеся в нуль в начале координат вместе со своими первыми производными. Начало координат здесь является седло-фокусом, который обладает гомоклинической траекторией Γ , как показано на рис. 8.2.1. Шильников [131, 135] показал, что если седловая величина положительна, т. е.

$$\sigma = \rho + \lambda > 0,$$

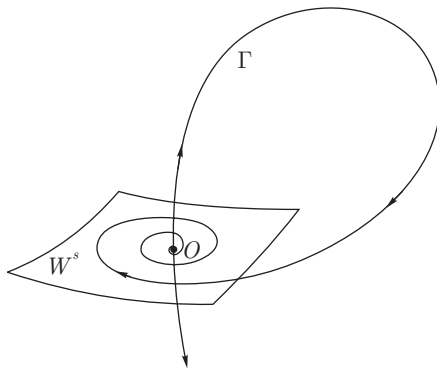


Рис. 8.2.1. Гомоклиническая петля Γ к седло-фокусу O

то любая окрестность $O \cup \Gamma$ содержит бесконечно много седловых периодических орбит и трансверсальных гомоклинических траекторий. Наоборот, если $\rho + \lambda < 0$, то структура множества траекторий, лежащих целиком в малой окрестности $O \cup \Gamma$, тривиальна, а именно: не существует других инвариантных множеств, кроме O и Γ .

Рассмотрим далее банахово пространство $\mathcal{B}$ динамических систем X класса Морса–Смейла в компактной области G . Пусть $\partial\mathcal{B}$ обозначает границу $\mathcal{B}$. Любая система $X_0 \in \partial\mathcal{B}$ является негрубой. Мы будем говорить, что система $X_0 \in \partial\mathcal{B}$ является *граничной* для класса систем Морса–Смейла, если в любой ее окрестности имеются системы с бесконечным множеством периодических орбит (т. е., как правило, с трансверсальными гомоклиническими траекториями). Другие системы в $\partial\mathcal{B}$ отвечают *внутренним* бифуркациям в классе Морса–Смейла.

Граничная система X_0 сама может иметь конечное число грубых состояний равновесия и периодических орбит или бесконечное их множество. Примером последнего случая служит каскад удвоений периода.

Для первого из названных типов граничных систем мы рассмотрим пример гомоклинического касания. Пусть $\mathbb{C}^2$ -гладкое семейство диффеоморфизмов $T(\mu)$ имеет при $\mu = 0$ неподвижную точку O с такими мультипликаторами $0 < \lambda < 1$ и $\gamma > 1$, что $\lambda\gamma < 1$. Очевидно, что O остается седловой точкой при всех малых $\mu \neq 0$. Обозначим через $W_O^s(\mu)$ и $W_O^u(\mu)$ ее устойчивое и неустойчивое многообразия соответственно. Предположим, что $W_O^s(\mu) \cap W_O^u(\mu) \setminus O = \emptyset$, когда $\mu < 0$, и что при $\mu = 0$ инвариантные множества касаются по гомоклинической траектории Γ . Кроме того, допу-

стим, что контакт является квадратичным и что это касание снизу, как изображено на рис. 8.2.2. Наконец, предположим, что $W_O^u(\mu)$ и $W_O^s(\mu)$ трансверсально пересекаются при $\mu > 0$. Таким образом, диффеоморфизм $T(\mu)$ в области $\mu > 0$ имеет трансверсальную гомоклиническую траекторию и, следовательно, сложную динамику (см. теорему 7.11). Если $T(\mu)$ при $\mu < 0$ были диффеоморфизмами Морса–Смейла, то $T(0)$ будет иметь те же самые неблуждающие траектории и, кроме того, неглубокую орбиту гомоклинического касания. Данный результат получен Гавриловым и Шильниковым [54, 55], которые показали, что при $\mu = 0$ малая окрестность $\Gamma \cup O$ не имеет других орбит, целиком лежащих в ней, кроме Γ и O^2 .

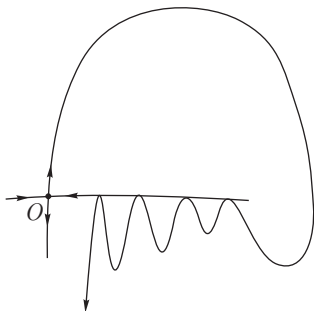


Рис. 8.2.2. Нетрансверсальная гомоклиническая орбита к седловой неподвижной точке

Другим примером служит семейство двумерных $\mathbb{C}^2$ -гладких диффеоморфизмов, неблуждающее множество которых не изменяется по достижении границы диффеоморфизмов Морса–Смейла. Ситуация проиллюстрирована на рис. 8.2.3. Две неподвижные точки O_1 и O_2 имеют положительные мультипликаторы, и $W_{O_1}^u$ касается $W_{O_1}^s$ по гетероклинической траектории, так же касаются $W_{O_1}^u$ и $W_{O_2}^u$. Этот пример сложнее предыдущего из-за наличия двух гетероклинических траекторий, обе из которых блуждающие.

Данная книга преимущественно сосредоточена на анализе внутренних бифуркаций в рамках класса систем с простой динамикой, таких как системы Морса–Смейла. Кроме того, мы будем ограничивать наше изучение главным образом бифуркациями коразмерности один. Причиной такого ограничения является то, что некоторые бифуркации более высоких кораз-

²Отметим, что здесь условие касания снизу (как на рис. 8.2.2) существенно: в случае когда W^u касается W^s сверху, система неизбежно обладает некоторой трансверсальной гомоклиникой при $\mu = 0$.

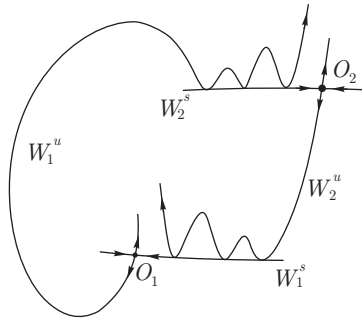


Рис. 8.2.3. Негрубый гетероклинический цикл, включающий две седловые неподвижные точки

мерностей во многих случаях оказываются граничными, например, когда нормальная форма для состояний равновесия трехмерна. Тем не менее мы будем исследовать и некоторые случаи коразмерности два, которые касаются состояний равновесия и исчезновения устойчивости периодических орбит. Между тем начнем наш следующий параграф с исследования некоторых вопросов, относящихся к негрубым гетероклиническим траекториям.

8.3. Негрубые гомоклинические и гетероклинические орбиты. Модули топологической эквивалентности

Ныне известно, что все негрубые двумерные системы в малой окрестности системы первой степени негрубости образуют поверхность коразмерности один. Более того, согласно Леонтович и Майеру все системы на этой поверхности идентичны в том смысле, что их топологический инвариант — схема — одинаков. В частности, все близкие системы, имеющие гомоклиническую петлю, эквивалентны друг другу; то же верно для близких систем с гетероклинической траекторией, соединяющей два седла.

Возможность подобной классификации двумерных диффеоморфизмов или трехмерных потоков не столь очевидна. Проиллюстрируем это на примере. Рассмотрим диффеоморфизм T , который имеет две седловые неподвижные точки O_1 и O_2 с характеристическими корнями $|\lambda_i| < 1$ и $|\gamma_i| > 1$ при O_i ($i = 1, 2$). Предположим, что $W_{O_1}^u$ и $W_{O_2}^s$ имеют квадратичное касание вдоль гетероклинической орбиты, как показано на рис. 8.3.1. Из квадратичности касания следует, что все подобные диффеоморфизмы образуют поверхность $\mathcal{B}^1$ коразмерности один в пространстве всех диффеоморфизмов с $\mathbb{C}^2$ -нормой.

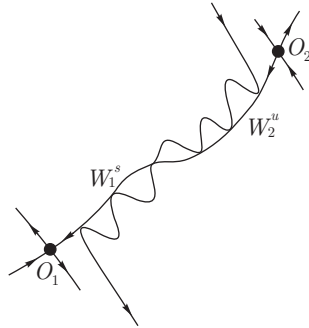


Рис. 8.3.1. Нетрансверсальная гетероклиническая траектория между двумя седловыми неподвижными точками

Определим для диффеоморфизма T величину

$$\theta = \frac{\ln |\lambda_1|}{\ln |\gamma_2|} \quad (8.3.1)$$

и аналогично положим

$$\tilde{\theta} = \frac{\ln |\tilde{\lambda}_1|}{\ln |\tilde{\gamma}_2|} \quad (8.3.2)$$

для близкого диффеоморфизма $\tilde{T} \in \mathcal{B}^1$, где $\tilde{\lambda}_{1(2)}$ и $\tilde{\gamma}_{1(2)}$ обозначают характеристические корни седла $\tilde{O}_{1(2)}$ отображения $\tilde{T}$, седло $\tilde{O}_{1(2)}$ близко к седлу $O_{1(2)}$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 8.1. *Если диффеоморфизмы T и $\tilde{T}$ топологически сопряжены, то $\theta = \tilde{\theta}$.*

Отметим, что $\theta = \tilde{\theta}$ является только необходимым условием. Из этой теоремы следует, что $\mathcal{B}^1$ вблизи T разделено на континуум топологически различных классов диффеоморфизмов. Этот факт был открыт Пэлисом [103], его доказательство см. в [97].

Инвариант θ называется *модулем топологической эквивалентности* или просто *модулем*. В силу принципиальной важности понятия модуля, прервемся и дадим его общее определение.

Определение 8.2. Говорят, что у системы X (непрерывной или дискретной) имеется модуль, если в некотором подпространстве $\mathcal{B}^*$ пространства динамических систем, где $X \in \mathcal{B}^*$, определен непрерывный локально непостоянный функционал h такой, что если $X_1 \in \mathcal{B}^*$ и $X_2 \in \mathcal{B}^*$ топологически эквивалентны, то $h(X_1) = h(X_2)$.

Величина θ также является модулем топологической эквивалентности в случае трехмерного потока, который имеет две седловые периодические орбиты такие, что неустойчивое многообразие одной имеет квадратичное касание с устойчивым многообразием другой вдоль гетероклинической траектории.

Существует несколько других случаев возникновения модулей у негрубых трехмерных систем коразмерности один с простой динамикой. Например, рассмотрим трехмерную систему с седло-фокусом O и седловой периодической орбитой L . Пусть $\lambda_{1,2} = \rho \pm i\omega$, и λ_3 обозначают характеристические корни O , и $\rho < 0$, $\omega > 0$, $\lambda_3 > 0$, т.е. допустим, что седло-фокус имеет тип $(2,1)$; пусть $|\nu| < 1$ и $|\gamma| > 1$ — мультипликаторы орбиты L . Пусть одна из двух сепаратрис Γ точки O стремится к L при $t \rightarrow +\infty$, т.е. $\Gamma \in W_L^s$, как показано на рис. 8.3.2. Это приводит к простейшей структурной неустойчивости. Все близкие системы с аналогичным поведением траекторий образуют поверхность $\mathcal{B}^1$ коразмерности один. Белуджи [28] показал, что величина

$$\tilde{\theta}_1 = \frac{\rho}{\omega} \frac{1}{\ln \gamma} \quad (8.3.3)$$

в таких системах является модулем.

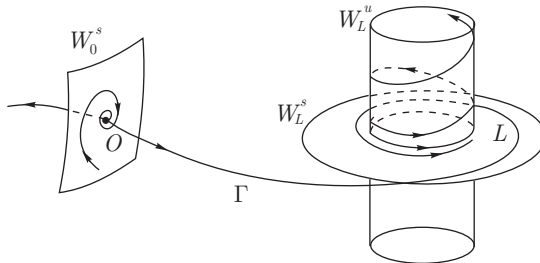


Рис. 8.3.2. Негрубая гетероклиническая траектория, соединяющая седло-фокус и седловую периодическую орбиту с положительными мультипликаторами

Другим примером служит система, показанная на рис. 8.2.1, содержащая гомоклиническую петлю Γ к седло-фокусу. Если седловой индекс

$$\nu = -\frac{\rho}{\lambda_3} < 1,$$

то окрестность петли содержит бесконечное множество седловых периодических орбит. Однако если $\nu > 1$, динамика в окрестности Γ тривиальна. Более того, Шильников [130] доказал, что когда $\nu > 1$, при бифуркации гомоклинической петли возникает не более одной периодической орбиты.

Таким образом, ее можно классифицировать как внутреннюю бифуркацию в классе систем Морса–Смейла (по крайней мере, когда рассматривается малая окрестность петли Γ). В связи с этим Афраймович и Ильашенко [21] отметили, что в данном случае ν является модулем.

Негрубые гетероклинические траектории в системах больших размерностей могут иметь и другие модули. Более того, негрубые диффеоморфизмы даже с простой динамикой могут требовать бесконечного множества модулей для их описания. Условия, при которых имеется конечное либо бесконечное число модулей, изложены в [43].

Нет никаких сомнений, что некоторые delicate аспекты поведения гомоклинических и гетероклинических траекторий могут быть не важны для нелинейной динамики, так как они отражают только оттенки переходного процесса. С другой стороны, когда мы имеем дело с неблуждающими траекториями, например, вблизи гомоклинической петли к седло-фокусу с $\nu < 1$, соответствующие Ω -модули (т. е. топологические инварианты на неблуждающем множестве) будут иметь первостепенную важность, так как они служат параметрами, управляющими бифуркациями; см. [62, 63].

8.4. Бифуркации в конечнопараметрических семействах.

Постановка задачи Андронова

Математическими объектами нелинейной динамики являются модели — явно заданные динамические системы, зависящие от конечного числа параметров. Важнейшим требованием к модели является то, что она должна правильно, по крайней мере качественно, описывать природу соответствующего физического явления. В связи с этим вспомним следующее замечание, сделанное Ляпуновым: «... нельзя использовать сомнительные аргументы при решении конкретной проблемы, не важно механики или физики, если она задана корректно с математической точки зрения. С того момента, как система определена, она становится предметом чистого анализа и ее нужно трактовать только таким образом»³.

Что касается динамических моделей, основные требования к их анализу были сформулированы Андроновым. Поэтому мы будем называть их постановкой задачи Андронова. Принципиальная схема такова:

³Ляпунов сделал это замечание в связи с исследованиями Пуанкаре, который применил некоторые нестрогие методы к проблеме устойчивости фигур равновесия вращающейся жидкости, которые привели его к неверным заключениям в пользу грушевидной формы. Более строгий анализ, проведенный Ляпуновым, показал, что грушевидная форма неустойчива. Результат Ляпунова позднее подтвердил Картан.

1. Разбить фазовое пространство на области структурной устойчивости и определить бифуркационное множество.
2. Разбить бифуркационное множество на связанные компоненты, каждая из которых соответствует топологически эквивалентной структуре множества траекторий.

Естественно, что такая постановка задачи базировалась на уже известных фактах и результатах качественной теории двумерных систем и теории бифуркаций.

Рассмотрим некоторое конечнопараметрическое семейство X_ε гладких систем, где $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ принимает значения в некоторой области $V \in \mathbb{R}^p$. Если X_{ε_0} негрубая система, то говорят, что ε_0 — бифуркационное значение параметра. Множество всех таких значений в V называется бифуркационным множеством. Очевидно, что, как только нам известно бифуркационное множество, мы можем определить все области структурной устойчивости в пространстве параметров. Следовательно, первым шагом в изучении модели является определение ее бифуркационного множества. Это подчеркивает особую роль теории бифуркаций среди всех методов нелинейной динамики.

Исследование бифуркации предполагает описание изменений в фазовом портрете негрубой системы при переходе к произвольно близкой системе (по отношению к некоторой $\mathbb{C}^r$ -метрике; выбор r зависит от характера негрубости и, следовательно, может быть различным в каждом конкретном случае).

В принципе, для того чтобы решить задачу о бифуркации, необходимо рассмотреть все системы, близкие к X_{ε_0} . Это означает, что мы должны рассмотреть банахово пространство всех малых возмущений⁴. С другой стороны, исследование значительно упрощается, когда возможно свести задачу к анализу некоторого подходящего конечнопараметрического семейства.

Эта идея была высказана Андроновым и Леонтович в их первой работе [9], которая касалась основных бифуркаций предельных циклов на плоскости⁵. Дальнейшее развитие теории бифуркаций внутренних для класса

⁴Отметим, что во многих специальных случаях анализ ограничивается изучением меньшего пространства систем, например, систем с некоторыми специфическими симметриями, гамильтоновых систем и т. д. При этом понятие структурной устойчивости для, скажем, гамильтоновых систем с одной степенью свободы становится совершенно осмысленным. Например, такие состояния равновесия, как центры и седла, становятся грубыми для данных систем. И если не существует гетероклинических циклов с разными седлами, то мы, естественно, можем охарактеризовать такие системы как грубые во множестве всех систем данного класса.

⁵Тем не менее в своих более поздних работах (см. также книги [11, 12]) при исследовании аналогичных бифуркаций они использовали банахово пространство всех малых возмущений.

Морса–Смейла также подтвердило достаточность использования конечнопараметрических семейств для достаточно большого числа задач.

В явном виде математическую формулировку конечнопараметрического подхода к локальным бифуркациям дал Арнольд [19] на основе понятия версальных семейств. Грубо говоря, версальность — вид структурной устойчивости семейства в пространстве семейств динамических систем. Различные варианты такой устойчивости детально обсуждались в [97].

Главная идея данного подхода такова: негрубой системе X_{ε_0} можно приписать некоторую коразмерность k . В случае конечного вырождения коразмерность k отвечает k условиям типа равенства и конечному числу условий типа неравенства. Таким образом, X_{ε_0} рассматривается как точка некоторого банахова подмногообразия $\mathcal{B}^k$ коразмерности k в пространстве динамических систем. Другими словами, имеется k гладких функционалов, определенных в окрестности X_{ε_0} , нулевые уровни которой пересекаются по $\mathcal{B}^k$. Условия типа неравенств гарантируют гладкость $\mathcal{B}^k$. В случае коразмерности один Сотомайер [144, 145] доказал гладкость данных функционалов и гладкость многообразия $\mathcal{B}^1$ в ситуациях, когда

- (1) состояние равновесия становится негрубым;
- (2) периодическая орбита теряет свою грубость и
- (3) существует нетрансверсальное пересечение устойчивого и неустойчивого многообразий седловых состояний равновесия и/или периодических орбит.

Отметим, что все системы из $\mathcal{B}^k$ — негрубые. Более того, в общем случае они не обязательно должны быть топологически эквивалентны друг другу. Предположим, однако, что они являются таковыми. Далее, рассмотрим малую окрестность U точки $X_{\varepsilon_0} \in \mathcal{B}^k$ на k -параметрические семейства $\tilde{X}_\varepsilon$, где $\tilde{X}_{\varepsilon_0} \in \mathcal{B}^k \cap U$ и $\tilde{X}_\varepsilon$ трансверсальны $\mathcal{B}^k$. Если существует такой гомеоморфизм (или, еще лучше, диффеоморфизм) между параметрами любых двух из этих семейств, такой что соответствующие системы топологически эквивалентны, то очевидно, что изучение бифуркаций системы X_{ε_0} сводится к исследованию любого k -параметрического семейства $\tilde{X}_\varepsilon$, проходящего через X_{ε_0} и трансверсального $\mathcal{B}^k$. Так как U мала, значения ε

Отметим, что подход к бифуркациям с использованием банахова пространства становится необходимым, по существу, в случае систем со сложной динамикой, в силу неустранимости гомоклинических касаний (см. [60, 61, 62]).

⁶Конечно, здесь можно также рассматривать семейства, зависящие более чем от k параметров; единственным требованием является то, что семейство должно быть в общем положении по отношению к $\mathcal{B}^k$; более детально см. параграф 11.1.

находятся в малой окрестности ε_0 в пространстве параметров. В данном случае задача Андронова ставится легко.

По существу, этот случай отвечает двумерным системам, так же как и ряду многомерных систем, когда, например, их можно свести к двумерным с помощью теоремы о центральном многообразии (локальном или глобальном, см. главы 5 и 6).

Ситуация становится совершенно иной, когда для описания систем в B^k требуются модули топологической эквивалентности, как в случае гетероклинических касаний (которые отвечают бифуркационным множествам коразмерности один). Хотя расслоение окрестности U k -параметрическими семействами по-прежнему возможно, различные семейства не будут топологически эквивалентными. Таким образом, с формально математической точки зрения модули необходимо относить к управляющим параметрам, и необходимое число параметров возрастает до суммы коразмерности задачи и количества модулей. Если существует бесконечное множество независимых модулей, то формально сведение к конечнопараметрическому семейству некорректно. Однако вопрос о применимости конечнопараметрического подхода к данным ситуациям сохраняется.

В качестве примера рассмотрим бифуркацию коразмерности один трехмерной системы с гомоклинической петлей к седло-фокусу с отрицательной седловой величиной (т.е. $\nu > 1$, см. предыдущий параграф). Как объяснялось в последнем параграфе, эта бифуркация не выводит систему из класса систем с простой динамикой. С другой стороны, в данном случае ν является модулем. Несмотря на то что данный факт обозначает, что различные системы на соответствующей бифуркационной поверхности не являются топологически эквивалентными, рассматриваемую бифуркацию можно с успехом изучать в однопараметрическом семействе (см. параграф 13.4), если мы не интересуемся поведением траекторий, для которых гомоклиническая петля является ω -предельным множеством.

Более сложный пример дается задачей коразмерности два, в которую вовлечены один или два седло-фокуса (рис. 8.4.1). Седловые величины принимают отрицательные значения в состояниях равновесия. Параметры, которые управляют бифуркацией, заданы следующим образом: $\mu_{1(2)}$ равно отклонению $\Gamma_1(\Gamma_2)$ от $W_{O_2}^s(W_{O_1}^s)$ в случае двух состояний равновесия, или же они равны отклонению $\Gamma_1(\Gamma_2)$ от W_O^s . Как установлено в [151, 125], при первой бифуркации может возникнуть не более чем одна периодическая орбита, а при второй — не более двух. Во втором случае может возникнуть и нетривиальный аттрактор (устойчивое квазимиимальное множество, состоящее из седло-фокуса O , одной P^- -траектории, для которой O - ω -предельное множество, двух P^+ траекторий, для которых O -

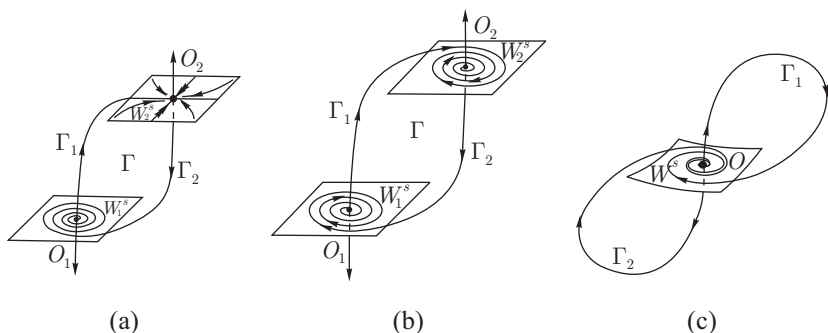


Рис. 8.4.1. (a) Гетероклинический цикл с седлом O_2 и седло-фокусом O_1 ; (b) гетероклинический цикл между двумя седло-фокусами; (c) гомоклиническая восьмерка к седло-фокусу

α -предельное множество, и континуума других незамкнутых устойчивых по Пуассону траекторий). Хотя структура неблуждающих множеств здесь полностью понятна, бифуркационные диаграммы на плоскости параметров (μ_1, μ_2) выглядят очень нетривиально (рис. 8.4.2), особенно для множества бифуркационных значений, соответствующих вторичным гетероклиническим и гомоклиническим траекториям. Предположительно, изменение значений модуля ν при $(\mu_1 = 0, \mu_2 = 0)$ может изменить структуру пересечений различных бифуркационных кривых при малых (μ_1, μ_2) . С другой стороны, если мы проигнорируем слишком тонкие детали, двухпараметрический подход достаточен для понимания этих бифуркаций.

Аналогичная ситуация возникает в классической задаче о возникновении инвариантного тора из периодической орбиты: незначительные детали структуры бифуркационного множества могут стать чрезвычайно чувствительными к малым возмущениям семейства.

Мы видим, что во многих базовых случаях задачу Андронова нельзя решить, если ее рассматривать абсолютно строго; таким образом, в этих случаях необходимо наложить разумные ограничения на глубину анализа бифуркационного множества.

В данной книге мы с самого начала используем конечнопараметрический подход к бифуркациям; формальная схема описывается в параграфе 11.1.

В общем, при работе с p -параметрическим семейством систем мы предполагаем следующие естественные требования:

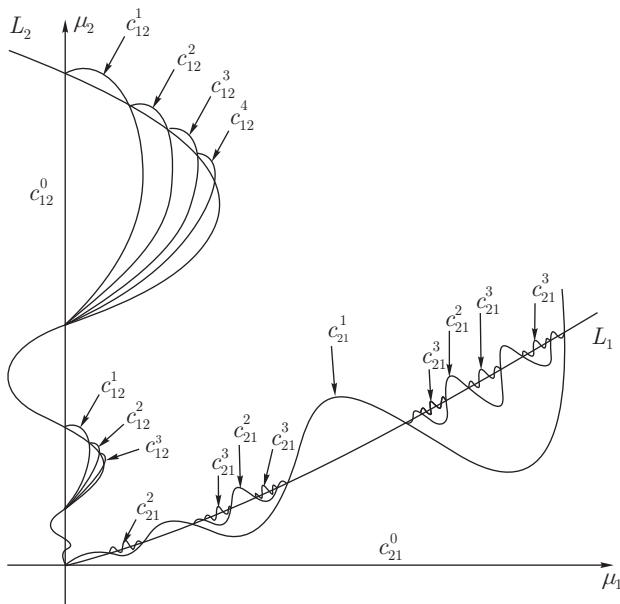


Рис. 8.4.2. Бифуркационная диаграмма, соответствующая случаю, показанному на рис. 8.4.1 (а). Более детально см. параграф 13.7

- (1) структурно устойчивые системы заполняют целые области в пространстве параметров;
- (2) основные бифуркации в семействе имеют коразмерность, не большую чем p ; и
- (3) бифуркации коразмерности k , такой что $k \leq p$, допускают описание в рамках k -параметрических семейств.

ГЛАВА 9

Поведение динамических систем на границах областей устойчивости состояний равновесия

В этой главе мы исследуем *негрубые состояния равновесия* на границах устойчивости, т. е. те, которые имеют по крайней мере один характеристический показатель на мнимой оси в комплексной плоскости. Что касается остальных характеристических показателей, мы полагаем, что они лежат в открытой левой полуплоскости.

Основы теории устойчивости систем с негрубыми состояниями равновесия были разработаны Ляпуновым. Его работы и многочисленные последующие исследования различных аспектов устойчивости в критических случаях, а также бифуркационных явлений, сопровождающих потерю устойчивости состояниями равновесия, стали фундаментом, на котором в 20-х и 30-х годах выросли основные понятия теории нелинейных колебаний.

Критические состояния равновесия являлись объектом большого числа исследований. Здесь мы будем рассматривать только два наиболее распространенных и простых случая, в которых характеристическое уравнение

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

- (1) имеет один нулевой корень на мнимой оси или
- (2) имеет два комплексно-сопряженных корня на мнимой оси.

Первый случай выделяется условиями

$$a_n = 0, \quad \Delta_k > 0, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

где Δ_k — определитель Рауса–Гурвица (см. параграф 2.1).

Второй критический случай соответствует

$$\Delta_{n-1} = 0, \quad a_n > 0, \quad \Delta_k > 0, \quad k = 1, \dots, n-2.$$

Напомним, что $a_n = (-1)^n \det A$, где A — матрица линеаризованной системы в состоянии равновесия. Таким образом, условие пересечения границы устойчивости в первом случае — это просто

$$\det A = 0.$$

Соответственно состояния равновесия в первом критическом случае также называются *вырожденными*. Так как здесь неприменима теорема о неявной функции, сохранение такого состояния равновесия у близких систем не гарантировано. Таким образом, переход через границу устойчивости в первом критическом случае может вызвать исчезновение состояния равновесия.

Напротив, во втором критическом случае состояние равновесия сохраняется у всех близких систем и может только потерять свою устойчивость.

Основные средства для изучения критических случаев включают метод редукции на центральное многообразие и метод нормальных форм. Последний позволяет нам вычислить *ляпуновские величины*, которые определяют устойчивость критического состояния равновесия.

9.1. Теоремы редукции. Функции Ляпунова

Систему дифференциальных уравнений вблизи критического состояния равновесия можно записать в виде:

$$\begin{aligned}\dot{y} &= Ay + f(x, y), \\ \dot{x} &= Bx + g(x, y),\end{aligned}\tag{9.1.1}$$

где $x = (x_1, \dots, x_m)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$, $m \neq 0$; функции $f, g \in \mathbb{C}^r$ ($r \geq 1$) обращаются в нуль в начале координат вместе со своими первыми производными. Характеристическое уравнение $\det(B - \lambda I) = 0$ имеет m корней $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ с $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$ ($i = 1, \dots, m$), а характеристическое уравнение $\det(A - \gamma I) = 0$ имеет n корней $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ с $\operatorname{Re} \gamma_j < 0$, ($j = 1, \dots, n$).

Как показано в главе 5, данное критическое состояние равновесия лежит на инвариантном $\mathbb{C}^r$ -гладком *центральной многообразии* W^C , заданном уравнением вида $y = \Phi(x)$, где $\Phi(x)$ обращается в нуль в начале координат вместе со своей первой производной.

Трансверсально к центральному многообразию другое инвариантное многообразие проходит через точку $O(0, 0)$. Оно называется *сильно устойчивым*, и, как правило, мы обозначаем его через W^{ss} . Его уравнение задается в виде $x = \Psi(y)$, где $\Psi(y)$ обращается в нуль в начале координат

вместе с первой производной. Если исходная система аналитическая, многообразие W^{ss} также является аналитическим. Подобное утверждение для центрального многообразия в общем не верно: даже если система аналитическая, центральное многообразие W^C может не быть ни аналитическим, ни даже $\mathbb{C}^\infty$.

Сильно устойчивое многообразие является одним из слоев $\mathbb{C}^{r-1}$ -гладкого слоения, трансверсального к центральному многообразию. Как мы доказали в главе 5, верна следующая теорема редукции.

В окрестности точки O существует $\mathbb{C}^{r-1}$ -гладкая замена переменных, которая распрямляет как инвариантное слоение, так и центральное многообразие, так что в новых переменных система принимает следующий стандартный вид:

$$\dot{x} = Bx + G(x), \quad (9.1.2)$$

$$\dot{y} = [A + F(x, y)]y, \quad (9.1.3)$$

где $G(x) \equiv g(x, \Phi(x)) \in \mathbb{C}^r$, $F(x, y) \in \mathbb{C}^{r-1}$ и $F(0, 0) = 0$.

В новых переменных уравнением центрального многообразия W^C становится $y = 0$, а уравнением сильно устойчивого многообразия W^{ss} становится $x = 0$. Слоями сильно устойчивого слоения являются поверхности $x = \text{const}$.

Значение данной теоремы состоит в том, что она значительно уменьшает размерность задачи; а именно вместо изучения исходной $(n + m)$ -мерной системы (9.1.1) нам достаточно исследовать свойства только m -мерной системы (9.1.2), размерность которой не зависит от n и равна количеству характеристических показателей. Динамика критической (центральной) переменной x локально определена системой (9.1.2) и никак не зависит от переменной y .

Динамика переменной y довольно проста: если $\|x\|$ мала, то функция F в (9.1.3) также мала вблизи начала координат. Таким образом, при подходящим образом выбранном базисе в y -пространстве имеет место следующая оценка:

$$\frac{d}{dt} \|y(t)\| \leq -\gamma \|y(t)\|,$$

где $0 < \gamma < \max |\operatorname{Re} \gamma_i|$ ($i = 1, \dots, n$) (см. теорему 2.4). Отсюда

$$\|y(t)\| < Ce^{-\gamma t}, \quad (9.1.4)$$

т. е. любая траектория экспоненциально стремится к центральному многообразию W^C .

Все характеристические показатели ограничения

$$\dot{y} = Ay + f(\Psi(y), y) \quad (9.1.5)$$

системы (9.1.1) на сильно устойчивое многообразие W^{ss} лежат слева от мнимой оси. Таким образом, поведение траекторий на W^{ss} такое же, как и в окрестности грубого устойчивого состояния равновесия с матрицей линеаризации A (см. главу 2).

Из оценки (9.1.4) следует, что устойчивость состояния равновесия исходной системы (9.1.1) эквивалентна устойчивости состояния равновесия в системе, редуцированной на центральное многообразие.

Прежде всего напомним некоторые определения. Состояние равновесия O называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любая траектория, которая начинается в δ -окрестности O , никогда не покидает его ε -окрестность. В противном случае равновесие называется *неустойчивым*.

Состояние равновесия O является *асимптотически устойчивым*, если любая траектория, начинающаяся достаточно близко к O , стремится к O при $t \rightarrow +\infty$.

Теперь пусть состояние равновесия $x = 0$ редуцированной системы (9.1.2) устойчиво по Ляпунову. По определению, это означает, что для системы в стандартном виде (9.1.2) и (9.1.3) норма координаты x остается малой для всех положительных значений времени, для любой траектории, которая начинается достаточно близко к O (при условии, что y остается малым). В то же время малость x влечет неравенство (9.1.4) для координаты y , т. е. $y(t)$ экспоненциально стремится к нулю. Таким образом, мы получаем следующую теорему.

Теорема 9.1. *Если состояние равновесия устойчиво по Ляпунову на центральном многообразии W^C , то состояние равновесия исходной системы (9.1.1) также устойчиво по Ляпунову. Более того, если состояние равновесия асимптотически устойчиво на центральном многообразии, то состояние равновесия исходной системы также асимптотически устойчиво.*

*Если состояние равновесия неустойчиво на центральном многообразии W^C , то состояние равновесия исходной системы неустойчиво.*¹

В нашем исследовании устойчивости критического состояния равновесия будут использованы функции Ляпунова.

¹Последнее утверждение, касающееся неустойчивости, очевидно и не требует доказательства.

Определение 9.1. Непрерывная функция $V(x)$, определенная в окрестности D состояния равновесия O и гладкая в $D \setminus O$, называется функцией Ляпунова для системы (9.1.2), если она удовлетворяет следующим условиям:

$$(1) \quad V(0) = 0; \quad (9.1.6)$$

$$(2) \quad V(x) > 0 \quad \text{при } x \neq 0; \quad (9.1.7)$$

$$(3) \quad \frac{dV(x)}{dt} = \langle V'(x), Bx + G(x) \rangle \leq 0 \quad \text{при } x \neq 0, \quad (9.1.8)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение.

Использование функций Ляпунова для доказательства устойчивости основано на следующем результате.

Теорема 9.2. Если существует функция $V(x)$, удовлетворяющая условиям (9.1.6)–(9.1.8), то состояние равновесия O устойчиво по Ляпунову. Кроме того, если неравенство (9.1.8) строгое для всех $x \neq 0$, то все траектории в D стремятся к точке O при $t \rightarrow +\infty$, т. е. состояние равновесия O является асимптотически устойчивым.

Чтобы доказать устойчивость по Ляпунову, окружим точку O сферой S_ε^{m-1} радиуса ε . Пусть $V_\varepsilon > 0$ — минимум функции $V(x)$ на поверхности сферы (он является строго положительным, потому что все точки сферы лежат на конечном расстоянии от начала координат). Так как V непрерывна и $V(0) = 0$, то для любой точки x_0 , выбранной достаточно близко к O , значение функции $V(x)$ строго меньше, чем V_ε .

Отметим, что из (9.1.8) следует, что функция Ляпунова не возрастает вдоль траектории системы (9.1.2). Отсюда, для любой траектории $x(t)$, начинающейся достаточно близко к точке O , выполняется неравенство $V(x(t)) < V_\varepsilon$. Это означает, что такая траектория не может пересекать сферу S_ε^{m-1} и, следовательно, она должна оставаться внутри ε -окрестности состояния равновесия O для всех $t \geq 0$.

Для доказательства асимптотической устойчивости выберем ε -окрестность U_ε состояния равновесия и докажем, что любая траектория из D должна входить в U_ε спустя достаточно долгое время и после должна оставаться внутри всегда. Действительно, если неравенство (9.1.8) строгое для всех $x \neq 0$, то минимум

$$\min_{x \in D \setminus U_\varepsilon} \langle V'(x), Bx + G(x) \rangle = -C_\varepsilon$$

строго меньше нуля. Если мы предположим, что в момент времени t точки

траектории $x(t)$ расположены вне U_ε , тогда в силу (9.1.8) мы получим

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) \leq -C_\varepsilon.$$

Отсюда, для любого t

$$V(x(t)) \leq V(x(0)) - C_\varepsilon T(t), \quad (9.1.9)$$

где T обозначает время, в течение которого траектория находилась вне U_ε . Из (9.1.7) и (9.1.9) следует, что это время конечно для любого t :

$$T(t) \leq V(x_0)/C_\varepsilon \equiv T_\varepsilon(x_0).$$

Отсюда, для всех $t > T_\varepsilon$ траектория остается внутри ε -окрестности точки O . Так как ε можно выбрать произвольно малым, то траектория должна стремиться к O при $t \rightarrow +\infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Функция Ляпунова служит универсальным инструментом теории устойчивости. Как правило, доказательство, касающееся устойчивости, состоит или из построения функции Ляпунова, или из доказательства ее существования. Более того, ее применение не ограничено критическими состояниями равновесия; например, в нашем анализе грубых состояний равновесия (теорема 2.4) мы неявно показали, что норма вектора в жордановом базисе является функцией Ляпунова.

Функция Ляпунова имеет простой геометрический смысл, особенно в случае асимптотической устойчивости. Здесь поверхности уровня $V(x) = \text{const}$ являются *поверхностями без контакта* для системы; т. е. векторное поле на этих поверхностях ориентировано по направлению к началу координат, как показано на рис. 9.1.1 (заметим, что градиент $V'(x)$ функции $V(x)$ ортогонален поверхности $V = \text{const}$ в точке x и строгое неравенство (9.1.8) означает, что угол между вектором скорости $\dot{x}$ и градиентом функции $V(x)$ является острым). Таким образом, все траектории должны входить внутрь любой поверхности $V = \text{const}$ и, значит, стремиться к состоянию равновесия O .

С практической точки зрения устойчивость по Ляпунову менее важна, чем асимптотическая устойчивость. В частности, из простых соображений непрерывности следует, что если критическое состояние равновесия асимптотически устойчиво, то траектории любой близкой системы также будут стремиться к малой окрестности начала координат, где и будут оставаться вечно. Поведение траекторий в этой малой окрестности может быть довольно нетривиальным. Тем не менее любые отклонения траекторий близких систем от нуля будут малы, в силу асимптотической устойчивости состояния равновесия при критическом значении параметра.

Данное утверждение не верно для состояния равновесия, которое устойчиво только по Ляпунову. Например, для линейной системы

$$\dot{x}_1 = \mu x_1 - \omega x_2,$$

$$\dot{x}_2 = \omega x_1 + \mu x_2$$

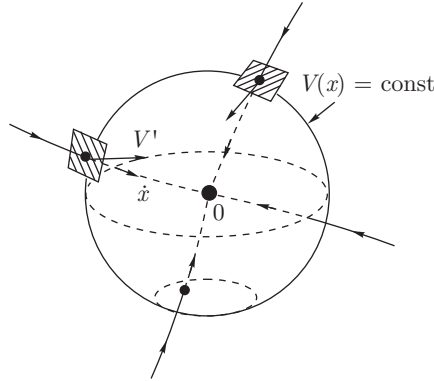


Рис. 9.1.1. Геометрическая интерпретация функции Ляпунова. Поверхность $V(x) = \text{const}$ трансверсальна векторному полю, так что каждая траектория входит внутрь этой поверхности

состояние равновесия $O(0, 0)$ является центром при $\mu = 0$. Оно устойчиво по Ляпунову, но не асимптотически устойчиво (при этом любая траектория представляет собой окружность с центром в начале координат). Для любого произвольно малого $\mu > 0$ состояние равновесия становится неустойчивым фокусом, и все траектории уходят от начала координат в бесконечность при $t \rightarrow +\infty$.

Неустойчивость состояния равновесия при критическом значении параметра также подразумевает важный с практической точки зрения общий вывод о поведении траектории во всех близких системах. А именно если мы определим произвольно малую ε_0 -окрестность такого состояния равновесия, тогда для любой системы, которая достаточно близка к исходной системе с неустойчивым состоянием равновесия, существуют такие начальные условия, не далее ε_0 от нуля, что соответствующая траектория будет уходить от начала координат на конечное расстояние. Таким образом, если критическое состояние равновесия O исходной системы неустойчиво, то область притяжения (в том случае, если он существует) соответствующего состояния равновесия любой близкой системы должна быть очень мала.

Для доказательства того, что состояние равновесия неустойчиво, можно использовать некоторые аналоги функций Ляпунова. Например, если существует функция $V(x)$, удовлетворяющая условиям (9.1.6) и (9.1.7), но

$$\langle V'(x), Bx + G(x) \rangle > 0, \quad \text{at } x \neq 0, \quad (9.1.10)$$

тогда соответствующее состояние равновесия неустойчиво. Здесь функция $V(x)$ является функцией Ляпунова для системы, полученной из (9.1.2)

при помощи обращения времени. Следовательно, в силу теоремы 9.1 все траектории стремятся к O при $t \rightarrow -\infty$; т.е. такое состояние равновесия является *отталкивающим* или *вполне неустойчивым*.

Однако возможно существование такого неустойчивого состояния равновесия O , что некоторые траектории стремятся к O при $t \rightarrow +\infty$. Простейшим примером является грубое седло. Для доказательства неустойчивости седла в критических случаях можно использовать функцию Четаева, для которой условия (9.1.6), (9.1.7) и (9.1.10) соблюдаются только в пределах некоторого сектора, примыкающего к точке O . Более подробно читатель может ознакомиться с этим в книге Хазина и Шноля [75].

9.2. Первый критический случай

Для случая когда есть только один характеристический показатель на мнимой оси, т.е. когда $m = 1$ и $\lambda_1 = 0$ в (9.1.1), система в стандартном виде задается как

$$\begin{aligned}\dot{x} &= g(x), \\ \dot{y} &= [A + F(x, y)]y,\end{aligned}\tag{9.2.1}$$

где x — скаляр, и функция $g(x)$ обращается в нуль в начале координат вместе с первой производной. В данном случае центральное многообразие W^C одномерно и задается уравнением $y = 0$. Система на W^C имеет вид

$$\dot{x} = g(x).\tag{9.2.2}$$

Изучим поведение траекторий этого уравнения вблизи состояния равновесия. Так как $g(0) = g'(0) = 0$, то

$$g(x) = l_2 x^2 + l_3 x^3 + \dots,\tag{9.2.3}$$

где коэффициенты $l_2, \dots, l_k$ разложения функции $g(x)$ в ряд Тейлора в O называются *ляпуновскими величинами*.

Пусть k — номер первой ненулевой ляпуновской величины; т.е. $l_2 = \dots = l_{k-1} = 0$ и $l_k \neq 0$. Тогда уравнение (9.2.2) можно записать в виде

$$\dot{x} = l_k x^k (1 + o(1)).\tag{9.2.4}$$

Отметим, что если k — четное, то состояние равновесия неустойчиво. Поведение траекторий в окрестности точки O для положительных и отрицательных значений l_k показано на рис. 9.2.1 (а) и (б) соответственно. Второй случай сводится к первому заменой $x \rightarrow -x$. Здесь существуют

только 3 траектории: первая — точка O , вторая — траектория, выходящая из O в направлении $l_k x > 0$, третья — траектория, входящая в O со стороны $l_k x < 0$.

Если k — нечетное ($k = 2p + 1$), уравнение принимает следующий вид:

$$\dot{x} = l_{2p+1} x^{2p+1} (1 + o(1)). \quad (9.2.5)$$

При этом если $l_{2p+1} < 0$, то $\frac{d}{dt}|x| = l_{2p+1}|x|^{2p+1}(1 + o(1)) < 0$ для $x \neq 0$. Следовательно, в данном случае состояние равновесия O устойчиво, как показано на рис. 9.2.1 (с). Напротив, если $l_{2p+1} > 0$, равновесие неустойчиво, как показано на рис. 9.2.1 (d).

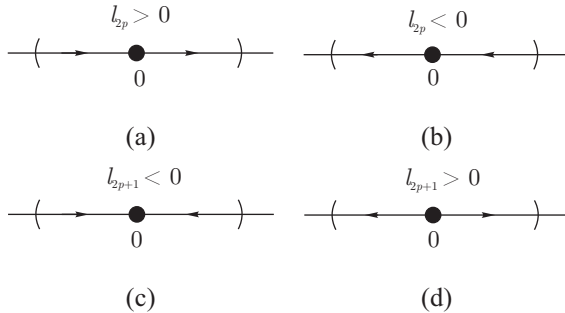


Рис. 9.2.1. Седло-узел при различных значениях ляпуновских величин. См. комментариев в тексте

Вернемся к исходной системе (9.2.1) и дадим полное описание траекторий вблизи точки O . Динамика по переменной y довольно проста — это экспоненциальная сходимость к нулю [см. неравенство (9.1.4)]. Динамика координаты x описана выше. Отсюда мы имеем:

- (1) Если первая отличная от нуля ляпуновская величина имеет четный порядковый номер, такое состояние равновесия называется седло-узлом; его называют простым седло-узлом, если $l_2 \neq 0$. Здесь сильно устойчивое многообразие W^{ss} разделяет окрестность O на две подобласти: узловую и седловую. В узловой подобласти все траектории стремятся к O вдоль ведущего направления $y = 0$. В седловой подобласти все траектории проходят мимо O , кроме траекторий, которые стремятся к O при $t \rightarrow -\infty$ (рис. 9.2.2).

В многомерном случае все траектории в W^{ss} стремятся к O экспоненциально при $t \rightarrow +\infty$: если наименьшее (ближайшее к мнимой

оси) собственное значение γ_1 матрицы A вещественно, то точка O является устойчивым узлом в W^{ss} [рис. 9.2.3 (a)]; в противном случае, если γ_1 — комплексное число, то точка O в W^{ss} — устойчивый фокус [рис. 9.2.3 (b)].

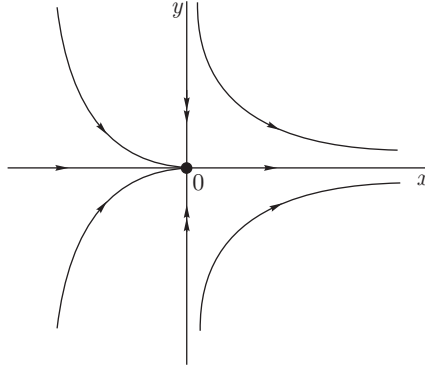


Рис. 9.2.2. Седло-узел на плоскости

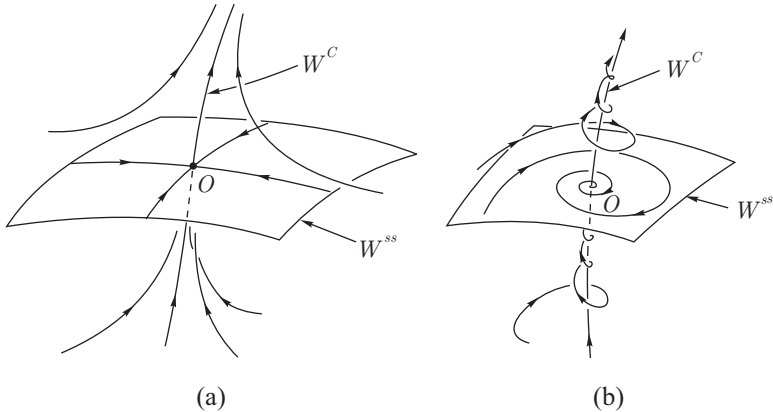


Рис. 9.2.3. Два R^3 -примера топологически тождественных седло-узлов с $l_{2p} \neq 0$; в редукции на W^{ss} точка O является устойчивым узлом (a) или устойчивым фокусом (b)

- (2) Если первая отличная от нуля ляпуновская величина отрицательна и имеет нечетный порядковый номер, т.е. $l_k < 0$, $k = 2p + 1$, то состояние равновесия устойчиво. Все траектории стремятся к O при

$t \rightarrow +\infty$. Траектории, которые не лежат на сильно устойчивом многообразии W^{ss} , стремятся к O вдоль W^C , как показано на рис. 9.2.4 (а). В отличие от случая грубого узла, здесь сходимость не экспоненциальная².

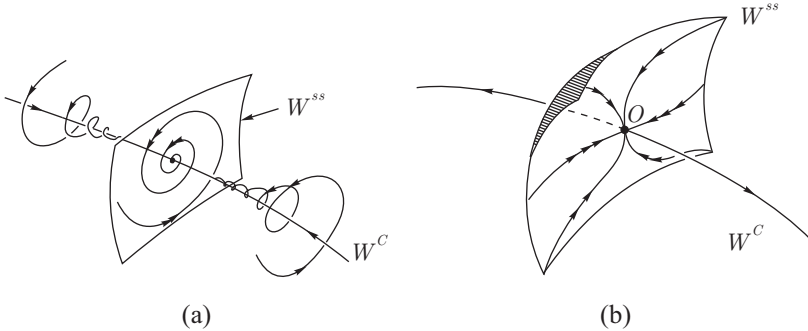


Рис. 9.2.4. Вырожденное состояние равновесия с $l_{2p+1} \neq 0$. Такая бифуркация типична для систем, где в силу симметрии первая ненулевая ляпуновская величина вырожденного состояния равновесия всегда имеет нечетный порядковый номер

- (3) Если у первой отличной от нуля ляпуновской величины порядковый номер нечетный и она положительна, т.е. $l_k > 0$, $k = 2p + 1$, то состояние равновесия O имеет топологический тип седла $(n - 1, 1)$ (см. параграф 2.5). При этом неустойчивое многообразие совпадает с W^C , как проиллюстрировано на рис. 9.2.4 (b).

Отметим, что для вычисления первой отличной от нуля ляпуновской величины здесь не требуется сводить систему на центральное многообразие. Если исходная система имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= g(x, y), \\ \dot{y} &= Ay + f(x, y),\end{aligned}\tag{9.2.6}$$

где $f'(0, 0) = 0$ и $g'(0, 0) = 0$, то стандартная процедура следующая. Во-первых, записывается система уравнений

$$Ay + f(x, y) = 0.\tag{9.2.7}$$

Так как $\det A \neq 0$ и $f(0, 0) = 0$, $f'_y(0, 0) = 0$, из данной системы можно выразить y :

$$y = \varphi(x).\tag{9.2.8}$$

²Принтегрировав (9.2.5), мы имеем $x \sim C||t||^{-1/2p}$.

Ряд Тейлора для функции $\varphi(x)$ можно найти методом неопределенных коэффициентов. Далее, можно вычислить $g(x, \varphi(x))$. Первый ненулевой коэффициент в разложении

$$g(x, \varphi(x)) = l_k x^k + \dots \quad (9.2.9)$$

и есть требуемая первая ненулевая ляпуновская величина.

Для системы второго порядка

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \dots = g(x, y), \\ \dot{y} &= -\lambda y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + \dots = -\lambda y + f(x, y), \end{aligned}$$

где $\lambda > 0$, первая ляпуновская величина просто равна a_{20} .

Если линейная часть общего вида (с $a b \neq 0$)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by + g(x, y), \\ \dot{y} &= cx + dy + f(x, y), \end{aligned}$$

где $ad - bc = 0$, $a + d < 0$, а функции f и g начинаются с квадратичных одночленов (как в предыдущей системе), то формула для вычисления l_2 более сложная:

$$l_2 = a_{20} \cdot bd - a_{11}ad + a_{02}ac - b_{20}b^2 + b_{11}ab - b_{02}a^2$$

Докажем, что формула (9.2.9) позволяет вычислить ляпуновскую величину. Действительно, по определению, ляпуновская величина — первый отличный от нуля коэффициент разложения

$$g(x, \Phi(x)) = l_k x^k + \dots, \quad (9.2.10)$$

где $y = \Phi(x)$ — уравнение центрального многообразия. Условие инвариантности W^C для системы (9.2.6) имеет вид

$$A\Phi(x) + f(x, \Phi(x)) = \Phi'(x)g(x, \Phi(x)). \quad (9.2.11)$$

Сопоставляя (9.2.7), (9.2.8) и (9.2.9), находим, что

$$\varphi(x) - \Phi(x) \sim \Phi'(x)g(x, \Phi(x)),$$

т. е. отличие между $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ (а отсюда и разница между $g(x, \Phi(x))$ и $g(x, \varphi(x))$) имеет первый порядок малости по сравнению с $g(x, \Phi(x))$. Таким образом, первые отличные от нуля члены ряда Тейлора (9.2.10) и (9.2.9) функций $g(x, \Phi(x))$ и $g(x, \varphi(x))$ действительно совпадают.

Из формулы (9.2.9) следует, что если правая часть системы (9.2.6) аналитическая и если все ляпуновские величины обращаются в нуль, то

$g(x, \varphi(x)) \equiv 0$. Отсюда, поскольку $y = \varphi(x)$ является решением системы (9.2.7), то кривая $y = \varphi(x)$ заполнена состояниями равновесия системы (9.2.6). Таким образом, она является инвариантным многообразием этой системы. Так как она касается $y = 0$ в O , она по определению является центральным многообразием. Таким образом, в рассматриваемом случае система имеет аналитическое центральное многообразие $W^C: y = \varphi(x)$, которое состоит из состояний равновесия, как проиллюстрировано на рис. 9.2.5.

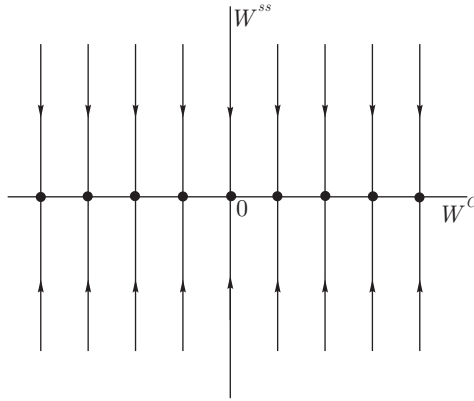


Рис. 9.2.5. Вырожденное центральное многообразие, составленное из состояний равновесия

Это может быть не верно, когда система только гладкая, но не аналитическая. Например, $\mathbb{C}^\infty$ -гладкая система с плоской правой частью

$$\dot{x} = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

$$\dot{y} = -y$$

имеет единственное (неустойчивое) состояние равновесия, все ляпуновские величины которого равны нулю. Другая плоская система

$$\dot{x} = \begin{cases} \sin(1/x) e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

$$\dot{y} = -y$$

имеет счетное множество изолированных состояний равновесия, накапливающихся к началу координат.

Состояние равновесия, фазовый портрет которого не определяется через коэффициенты ряда Тейлора (это означает, что $l_2 = \dots = l_r = 0$ для $\mathbb{C}^r$ -гладких систем или что для $\mathbb{C}^\infty$ -гладких систем все l_i обращаются в нуль), называется *полностью вырожденным* или *бесконечно вырожденным* в случае $\mathbb{C}^\infty$.

9.3. Второй критический случай

Пусть состояние равновесия в начале координат имеет два чисто мнимых характеристических показателя $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$. В данном случае редукция системы на центральное многообразие W^C имеет вид:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\omega x_2 + g_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= \omega x_1 + g_2(x_1, x_2),\end{aligned}\tag{9.3.1}$$

где функции $g_{1,2}$ обращаются в нуль в начале координат вместе со своими первыми производными.

Начнем с вычисления нормальной формы для системы (9.3.1). Очевидно, что существует бесконечное множество резонансных соотношений типа

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= (q+1)\lambda_1 + q\lambda_2, \\ \lambda_2 &= q\lambda_1 + (q+1)\lambda_2,\end{aligned}\tag{9.3.2}$$

где $q = 1, 2, \dots$. Это означает, что гладкие замены переменных, вообще говоря, не могут удалить члены $A_q x_1(x_1^2 + x_2^2)^q$ и $B_q x_2(x_1^2 + x_2^2)^q$ (см. параграф 2.9). Ниже мы покажем, как занулить оставшиеся члены до любого конечного порядка.

Лемма 9.1. *Для любого целочисленного $Q \geq 1$ существует полиномиальная замена переменных, которая преобразует систему (9.3.1) в*

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -\omega v + \sum_{q=1}^Q (L_q u - \Omega_q v)(u^2 + v^2)^q + o(r^{2Q+1}), \\ \dot{v} &= \omega u + \sum_{q=1}^Q (L_q v + \Omega_q u)(u^2 + v^2)^q + o(r^{2Q+1})\end{aligned}\tag{9.3.3}$$

(где $r = \sqrt{u^2 + v^2}$) или в полярных координатах

$$\begin{aligned}\dot{r} &= L_1 r^3 + \dots + L_Q r^{2Q+1} + o(r^{2Q+1}), \\ \dot{\theta} &= \omega + \Omega_1 r^2 + \dots + \Omega_Q r^{2Q} + o(r^{2Q}).\end{aligned}\tag{9.3.4}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сделаем следующую замену переменных:

$$z = x_1 + i x_2, \quad z^* = x_1 - i x_2$$

и перепишем систему в комплексном виде

$$\begin{aligned} \dot{z} &= i \omega z + \sum_{2 \leq p+q \leq 2Q+1} C_{pq} z^p z^{*q} + o(|z|^{2Q+1}), \\ \dot{z}^* &= -i \omega z^* + \sum_{2 \leq p+q \leq 2Q+1} C_{pq}^* z^{*p} z^q + o(|z|^{2Q+1}), \end{aligned} \quad (9.3.5)$$

где $*$ обозначает комплексное сопряжение. Этот вид удобнее, потому что матрица линейной части диагональна. Более того, мы можем отбросить второе уравнение, так как оно следует из первого.

Далее произведем замену переменных

$$z = w + \sum_{p,q} \alpha_{pq} w^p w^{*q}, \quad 2 \leq p+q \leq 2Q+1, \quad (9.3.6)$$

где α_{pq} — неопределенные коэффициенты. Уравнение в новых переменных задается как

$$\dot{w} = i \omega w + \sum_{2 \leq p+q \leq 2Q+1} C'_{pq} w^p w^{*q} + o(|w|^{2Q+1}). \quad (9.3.7)$$

Попробуем занулить максимально возможное количество коэффициентов C'_{pq} . Посредством замены (9.3.6) в (9.3.5) и подстановки вместо $\dot{w}$ и $\dot{w}^*$ их выражений в соответствии с (9.3.7) мы получаем

$$\begin{aligned} & \left\{ 1 + \sum_{p,q} \alpha_{pq} p w^{p-1} w^{*q} \right\} \cdot \left[i \omega w + \sum_{p,q} C'_{pq} w^p w^{*q} \right] + \\ & + \sum_{p,q} \alpha_{pq} q w^p w^{*q-1} \left[-i \omega w^* + \sum_{p,q} C'^*_{pq} w^{*p} w^q \right] = \\ & = i \omega \left[w + \sum_{p,q} \alpha_{pq} w^p w^{*q} \right] + \sum_{p,q} C_{pq} (w + \dots)^p (w^* + \dots)^q + o(|w|^{2Q+1}). \end{aligned}$$

Для коэффициентов при $w^p w^{*q}$ с $p+q=2$ мы получаем

$$i \omega \alpha_{pq} p w^p w^{*q} + C'_{pq} w^p w^{*q} - i \omega \alpha_{pq} q w^p w^{*q} = i \omega \alpha_{pq} w^p w^{*q} + C_{pq} w^p w^{*q}$$

и, следовательно:

$$C'_{pq} = C_{pq} - i \omega \alpha_{pq} [p - q - 1]. \quad (9.3.8)$$

Очевидно, что если

$$p \neq q + 1, \quad (9.3.9)$$

то, полагая

$$\alpha_{pq} = \frac{C_{pq}}{i \omega (p - 1 - q)}, \quad (9.3.10)$$

мы имеем $C'_{pq} = 0$. Условие (9.3.9) автоматически выполнено при $p + q = 2$. Отсюда, если коэффициенты α_{pq} в (9.3.6) заданы формулой (9.3.10), в системе (9.3.7) в новых переменных не будет квадратичных членов.

Приравнявая коэффициенты при $w^p w^{*q}$ с $p + q = 3$, мы получаем

$$C'_{pq} = C_{pq} - i \omega \alpha_{pq} [p - q - 1] + \dots, \quad (9.3.11)$$

где многоточие обозначает члены, зависящие только от тех α_{pq} , для которых $p + q = 2$ (мы уже знаем их из (9.3.10)). В этом случае для p и q , удовлетворяющих условию (9.3.9), мы также можем найти такие α_{pq} , что в новых переменных коэффициенты C'_{pq} обращаются в нуль:

$$\alpha_{pq} = \frac{C_{pq} + \dots}{i \omega (p - 1 - q)},$$

где многоточие имеет то же значение, что и выше.

Единственный «неубиваемый» член — это первый резонансный член $(C'_{21} + \dots)w^2 w^*$ ($p = 2, q = 1$). Так как C'_{21} не зависит от α_{21} , мы можем положить $\alpha_{21} = 0$ в (9.3.6).

Для больших значений $(p + q)$ выражение (9.3.11) остается верным, если считать, что многоточия обозначают члены, зависящие только от тех $\alpha_{p'q'}$, для которых $p' + q' < p + q$. Таким образом, продолжая действовать, как и выше, мы можем явно найти соответствующую замену переменных, которая обратит в нуль все члены с четными $(p + q)$, и все нерезонансные члены с нечетными $(p + q)$. В конце концов остаются только резонансные члены вида $(C'_{q+1,q+\dots})w^{q+1}w^{*q}$. Очевидно, данную процедуру можно продолжать до любого значения $(p + q)$.

Окончательно уравнение (9.3.7) принимает вид

$$\dot{w} = i \omega w + C'_{21}w^2 w^* + \dots + C'_{Q+1,Q}w^{Q+1}w^{*Q} + o(w^{2Q+1}). \quad (9.3.12)$$

Замена $w = u + i v$ дает нам требуемый вид (9.3.3), где $L_q = \text{Re } C'_{q+1,q}$ и $\Omega_q = \text{Im } C'_{q+1,q}$.

Система (9.3.3) или (9.3.4) является *нормальной формой* для второго критического случая. Коэффициенты L_q называются *ляпуновскими величинами*. Отметим, что в вышеописанной процедуре, для того чтобы вычислить L_Q , требуется знать разложение Тейлора для уравнения (9.3.1) вплоть до порядка $p + q = 2Q + 1$.

Пусть $L_1 = \dots = L_{k-1} = 0$, $L_k \neq 0$. В этом случае нормальная форма имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{r} &= L_k r^{2k+1}(1 + \varphi(r, \theta)), \\ \dot{\theta} &= \omega(1 + \psi(r, \theta)),\end{aligned}$$

где φ и ψ стремятся к нулю при $r \rightarrow 0$. Заменив время

$$dt \rightarrow (1 + \varphi(r, \theta))^{-1} dt,$$

мы получаем новую систему

$$\begin{aligned}\dot{r} &= L_k r^{2k+1}, \\ \dot{\theta} &= \omega(1 + \dots),\end{aligned}\tag{9.3.13}$$

которая называется *орбитальной нормальной формой*.

Если $L_k < 0$, то траектории по спирали стремятся к O при $t \rightarrow +\infty$, как показано на рис. 9.3.1. Состояние равновесия в этом случае называется *устойчивым сложным* или *слабым фокусом*. Отметим, что, в отличие от грубого устойчивого фокуса здесь сходимость траекторий к O не является экспоненциальной. Действительно, из (9.3.13) следует, что

$$r \sim t^{-1/2k},\tag{9.3.14}$$

$$\theta \sim \omega t.\tag{9.3.15}$$

Здесь любая траектория имеет вид $r \sim \theta^{-1/2k}$. Это не логарифмическая спираль; в частности, ее длина стремится к бесконечности при $r \rightarrow 0$.

Если $L_k > 0$, начало координат является неустойчивым состоянием равновесия, так как траектории, начинающиеся вблизи него, по спирали удаляются от него, по мере увеличения времени. Для двумерной системы (9.3.1) точка O называется *неустойчивым сложным (слабым) фокусом*.

Возвращаясь к исходной многомерной системе [см. (9.1.1)–(9.1.3)], мы видим, что если первая ненулевая ляпуновская величина отрицательна, то качественно траектории ведут себя аналогично траекториям вблизи грубого устойчивого фокуса, как показано на рис. 9.3.2 (а).

Если первая ненулевая ляпуновская величина положительна и если все некритические характеристические показатели $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ лежат слева от

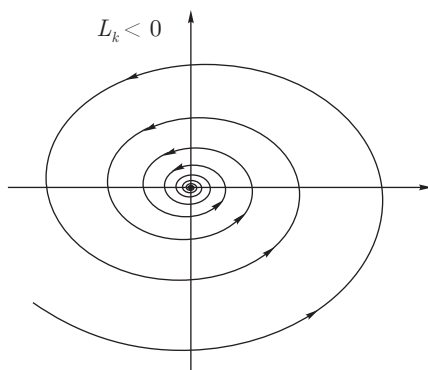


Рис. 9.3.1. Устойчивый ($L_k < 0$) слабый фокус в $\mathbb{R}^2$. Когда $L_k > 0$, траектория покидает окрестность начала координат вдоль спирали, направленной против часовой стрелки

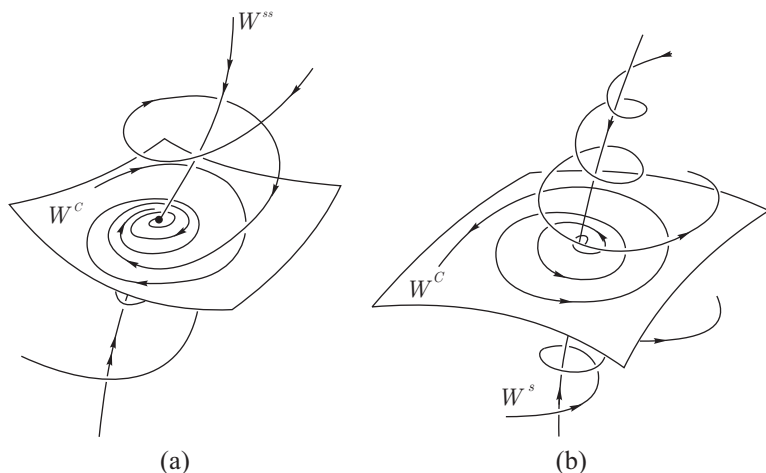


Рис. 9.3.2. Изображены две противоположные ситуации в $\mathbb{R}^3$. Когда $L_k < 0$, состояние равновесия по-прежнему сохраняет устойчивость на границе устойчивости (a); когда $L_k > 0$, устойчивое состояние равновесия становится неустойчивым фокусом на W^C , т.е. седло-фокусом, устойчивым многообразием W^{ss} которого служит W^s (b)

мнимой оси на комплексной плоскости, тогда состояние равновесия является сложным седло-фокусом, как показано на рис. 9.3.2 (b). Его устойчивым многообразием является W^{ss} , а неустойчивое многообразие совпадает с центральным многообразием W^C . Траектории, не лежащие ни в W^{ss} , ни в W^C , проходят мимо состояния равновесия.

Выражение для первой ляпуновской величины через коэффициенты системы (9.3.1) впервые было получено Баутиным [24]. Если мы запишем систему как

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + by + P_2(x, y) + P_3(x, y) + \dots, \\ \dot{y} &= cx + dy + Q_2(x, y) + Q_3(x, y) + \dots,\end{aligned}$$

где $ad - bc > 0$, $a + d = 0$ и

$$\begin{aligned}P_2(x, y) &= a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2, \\ Q_2(x, y) &= b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2, \\ P_3(x, y) &= a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3, \\ Q_3(x, y) &= b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3,\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}L_1 &= -\frac{\pi}{4b\omega^3} \{ [ac(a_{11}^2 + a_{11}b_{02} + a_{02}b_{11}) + ab(b_{11}^2 + a_{20}b_{11} + a_{11}b_{20})] + \\ &+ c^2(a_{11}a_{02} + 2a_{02}b_{02}) - 2ac(b_{02}^2 - a_{20}a_{02}) - 2ab(a_{20}^2 - b_{20}b_{02}) - \\ &- b^2(2a_{20}b_{20} + b_{11}b_{20}) + (bc - 2a^2)(b_{11}b_{02} - a_{11}a_{20})] - \\ &- (a^2 + bc)[3(cb_{03} - ba_{30}) + 2a(a_{21} + b_{12}) + (ca_{12} - b_{21}b)] \},\end{aligned}$$

где $\omega^2 = ad - bc$.

Для нахождения L_1 в многомерном случае необходимо сначала найти систему на центральном многообразии с точностью до членов третьего порядка, а затем вычислить L_1 , используя вышеприведенную формулу. В случаях когда L_1 обращается в нуль, вычисление второго числа Ляпунова L_2 требует воссоздания центрального многообразия с точностью до ближайших последующих членов нечетного порядка, т. е. пятого порядка, и т. д.

Отметим, что при перемасштабировании переменной r в (9.3.13) $|L_k|$ можно сделать равным единице. Между тем очевидно, что замена переменных не приводит к изменению знака (а также номера) первой отличной от

нуля ляпуновской величины. Знак определяет, является ли данное состояние равновесия устойчивым или нет в момент бифуркации, тогда как номер определяет скорость стремления траекторий к нулю [см. (9.3.14)].

В ситуации, когда все ляпуновские величины равны нулю, поведение траектории можно описать только в аналитическом случае.

Теорема 9.3. Если все ляпуновские величины равны нулю, то соответствующая аналитическая система имеет аналитическое инвариантное (центральное) многообразие, которое заполнено замкнутыми траекториями, окружающими начало координат, как показано на рис. 9.3.3. На центральном многообразии система имеет голоморфный интеграл вида

$$U = \frac{x_1^2}{2} + \frac{\omega^2 x_2^2}{2} + V(x_1, x_2),$$

где функция V начинается с членов третьего порядка.

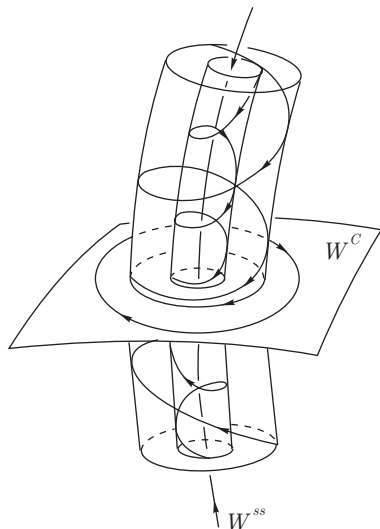


Рис. 9.3.3. Когда все ляпуновские величины обращаются в нуль в аналитической системе, состояние равновесия является центром на W^C . В $\mathbb{R}^3$ его окрестность расслаивается на инвариантные цилиндры

Напомним, что состояние равновесия, все траектории в окрестности которого замкнуты, называется *центром*. Центр является устойчивым по Ляпунову, но не асимптотически устойчивым. Пример системы с центром дается довольно обширным классом систем вида

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\omega x_2, \\ \dot{x}_2 &= \omega x_1 + f(x_1),\end{aligned}\tag{9.3.16}$$

где $f(0) = f'(0) = 0$. Легко видеть, что система (9.3.16) имеет первый интеграл (интеграл энергии)

$$U = \frac{x_1^2}{2} + \frac{\omega^2 x_2^2}{2} + \int_0^{x_1} f(\xi) d\xi.$$

В случае $\mathbb{C}^\infty$ начало координат не обязательно является центром, если все ляпуновские величины обращаются в нуль. Например, в системе

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \begin{cases} e^{-1/r^2}, & r \neq 0, \\ 0, & r = 0, \end{cases} \\ \dot{\theta} &= \omega\end{aligned}$$

состояние равновесия асимптотически устойчиво, а в системе

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \begin{cases} e^{-1/r^2} \sin(1/r), & r \neq 0, \\ 0, & r = 0, \end{cases} \\ \dot{\theta} &= \omega\end{aligned}$$

малая окрестность начала координат содержит бесконечное множество предельных циклов.

ГЛАВА 10

Поведение динамических систем на границах областей устойчивости периодических траекторий

10.1. Редукция отображения Пуанкаре. Функции Ляпунова

В отличие от состояний равновесия, границы устойчивости периодических траекторий могут быть двух различных типов:

- (1) На границе устойчивости периодическая траектория существует. По крайней мере один из ее мультипликаторов находится на единичной окружности.
- (2) Периодическая траектория исчезает на границе устойчивости.

В этой главе мы сосредоточимся на границе устойчивости первого типа¹. Так как в этом случае периодическая траектория в критический момент по-прежнему существует, мы можем построить малую секущую, и тогда наша задача сводится к изучению отображения Пуанкаре. В некоторых подходящих координатах на секущей отображение Пуанкаре можно записать в виде

$$\begin{aligned}\bar{x} &= Bx + G(x, y), \\ \bar{y} &= Ay + f(x, y),\end{aligned}\tag{10.1.1}$$

где $x = (x_1, \dots, x_m)$, $m \neq 0$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, f и g принадлежат C^r , $r \geq 1$, и обращаются в нуль в начале координат вместе со своими первыми производными. Характеристическое уравнение матрицы B

$$\det(B - \rho I) = 0$$

¹Границы второго типа соответствуют влипанию периодической орбиты в состояние равновесия (см. параграф 11.5), или гомоклинической петле, или «катастрофе голубого неба» (главы 12 и 13).

имеет m корней $\rho_1, \dots, \rho_m$, абсолютные значения которых равны 1. Корни $\rho_{m+1}, \dots, \rho_{m+n}$ характеристического уравнения

$$\det(A - \rho I) = 0$$

матрицы A лежат строго внутри единичной окружности.

В этой главе мы ограничиваем наш анализ тремя следующими основными случаями:

- (1) Ровно один мультипликатор лежит на единичной окружности и равен единице ($m = 1, \rho_1 = 1$).
- (2) Ровно один мультипликатор лежит на единичной окружности и равен минус единице ($m = 1, \rho_1 = -1$).
- (3) Два мультипликатора (комплексно-сопряженных) лежат на единичной окружности ($m = 2, \rho_{1,2} = e^{\pm i\omega}, 0 < \omega < \pi$).

Если мы запишем характеристическое уравнение

$$\Delta(\rho) = \rho^{m+n} + b_1\rho^{m+n-1} + \dots + b_{m+n} = 0,$$

соответствующее матрице $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$, то первый и второй критические случаи выделяются условиями $\Delta(1) = 0$ и $\Delta(-1) = 0$ соответственно или

$$1 + b_1 + \dots + b_{m+n} = 0$$

и

$$(-1)^{m+n} + b_1(-1)^{m+n-1} + \dots + b_{m+n} = 0.$$

Кроме того, необходимо удостовериться, что другие корни характеристического уравнения лежат внутри единичной окружности.

Чтобы вывести условие, которое соответствует третьему случаю, произведем замену переменных $\rho = (1 + \lambda)/(1 - \lambda)$. Значения ρ внутри единичной окружности соответствуют значениям λ в открытой левой полуплоскости. Те значения ρ , которые лежат на единичной окружности, соответствуют λ на мнимой оси. Таким образом, мы получаем третий критический случай, когда полином

$$\Delta\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)(1-\lambda)^{m+n} \equiv a_0\lambda^{m+n} + a_1\lambda^{m+n-1} + \dots + a_{m+n} \quad (10.1.2)$$

имеет ровно 2 чисто мнимых корня, а остальные лежат слева от мнимой оси. Соответствующие условия для коэффициентов a_i приведены в главе 9 (когда $a_0 = 1$). В общем случае условия имеют вид

$$\Delta_{n-1} = 0, \quad a_0 a_n > 0, \quad a_0^k \Delta_k > 0, \quad k = 1, \dots, n-2,$$

где Δ_k — определители Рауса–Гурвица для полинома (10.1.2).

Для трехмерной системы (т. е. для двумерных отображений Пуанкаре) характеристическое уравнение имеет вид

$$\rho^2 + b_1 \rho + b_2 = 0$$

и граница устойчивости определяется следующим образом:

■ первый критический случай ($\rho = 1$):

$$b_1 + b_2 = -1, \quad |b_2| < 1; \quad (10.1.3)$$

■ второй критический случай ($\rho = -1$):

$$b_1 = b_2 + 1, \quad |b_2| < 1; \quad (10.1.4)$$

■ третий критический случай ($\rho = e^{\pm i\omega}$):

$$b_2 = 1, \quad |b_1| < 2. \quad (10.1.5)$$

Чтобы вывести последнее условие, подставим $\rho = e^{i\omega}$ в характеристическое уравнение и получим

$$e^{2i\omega} + b_1 e^{i\omega} + b_2 = 0$$

или

$$\begin{cases} \cos 2\omega + b_1 \cos \omega + b_2 = 0, \\ \sin 2\omega + b_1 \sin \omega = 0. \end{cases}$$

Мы находим, что $b_1 = -2 \cos \omega$, $b_2 = -\cos 2\omega + 2 \cos^2 \omega$, и из этого следует (10.1.5).

Если система дифференциальных уравнений задана в $\mathbb{R}^3$, то произведение мультипликаторов периодической траектории должно быть положительным, т. е. $b_2 > 0$. Из (10.1.3)–(10.1.5) следует, что в (b_1, b_2) -плоскости область устойчивости периодической траектории трехмерной системы имеет трапецевидную форму, в отличие от области устойчивости неподвижной точки произвольного двумерного отображения, которая имеет форму треугольника, как показано на рис. 10.1.1. Случаи кратных коэффициентов $\rho_1 = \rho_2 = 1$ и $\rho_1 = \rho_2 = -1$ соответствуют двум вершинам треугольника A и B соответственно, и случай $\rho_1 = 1, \rho_2 = -1$ соответствует вершине C .

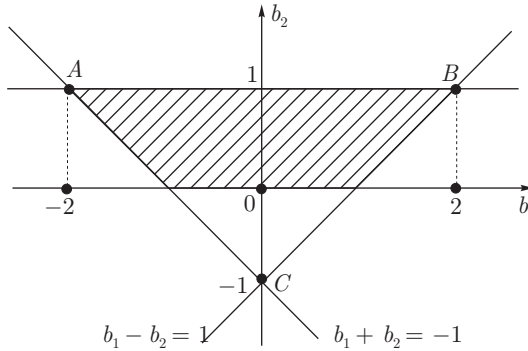


Рис. 10.1.1. Область устойчивости двумерного диффеоморфизма

Как показано в главе 5, критическая неподвижная точка $O(0, 0)$ лежит в инвариантном $\mathbb{C}^r$ -гладком центральном многообразии W^C , заданном уравнением $y = \Phi(x)$, где Φ обращается в нуль в начале координат вместе с ее первой производной. Более того, справедлива следующая теорема редукции.

В окрестности неподвижной точки O существует замена переменных класса $\mathbb{C}^{r-1}$ такая, что отображение Пуанкаре в новых переменных принимает стандартный вид

$$\bar{x} = Bx + g(x), \quad (10.1.6)$$

$$\bar{y} = [A + F(x, y)]y, \quad (10.1.7)$$

где $g(x) \equiv G(x, \Phi(x)) \in \mathbb{C}^r$, $F(x, y) \in \mathbb{C}^{r-1}$, $F(0, 0) = 0$.

В новых переменных центральное многообразие W^C имеет вид $y = 0$, а сильно устойчивое многообразие $W^{ss} - x = 0$.

Теорема редукции позволяет нам изучать динамику критических переменных x независимо от переменных y вблизи неподвижной точки. Что касается y -подпространства, динамика там относительно проста: так как норма переменной x мала, функция F в (10.1.3) также мала, и поэтому имеет место следующая оценка:

$$\|\bar{y}\| \leq \rho \|y\|,$$

где $1 > \rho > \max |\rho_j|$ ($j = m + 1, \dots, m + n$). Это означает, что каждая траектория экспоненциально стремится к центральному многообразию.

Таким образом, устойчивость неподвижной точки исходного отображения (10.1.1) эквивалентна устойчивости неподвижной точки отображения (10.1.6) на центральном многообразии, что мы формулируем следующим образом.

Теорема 10.1. *Если неподвижная точка O устойчива по Ляпунову на центральном многообразии W^C , то она также устойчива для исходного отображения (10.1.1). Если неподвижная точка асимптотически устойчива на центральном многообразии, то неподвижная точка исходной системы также является асимптотически устойчивой. Если неподвижная точка неустойчива на центральном многообразии W^C , то она неустойчива и для исходного отображения.*

Основным средством изучения устойчивости критических неподвижных точек являются функции Ляпунова.

Определение 10.1. Непрерывная функция $V(x)$, определенная в некоторой окрестности D точки O , называется функцией Ляпунова для системы (10.1.6), если она удовлетворяет следующим условиям:

$$(1) V(0) = 0; \quad (10.1.8)$$

$$(2) V(x) > 0 \quad \text{при } x \neq 0; \quad (10.1.9)$$

$$(3) V(\bar{x}) \leq V(x) \quad \text{при } x \neq 0. \quad (10.1.10)$$

Теорема 10.2. *Если существует функция $V(x)$, удовлетворяющая условиям (10.1.8)–(10.1.10), то неподвижная точка устойчива по Ляпунову. Более того, если неравенство (10.1.10) строгое при всех $x \neq 0$, то все положительные полутраектории в D стремятся к O , т. е. точка O является асимптотически устойчивой.*

Мы пропускаем доказательство, потому что оно идентично доказательству теоремы 9.2 об устойчивости состояний равновесия.

10.2. Первый критический случай

В случае когда ровно один мультипликатор $(+1)$ лежит на единичной окружности, отображение Пуанкаре имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x + g(x), \\ \bar{y} &= [A + F(x, y)] y, \end{aligned} \quad (10.2.1)$$

где x — скаляр, и

$$g(0) = g'(0) = 0, \quad F(0, 0) = 0.$$

Центральное многообразие W^C одномерно, таким образом, отображение на W^C можно записать в виде

$$\bar{x} = x + g(x) = x + l_2 x^2 + l_3 x^3 + \dots \quad (10.2.2)$$

Коэффициенты $l_2, \dots, l_k$ разложения Тейлора для функции $g(x)$ в O называются ляпуновскими величинами.

Исследуем поведение траекторий этого отображения. Пусть k — номер первой отличной от нуля ляпуновской величины: $l_2 = \dots = l_{k-1} = 0$, $l_k \neq 0$. Тогда отображение (10.2.2) принимает вид

$$\bar{x} = x + l_k x^k (1 + o(1)). \quad (10.2.3)$$

Если k — четное, $k = 2p$, то неподвижная точка O неустойчива. Поведение траекторий вблизи O описывается диаграммой Ламерея на рис. 10.2.1 (а). Если $l_k > 0$, то положительная полутраектория $\{x_j\}_{j=0}^{j=\infty}$ точки x_0 слева от O стремится к O при $j \rightarrow +\infty$. Для любой точки x_0 справа от O существует такое $J > 0$, что x_J выходит из окрестности O . Если $l_k < 0$ (этот случай сводится к предыдущему с помощью отображения $x \rightarrow -x$), то траектории, начинающиеся при положительных x , стремятся к O при $j \rightarrow +\infty$, но со стороны отрицательных x точка O неустойчива, см. рис. 10.2.1 (b).

Если k нечетное, $k = 2p + 1$, то отображение имеет вид

$$\bar{x} = x + l_{2p+1} x^{2p+1} (1 + o(1)). \quad (10.2.4)$$

Если $l_{2p+1} < 0$, то $|\bar{x}| = |x|(1 - |l_{2p+1}| x^{2p} (1 + o(1))) < |x|$ при $x \neq 0$. Это означает, что $|x|$ является функцией Ляпунова, таким образом, неподвижная точка O асимптотически устойчива, как показано на рис. 10.2.2 (а). Наоборот, если $l_{2p+1} > 0$, то $|\bar{x}| > |x|$ и O неустойчива, как показано на рис. 10.2.2 (b).

Поведение траекторий исходного отображения (10.2.1) следующее.

Случай 1. $l_2 = \dots = l_{2p-1} = 0, l_{2p} \neq 0$.

Сильно устойчивое многообразие $W^{ss} : x = 0$ разделяет окрестность O на узловую и седловую области. В узловой области все траектории стремятся к O вдоль $y = 0$ [т.к. координата y экспоненциально убывает, в то время как координата x убывает медленнее, чем любая геометрическая прогрессия: $|\bar{x}| > (1 - \varepsilon)|x|$ в силу (10.2.3)]. В седловой области все траектории, кроме расположенных на луче $W_+^C : \{y = 0, x \geq 0\}$, покидают окрестность O за конечное число итераций (см. рис. 10.2.3). Траектории в W_+^C стремятся к O при $j \rightarrow -\infty$. Таким образом, W_+^C является *локальным*

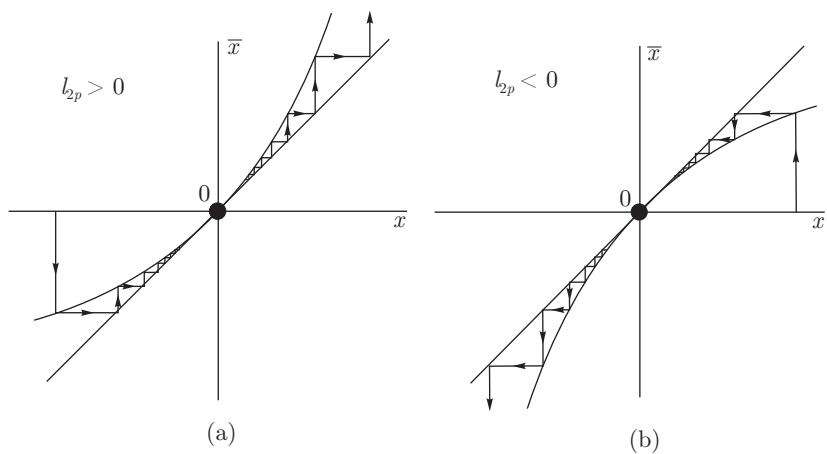


Рис. 10.2.1. Диаграмма Ламерея для случаев, когда $l_{2p} > 0$ (a) и $l_{2p} < 0$ (b)

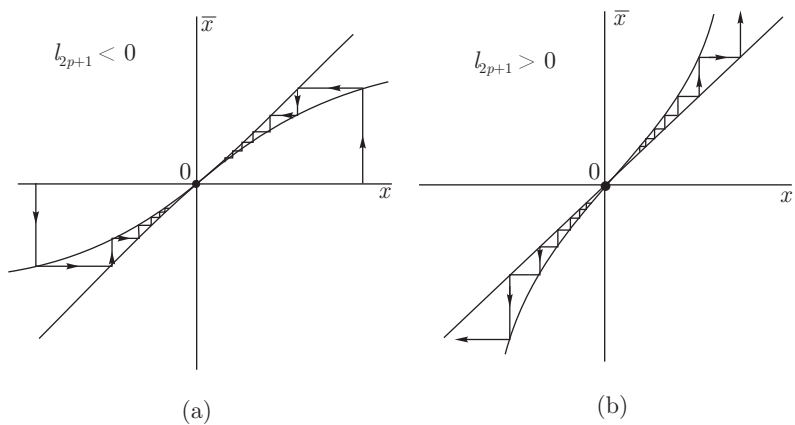


Рис. 10.2.2. Неподвижная точка в начале координат устойчива, когда $l_{2p+1} < 0$ (a), и неустойчива, когда $l_{2p+1} > 0$ (b)

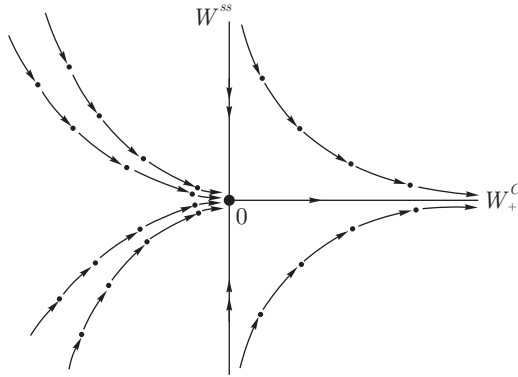


Рис. 10.2.3. Итерированный седло-узел двумерного отображения

неустойчивым многообразием O^2 . Как и соответствующее критическое состояние равновесия в случае дифференциальных уравнений, рассматриваемая неподвижная точка O называется седло-узлом: *простым*, если $p = 1$ (т.е. $l_2 \neq 0$), и *сложным* (или *вырожденным*), если $l_2 = 0$.

Сейчас мы можем описать поведение траекторий в малой окрестности периодической траектории L , которой соответствует неподвижная точка O отображения Пуанкаре. Поведение траекторий в двумерном случае показано на рис. 10.2.4 и в многомерном случае — на рис. 10.2.5. Инвариантное сильно устойчивое многообразие W_L^{ss} (совокупность траекторий, которые начинаются из точек W_O^{ss} на сечении) разделяет окрестность L на узловую и седловую области. В узловой области все траектории стремятся к L при $t \rightarrow +\infty$, таким образом, L в этой области орбитально устойчива. В седловой области траектории покидают окрестность L за конечный промежуток времени, исключая траектории в локальном неустойчивом многообразии $W_{loc}^u(L)$, которые стремятся к L при $t \rightarrow -\infty$. Такая периодическая траектория также называется *седло-узлом*. Термины *полуустойчивый* или *p-кратный* (двойной, когда $l_2 = 0$) *предельный цикл* используются для систем на плоскости.

Случай 2. $l_2 = \dots = l_{2p} = 0, l_{2p+1} < 0$.

Здесь неподвижная точка асимптотически устойчива. Все траектории, кроме принадлежащих неведущему многообразию W^{ss} : $x = 0$, входят в O по ведущему направлению $y = 0$, как показано на рис. 10.2.6 (а). Поведение

²Отметим, что это многообразие с краем (которым является O).

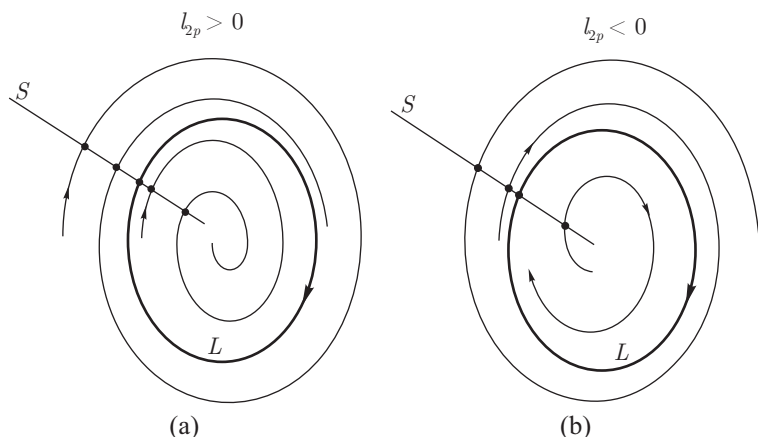


Рис. 10.2.4. Периодические орбиты типа седло-узел в $\mathbb{R}^2$: (а) цикл L устойчив в внутренней области и неустойчив во внешней области. Когда $l_{2p} < 0$, он является притягивающим для точек внутри него и отталкивающим для внешних траекторий (б)

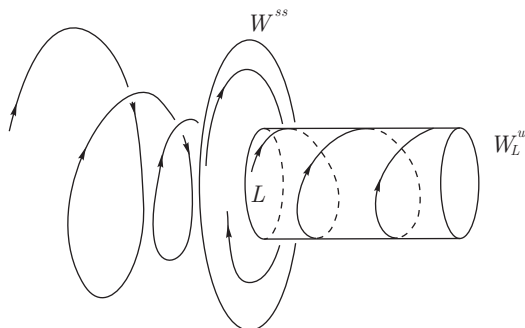


Рис. 10.2.5. Седло-узловая периодическая орбита в $\mathbb{R}^3$. Ее сильно устойчивое инвариантное многообразие разделяет две области: узловую, в которой периодическая орбита устойчива, и седловую область. Неустойчивое многообразие W_L^u гомеоморфно полуцилиндру. Этот рисунок потребуется нам еще много раз

траекторий в окрестности предельного цикла, соответствующего критической неподвижной точке, показано на рис. 10.2.7 (а). Многомерная картина выглядит так же, как для грубой устойчивой периодической траектории, но в критическом случае сходимость траекторий к L не экспоненциальна.

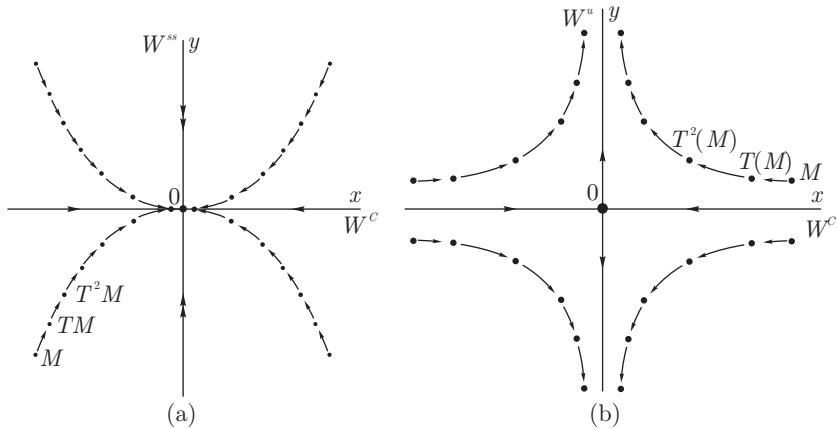


Рис. 10.2.6. Геометрически нет разницы между критическим узлом $l_{2p} < 0$ (a) и грубым устойчивым узлом. То же самое относится к грубой седловой неподвижной точке и критическому седлу с $l_{2p+1} > 0$ (b)

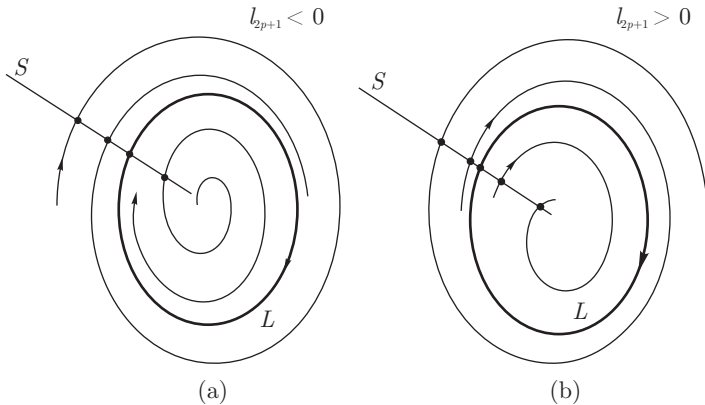


Рис. 10.2.7. Бифурцирующий предельный цикл устойчив, если $l_{2p+1} < 0$ (a), и неустойчив, если $l_{2p+1} > 0$ (b)

Случай 3. $l_2 = \dots = l_{2p} = 0, l_{2p+1} > 0$.

Такая критическая неподвижная точка называется *сложным (вырожденным) седлом*. Ее устойчивым многообразием является $W^c : y = 0$, а неустойчивым многообразием W^u служит $x = 0$, как показано на рис. 10.2.7 (b).

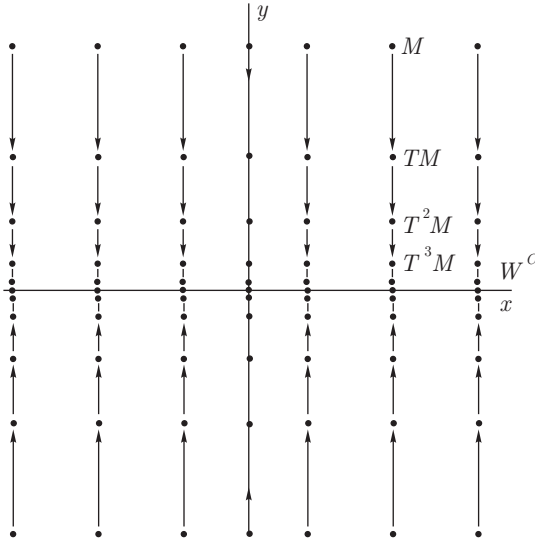


Рис. 10.2.8. Центральное многообразие W^C , заполненное неподвижными точками

Если все ляпуновские величины равны нулю и отображение аналитическое, то центральное многообразие также является аналитическим и состоит из неподвижных точек (рис. 10.2.8). Действительно, если отображение имеет вид

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x + g(x, y), \\ \bar{y} &= Ay + f(x, y),\end{aligned}\tag{10.2.5}$$

то первая отличная от нуля ляпуновская величина является первым отличным от нуля коэффициентом разложения Тейлора для $g(x, \phi(x))$, где $y = \phi(x)$ — решение уравнения

$$Ay + f(x, y) = y.\tag{10.2.6}$$

Отсюда, если все числа Ляпунова обращаются в нуль, то из аналитичности f следует, что

$$f(x, \phi(x)) \equiv 0.\tag{10.2.7}$$

Из (10.2.5)–(10.2.7) мы делаем вывод, что аналитическая кривая $y = \phi(x)$ целиком состоит из неподвижных точек и, следовательно, является инвариантным (центральным) многообразием.

Слой устойчивого инвариантного слоения проходит через каждую неподвижную точку $M \in W^C$ (см. главу 5). Очевидно, что каждый слой является устойчивым многообразием W_M^{ss} точки M ; траектории в слое экспоненциально сходятся к M при $j \rightarrow +\infty$.

В неаналитическом случае трудно сформулировать какое-либо общее утверждение относительно динамики отображения, когда все ляпуновские величины равны нулю (тогда неподвижная точка называется *полностью вырожденной* или *бесконечно вырожденной*)³ Например, для отображения

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x + \begin{cases} x e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \\ \bar{y} &= y/2\end{aligned}$$

начало координат является седлом, тогда как для отображения

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x + \begin{cases} \sin(1/x) e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \\ \bar{y} &= y/2\end{aligned}$$

оно устойчиво, но не асимптотически.

В заключение мы подчеркнем, что бесконечно вырожденные неподвижные точки являются довольно распространенными. Так, в пространстве гладких динамических систем размерности три и выше существуют области, называемые областями Ньюхауза, где системы с бесконечно вырожденными периодическими траекториями всюду плотны (см. Гонченко и др. [62]). Отметим, что эти области существуют вблизи любой системы с невырожденным (квадратичным) гомоклиническим касанием, которое в свою очередь характерно почти для любой известной модели со сложным (хаотическим) поведением. Таким образом, мы можем сделать вывод, что почти каждая динамическая модель со сложным поведением имеет области в пространстве параметров, где произвольно малое возмущение системы может породить бесконечно вырожденные периодические орбиты (больших периодов).

³Точнее, неподвижная точка $\mathbb{C}^r$ -гладкого отображения является *полностью вырожденной*, если $l_2 = \dots = l_r = 0$, и неподвижная точка $\mathbb{C}^\infty$ -отображения называется *бесконечно вырожденной*, если все l_i обращаются в нуль.

10.3. Второй критический случай

В этом случае отображение Пуанкаре в стандартном виде записывается как

$$\begin{aligned}\bar{x} &= -x + g(x), \\ \bar{y} &= [A + f(x, y)]y,\end{aligned}\tag{10.3.1}$$

где x — скалярная переменная, все характеристические числа A находятся строго внутри единичной окружности и функции f и g таковы, что

$$g(0) = g'(0) = 0, \quad f(0, 0) = 0.$$

Рассмотрим отображение T^C на центральном многообразии W^C :

$$\bar{x} = -x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots\tag{10.3.2}$$

Мультипликатор ρ равен -1 . Отсюда, резонансными отношениями являются

$$\rho = \rho^{2p+1}.$$

Так как четные значения x не резонансные, то соответствующие члены вплоть до любого конечного порядка можно убить посредством конечного числа гладких замен переменных (см. параграф 3.13). В результате отображение приводится к нормальной форме

$$\bar{\xi} = -\xi(1 + l_1\xi^2 + \dots + l_p\xi^{2p} + \dots),\tag{10.3.3}$$

где коэффициенты l_j называются ляпуновскими величинами. Первый коэффициент задается формулой

$$l_1 = a_2^2 + a_3.$$

Динамика траекторий отображения T^C зависит от первой отличной от нуля ляпуновской величины. Если $l_k \neq 0$ и все предыдущие $l_j = 0$ для $j < k$, то отображение принимает вид

$$\bar{\xi} = -\xi(1 + l_k\xi^{2k} + \dots).\tag{10.3.4}$$

Следовательно, если $l_k < 0$, то неподвижная точка O в начале координат асимптотически устойчива (так как $|\bar{\xi}| < |\xi|$ для $\xi \neq 0$, т. е. $|\xi|$ является функцией Ляпунова). Если $l_k > 0$, точка O неустойчива. Рисунки 10.3.1 (а) и (б) изображают диаграммы Ламерея для отрицательных и положительных значений l_k соответственно.

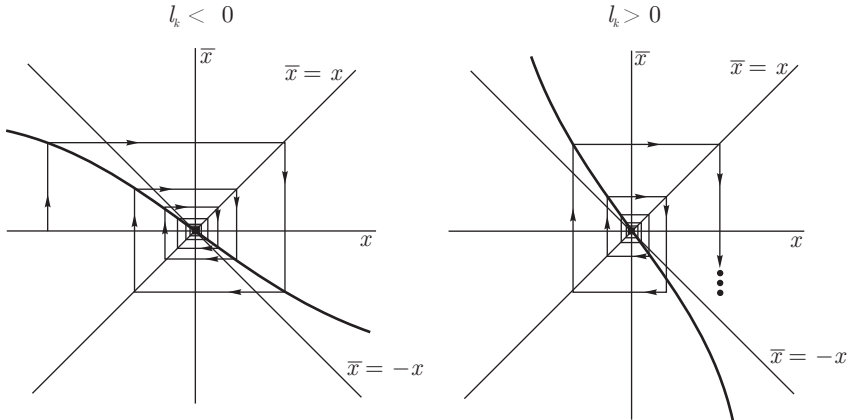


Рис. 10.3.1. Спирали Ламеря: начало координат устойчиво, когда $l_k < 0$ (а), и неустойчиво, когда $l_k > 0$ (б)

Заметим, что вторая итерация отображения (10.3.4)

$$\bar{\bar{\xi}} = \xi + 2l_k \xi^{2k+1} + \dots \quad (10.3.5)$$

имеет такой же вид, что и отображение, рассмотренное в предыдущем параграфе (случаи 2 и 3).

Что касается исходного отображения (10.3.1), неподвижная точка O является асимптотически устойчивой, когда $l_k < 0$, и седлом, когда $l_k > 0$. В последнем случае устойчивое и неустойчивое многообразия O суть W^{ss} и W^C соответственно. Если рассматриваемое отображение — это отображение Пуанкаре системы дифференциальных уравнений, то соответствующая периодическая траектория L устойчива, когда $l_k < 0$, и седловая, когда $l_k > 0$. Отметим, что в седловом случае двумерное неустойчивое многообразие $W^C(L)$ в окрестности периодической траектории является лентой Мёбиуса.

Если все ляпуновские величины равны нулю и система аналитическая, то центральное многообразие — также аналитическое и все точки на нем, исключая O , являются периодическими с периодом 2. Для системы дифференциальных уравнений это означает, что существует неориентируемое центральное многообразие в виде ленты Мёбиуса, для которого цикл L является медианой и которое заполнено периодическими орбитами с периодами, близкими к удвоенному периоду L (см. рис. 10.3.2).

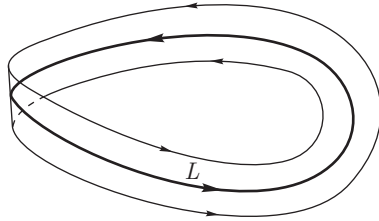


Рис. 10.3.2. Когда все ляпуновские величины обращаются в нуль, центральным многообразием периодической орбиты L аналитической системы является лента Мёбиуса, заполненная периодическими траекториями удвоенного периода

Если отображение относится к классу $\mathbb{C}^{2r+1}$, где $1 \leq r \leq \infty$, и если все ляпуновские величины $l_1, \dots, l_r$ обращаются в нуль, неподвижная точка O называется *полностью вырожденной* или *бесконечно вырожденной*, когда $r = \infty$.

Сейчас мы опишем алгоритм вычисления первой отличной от нуля ляпуновской величины для отображений, которые не приведены к нормальной форме. Сначала мы записываем отображение в виде

$$\begin{aligned}\bar{x} &= -x + g(x, y), \\ \bar{y} &= Ay + f(x, y),\end{aligned}\tag{10.3.6}$$

где

$$f(0, 0) = 0, \quad f'(0, 0) = 0, \quad g(0, 0) = 0, \quad g'(0, 0) = 0,$$

и рассматриваем его вторую итерацию

$$\begin{aligned}\bar{\bar{x}} &= x + \tilde{g}(x, y), \\ \bar{\bar{y}} &= A^2y + \tilde{f}(x, y),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{g}(x, y) &\equiv -g(x, y) + g(-x + g(x, y), Ay + f(x, y)), \\ \tilde{f}(x, y) &\equiv Af(x, y) + f(-x + g(x, y), Ay + f(x, y)).\end{aligned}$$

Пусть $y = \tilde{\psi}(x)$ — решение уравнения

$$A^2y + \tilde{f}(x, y) = y.$$

Тогда искомая ляпуновская величина равна одной второй первого коэффициента разложения Тейлора функции $\tilde{g}(x, \tilde{\psi}(x))$:

$$\tilde{g}(x, \tilde{\psi}(x)) = 2l_p x^{2p+1} + \dots$$

10.4. Третий критический случай. Слабые резонансы

Предположим, что два мультипликатора периодической орбиты являются комплексно-сопряженными и лежат на единичной окружности. В этом случае отображение Пуанкаре принимает вид

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= x_1 \cos \omega - x_2 \sin \omega + g_1(x_1, x_2), \\ \bar{x}_2 &= x_1 \sin \omega + x_2 \cos \omega + g_2(x_1, x_2), \\ \bar{y} &= (A + f(x_1, x_2, y))y,\end{aligned}\tag{10.4.1}$$

где $0 < \omega < \pi$ и все характеристические числа A лежат внутри единичной окружности. Центральное многообразие здесь двумерно и отображение на нем задается первыми двумя уравнениями в (10.4.1):

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= x_1 \cos \omega - x_2 \sin \omega + g_1(x_1, x_2), \\ \bar{x}_2 &= x_1 \sin \omega + x_2 \cos \omega + g_2(x_1, x_2),\end{aligned}\tag{10.4.2}$$

где $g_{1,2}$ обращаются в нуль в начале координат вместе со своими первыми производными.

Мультипликаторами неподвижной точки в начале координат являются $\rho_1 = e^{i\omega}$, и $\rho_2 = e^{-i\omega}$. Аналогично случаю состояния равновесия с двумя чисто мнимыми характеристическими показателями (см. параграф 9.3) здесь имеются резонансы типа:

$$\rho_1 = \rho_1^{p+1} \rho_2^p \quad (\rho_2 \equiv \rho_1^* = \rho_2^{p+1} \rho_1^p).\tag{10.4.3}$$

Следовательно, в правой части нормальной формы появятся следующие члены:

$$\begin{aligned}(L_p x_1 - \Omega_p x_2) (x_1^2 + x_2^2)^p, \\ (L_p x_2 + \Omega_p x_1) (x_1^2 + x_2^2)^p.\end{aligned}\tag{10.4.4}$$

Мы будем называть резонансные отношения (10.4.4) тривиальными. Если, кроме того, ω соизмеримо с 2π , т. е.

$$\omega = \frac{2\pi M}{N},$$

где M и N — положительные целые числа, не имеющие общих делителей, то имеются другие, нетривиальные резонансные соотношения. Чтобы найти их, запишем резонансное соотношение с неизвестными p и q :

$$\rho_1 = \rho_1^p \rho_2^q$$

или

$$e^{i\omega(p-q-1)} = 1. \quad (10.4.5)$$

Прологарифмировав обе части (10.4.5), получаем

$$i\omega(p - q - 1) = 2\pi il,$$

где l — целое число. Подставляя $\omega = 2\pi M/N$, получаем

$$M(p - q - 1) = Nl. \quad (10.4.6)$$

Для целых l равенство (10.4.6) выполняется, если и только если

$$p = q + Ns + 1, \quad (10.4.7)$$

где $s \in \mathbb{Z}$. Мы будем полагать, что в (10.4.7) $s \geq 0$. В противном случае, для отрицательных s , перепишем (10.4.7) в виде

$$q = p + Ns - 1, \quad (10.4.8)$$

где s теперь положительно. Отметим, что подстановка $s = 0$ в (10.4.7) дает $p = q + 1$, что соответствует тривиальному резонансу.

Таким образом, в случае когда ω соизмеримо с 2π , нормальная форма, наряду с членами вида (10.4.4), содержит и другие члены, определяемые соотношениями (10.4.7) и (10.4.8) с $s > 0$.

Чтобы вывести нормальную форму, повторим процедуру, описанную в параграфе 9.3, и введем комплексные переменные таким образом, чтобы линейная часть превратилась в диагональную. Обозначим

$$z = x_1 + ix_2$$

и запишем (10.4.2) следующим образом:

$$\bar{z} = e^{i\omega} z + \sum_{p,q} C_{pq} z^p z^{*q}. \quad (10.4.9)$$

Далее применим преобразование

$$z = w + \sum_{s,t} \alpha_{st} w^s w^{*t} \quad (10.4.10)$$

такое, что отображение в новых переменных

$$\bar{w} = e^{i\omega} \left(w + \sum_{p,q} C'_{pq} w^p w^{*q} \right) \quad (10.4.11)$$

обладало бы наибольшим возможным числом нулевых коэффициентов C'_{pq} .

Подставляя (10.4.10) в (10.4.9) и собирая коэффициенты при членах $w^p w^{*q}$, мы получаем следующие отношения, связывающие C_{pq} с C'_{pq} :

$$C'_{pq} + \alpha_{pq}[e^{i\omega(p-q-1)} - 1] = e^{-i\omega} C_{pq} \quad (10.4.12)$$

при $p + q = 2$ и

$$C'_{pq} + \alpha_{pq}[e^{i\omega(p-q-1)} - 1] = e^{-i\omega} C_{pq} + S_{pq}(\alpha_{st}) \quad (10.4.13)$$

при $p + q > 2$. Здесь $S_{pq}(\alpha_{st})$ — некий полином, который зависит только от α_{st} с индексами s и такими t , что $s + t < p + q$. Отсюда мы можем вычислить коэффициенты α_{pq} , начиная с $p + q = 2$. Так, если

$$e^{i\omega(p-q-1)} \neq 1,$$

то соответствующий коэффициент C'_{pq} можно занулить, если положить

$$a_{pq} = \frac{e^{-i\omega} C_{pq} + S_{pq}}{e^{i\omega(p-q-1)} - 1}.$$

Когда $p = q + 1$ или если имеет место любое из отношений (10.4.7)–(10.4.8), тогда

$$e^{i\omega(p-q-1)} = 1$$

и, вообще говоря, C'_{pq} не зануляется. В этом случае мы полагаем $\alpha_{pq} = 0$, и затем резонансный коэффициент C'_{pq} выражается через C_{pq} как

$$C'_{pq} = e^{-i\omega} C_{pq} + S_{pq}(\alpha_{st}),$$

где S_{pq} — полином из (10.4.13).

Дальнейшие вычисления удобно производить с учетом того, соизмеримо ли ω с 2π или нет. Нерезонансный случай, когда $\omega/2\pi$ иррационально, довольно прост, потому что тогда возникают только тривиальные резонансы. Следовательно, полиномиальное преобразование приводит отображение к виду

$$\bar{w} = e^{i\omega} w(1 + C'_{21}|w|^2 + \dots + C'_{p+1,p}|w|^{2p}) + o(|w|^{2p+1}) \quad (10.4.14)$$

для произвольно заданного p (не превышающего $(r-1)/2$, где r — гладкость отображения). В полярных координатах $w = R e^{i\varphi}$ отображение (10.4.14) принимает вид

$$\begin{aligned} \bar{R} &= R + L_1 R^3 + \dots + L_p R^{2p+1} + o(R^{2p+1}), \\ \bar{\varphi} &= \varphi + \omega + \Omega_1 R + \dots + \Omega_p R^{2p} + o(R^{2p}), \end{aligned} \quad (10.4.15)$$

где величины L_k и Ω_k выражаются через $C'_{j,j+1}$ при $j \leq k$. Например,

$$\begin{aligned} L_1 &= \alpha_1, & \Omega_1 &= \beta_1, \\ L_2 &= \alpha_2 + \beta_1^2/2, & \Omega_2 &= \beta_2 - \beta_1\alpha_1/2, \end{aligned} \quad (10.4.16)$$

где $C'_{k+1,k} \equiv \alpha_k + i\beta_k$.

Числа L_k называются ляпуновскими величинами.

Теорема 10.3. Пусть L_k — первая отличная от нуля ляпуновская величина ($L_k \neq 0$, $L_i = 0$, при $i < k$). Тогда неподвижная точка O асимптотически устойчива, когда $L_k < 0$, и неустойчива, когда $L_k > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (10.4.15) мы имеем

$$\bar{R} = R(1 + L_k R^{2k} + o(R^{2k})). \quad (10.4.17)$$

Следовательно, если $L_k < 0$, то $\bar{R} < R$, т. е. $V(R, \varphi) \equiv R$ — функция Ляпунова, и поэтому неподвижная точка асимптотически устойчива. В случае $L_k > 0$ мы имеем

$$R = \bar{R}(1 - L_k \bar{R}^{2k} + o(\bar{R}^{2k})),$$

откуда $\bar{R} > R$. Таким образом, R — функция Ляпунова для обратного отображения, из чего следует неустойчивость неподвижной точки. Конец доказательства. $\blacksquare$

ЗАМЕЧАНИЕ. Из формулы (10.4.16) следует, что в общем случае устойчивость неподвижной точки определяется величиной $\text{Re} C'_{21} \equiv L_1$. Если $\text{Re} C'_{21} < 0$, то неподвижная точка устойчива. В противном случае, когда $\text{Re} C'_{21} > 0$, неподвижная точка неустойчива.

Можно показать, что C'_{21} задается следующей формулой:

$$C'_{21} = C_{20}C_{11} \frac{2e^{iw} - 1}{1 - e^{iw}} e^{-2iw} - 2 \frac{|C_{02}|^2}{1 - e^{3iw}} - \frac{|C_{11}|^2}{1 - e^{iw}} + C_{21}e^{-iw},$$

где C_{pq} — коэффициенты из (10.4.9). Таким образом, первая ляпуновская величина равна

$$\begin{aligned} L_1 &= \text{Re}(C_{20}C_{11}) \frac{\cos 3w - 3 \cos 2w + 2 \cos w}{2(1 - \cos w)} + \\ &+ \text{Im}(C_{20}C_{11}) \frac{\sin 3w - 3 \sin 2w + 2 \sin w}{2(1 - \cos w)} - \\ &- |C_{02}|^2 - \frac{1}{2}|C_{11}|^2 + \text{Re } C_{21} \cdot \cos w + \text{Im } C_{21} \cdot \sin w. \end{aligned}$$

Рассматриваемая неподвижная точка O называется либо *сложным (слабым) устойчивым фокусом*, либо *сложным (слабым) неустойчивым фокусом* в зависимости от знака ляпуновской величины.

Если $L_k < 0$, то для исходного многомерного отображения (10.4.1) неподвижная точка также является устойчивым фокусом. Более того, ее ведущее многообразие совпадает с центральным многообразием W^C . Это означает, что все положительные полутраектории, исключая расположенные в неведущем многообразии W^{ss} , стремятся к O вдоль спиралей, касательных к W^C в O . Периодическая орбита, соответствующая неподвижной точке O , также является асимптотически устойчивой. Близлежащие траектории стремятся к периодической орбите, закручиваясь вокруг нее, как показано на рис. 10.4.1.

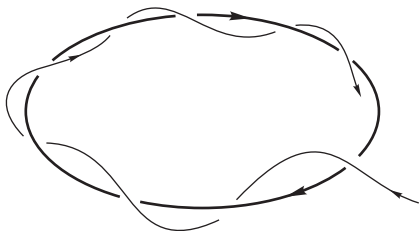


Рис. 10.4.1. Траектория стремится к периодической орбите, закручиваясь вокруг нее

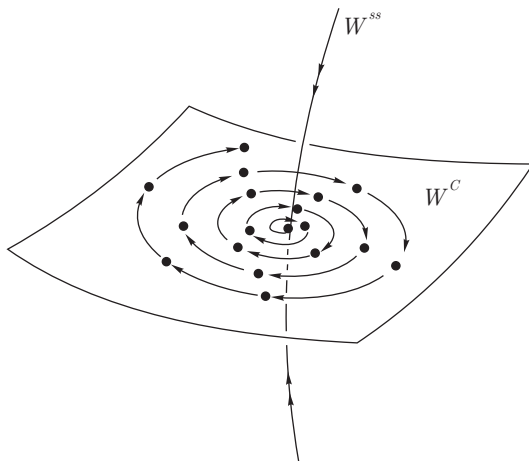


Рис. 10.4.2. Итерированный седло-фокус

В случае когда ляпуновская величина L_k положительна, неподвижная точка исходного отображения является *слабым седло-фокусом*. Ее устойчивым и неустойчивым многообразиями являются W^{ss} и W^C соответственно, как показано на рис. 10.4.2.

В резонансном случае существует две группы нетривиальных резонансных соотношений (10.4.7) и (10.4.8), а также тривиальные резонансы. Для соответствующих значений p и q коэффициент перед α_{pq} в формулах (10.4.12) и (10.4.13) обращается в нуль, и моном $w^p w^{*q}$ сохраняется после нормализующего преобразования (10.4.10). Отсюда отображение (10.4.2) приводится к следующей нормальной форме:

$$\begin{aligned}
 \bar{w} &= e^{2\pi i M/N} \left(w + \sum_{p \geq 1} C'_{p+1,p} w^{p+1} w^{*p} + \sum_{p \geq 0, s \geq 1} C'_{p,p+N s-1} w^p w^{*p+N s-1} + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{q \geq 0, s \geq 1} C'_{q+N s+1,q} w^{q+N s+1} w^{*q} \right) + o(|w|^{2P+1}) = \\
 &= e^{2\pi i M/N} \left(w \left(1 + \sum_{p \geq 1} C'_{p+1,p} |w|^{2p} \right) + \sum_{s \geq 1} w^{*N s-1} \sum_{p \geq 1} C'_{p,p+N s-1} |w|^{2p} + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{s \geq 1} w^{N s+1} \sum_{q \geq 1} C'_{q+N s+1,q} |w|^{2q} \right) + o(|w|^{2P+1}), \tag{10.4.18}
 \end{aligned}$$

где суммирование ведется по всем индексам, таким что степени мономов не превышают $(2P+1)$ для некоторого положительного целого P , которое можно выбрать сколь угодно большим, но не превышающим $(r-1)/2$, где r — гладкость системы.

Из формулы (10.4.18) следует, что в зависимости от значения N имеет место один из трех следующих случаев:

- (1) $N = 3 : \bar{w} = e^{2\pi i/3} (w + C'_{02} w^{*2}) + o(|w|^2);$
- (2) $N = 4 : \bar{w} = e^{\pi i/2} (w + C'_{21} |w|^2 w + C'_{03} w^{*3}) + o(|w|^3);$ и
- (3) $N \geq 5 : \bar{w} = e^{2\pi i M/N} (w + C'_{21} |w|^2 w) + o(|w|^3).$

Мы видим, что для сильно резонансных значений $\omega = 2\pi/3$ и $\omega = \pi/2$ нормальная форма отличается от нормальной формы для других ω в главном порядке. Мы будем рассматривать сильные резонансы в следующем параграфе, а здесь обсудим слабые резонансы: $\omega = 2\pi M/N$, $N \geq 5$.

В данном случае отображение (10.4.18) можно записать в виде

$$\bar{w} = e^{2\pi i M/N} \left(w \left(1 + \sum_{p \geq 1} C'_{p+1,p} |w|^{2p} \right) + C'_{0,N-1} w^{*N-1} \right) + o(|w|^{N-1}), \quad (10.4.19)$$

где суммирование ведется по всем p , для которых $2p+1 < N-1$. В полярных координатах

$$\begin{aligned} \bar{R} &= R + L_1 R^3 + \dots + L_P R^{2P+1} + o(R^{N-2}), \\ \bar{\varphi} &= \varphi + \omega + \Omega_1 R^2 + \dots + \Omega_P R^{2P} + o(R^{N-3}), \end{aligned} \quad (10.4.20)$$

где P — наибольшее целое число, меньшее $(N/2 - 1)$.

Формула (10.4.20) аналогична формуле (10.4.14) для нерезонансного случая, и единственным отличием является то, что в случае слабого резонанса определено только конечное число ляпуновских величин $L_1, \dots, L_P$ (например, когда $N = 5$, определено только L_1). Если хотя бы одно из этих ляпуновских величин не равно нулю, то верна теорема 10.3; т. е. в зависимости от знака первой отличной от нуля ляпуновской величины неподвижная точка является либо устойчивым сложным фокусом, либо неустойчивым сложным фокусом (в многомерном случае — сложным седло-фокусом).

10.5. Сильные резонансы

Напомним, что сильные резонансы соответствуют значениям частоты $\omega = 2\pi/3$ и $\omega = \pi/2$. В первом случае нормальная форма имеет вид

$$\bar{w} = e^{2\pi i/3} (w + C'_{02} w^{*2}) + o(|w|^2). \quad (10.5.1)$$

Мы будем рассматривать только случай, когда $C'_{02} \neq 0$. Пусть $C = |C'_{02}|$ и $e^{i\alpha} = C'_{02}/C$. Тогда преобразование $w \rightarrow we^{i\alpha/3} C^{-1}$ сводит отображение к

$$\bar{w} = e^{2\pi i/3} (w + w^{*2}) + o(|w|^2). \quad (10.5.2)$$

Определение 10.2. m -веер — это множество, гомеоморфное совокупности m лучей, выходящих из одной точки (вершины веера).

Определение 10.3. Неподвижная точка на плоскости, устойчивым многообразием W^s и неустойчивым многообразием W^u которой являются m -веера с вершиной в неподвижной точке такие, что между любыми двумя соседними лучами W^s имеется один луч W^u и наоборот, называется седлом с $2m$ сепаратрисами.

Теорема 10.4. *Неподвижная точка O отображения (10.5.2) неустойчива и является седлом с восемью сепаратрисами, как показано на рис. 10.5.1.*

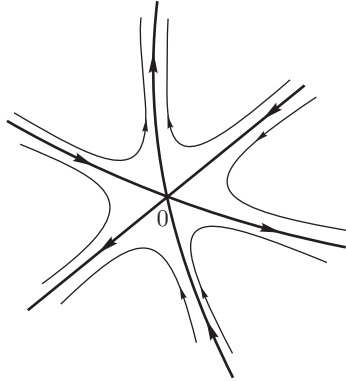


Рис. 10.5.1. Седло с шестью сепаратрисами

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Удобнее рассматривать не само отображение (10.5.2), а его третью итерацию. Мы имеем

$$\begin{aligned}\overline{\overline{w}} &= e^{2\pi i/3}(\overline{w} + \overline{w}^{*2} + \dots) = e^{4\pi i/3}(w + 2w^{*2} + \dots), \\ \overline{\overline{\overline{w}}} &= w + 3|w^*|^2 + \dots,\end{aligned}\tag{10.5.3}$$

где многоточия обозначают члены третьего порядка и выше.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{w} = w^{*2},\tag{10.5.4}$$

для которого отображение по траекториям за время $t = 3$ имеет вид (10.5.3). Чтобы увидеть это, перепишем (10.5.4) в виде

$$w_t = w_0 + \int_0^t w_s^{*2} ds.\tag{10.5.5}$$

Эта формула позволяет найти решение (10.5.4) как предел последователь-

ных приближений $w_t^{(n)}$:

$$w_t^{(n+1)} = w_0 + \int_0^t (w_s^{(n)*})^2 ds. \quad (10.5.6)$$

Для первого приближения мы имеем

$$w_t^{(1)} = w_0 + tw_0^{*2};$$

для второго —

$$w_t^{(2)} = w_0 + tw_0^{*2} + t^2 w_0^* w_0^2 + t^3 w_0^4 / 3.$$

Легко видеть, что все приближения совпадают вплоть до членов второго порядка включительно и имеют вид

$$w_t^{(n)} = w_0 + tw_0^{*2} + o(|w|^2).$$

Следовательно, решение уравнения (10.5.4) имеет тот же вид⁴. Таким образом, отображение сдвига вдоль траекторий системы (10.5.4) за время $t = 3$ имеет вид (10.5.3).

Систему (10.5.3) можно проинтегрировать. Для этого введем полярные координаты. Получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} R e^{i\varphi} &= R^2 e^{-2i\varphi}, \\ \dot{R} + iR\dot{\varphi} &= R^2 e^{-3i\varphi} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \dot{R} &= R^2 \cos 3\varphi, \\ \dot{\varphi} &= -R \sin 3\varphi. \end{aligned}$$

После замены времени $Rdt \rightarrow dt$ система приводится к виду

$$\begin{aligned} \dot{R} &= R \cos 3\varphi, \\ \dot{\varphi} &= -\sin 3\varphi. \end{aligned} \quad (10.5.7)$$

Заметим, что функция

$$H = R^3 \sin 3\varphi$$

⁴Вообще говоря, необходимо доказать, что последовательные приближения сходятся; это можно легко проверить: если временной интервал t конечен и если $|w_0|$ достаточно мал, мы можем использовать банахов принцип сжимающихся отображений.

есть первый интеграл системы (10.5.7). Линии уровня функции H , которые являются интегральными кривыми системы (10.5.7), находятся легко. Уровень $H = 0$, который содержит состояние равновесия, задается уравнением $\sin 3\varphi = 0$ и является 6-веером с лучами

$$\varphi = \pi n/3, \quad (n = 0, \dots, 5).$$

Уравнение движения на лучах с четными n

$$\dot{R} = R,$$

и, таким образом, R неограниченно возрастает вдоль лучей при $t \rightarrow +\infty$.

Уравнение движения на лучах с нечетными n

$$\dot{R} = -R,$$

т. е. R стремится к нулю при $t \rightarrow -\infty$. Таким образом, лучи

$$\varphi = 2\pi n/3$$

являются неустойчивыми сепаратрисами состояния равновесия, а лучи

$$\varphi = \pi(2n + 1)/3$$

— устойчивыми ($n = 0, 1, 2$). Остальные траектории имеют вид гипербол, асимптоты которых при $t \rightarrow +\infty$ и $t \rightarrow -\infty$ являются устойчивыми и неустойчивыми сепаратрисами соответственно, как показано на рис. 10.5.2.

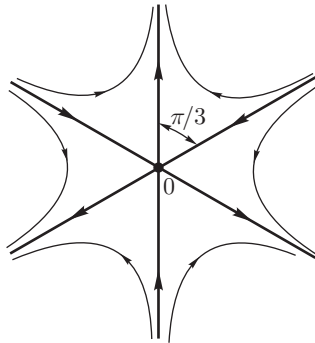


Рис. 10.5.2. Резонансная неподвижная точка с шестью сепаратрисами. Угол между каждой парой равен $\pi/3$

Очевидно, что для отображения сдвига по траекториям системы (10.5.4) неподвижная точка также имеет шесть вышеупомянутых сепаратрис, т. е.

теорема 10.4 верна в данном частном случае. Для того чтобы рассмотреть общий случай, напомним (см. параграф 3.14), что для произвольного отображения вблизи неподвижной точки некоторая итерация отображения может быть вплоть до членов произвольно высокого порядка аппроксимирована отображением сдвига по траектории некоторой автономной системы дифференциальных уравнений⁵. Такая система для отображения (10.5.3) имеет вид

$$\dot{w} = w^{*2} + g(w, w^*), \quad (10.5.8)$$

где $g = o(|w|^2)$. Для того чтобы найти функцию g , можно записать разложение Тейлора с неопределенными коэффициентами для правой части (10.5.8) и затем, используя метод последовательных приближений, найти коэффициенты разложения Тейлора для отображения сдвига как функции от коэффициентов Тейлора для g . Приравнявая подобные члены в полученном отображении сдвига и в исходном отображении (10.5.3), мы получаем систему уравнений, из которой можно найти коэффициенты Тейлора для g . Разрешимость системы уравнений обеспечивается теоремой 3.23.

Точно отображение (10.5.3) задается отображением сдвига неавтономной системы вида

$$\dot{w} = w^{*2} + g(w, w^*) + \tilde{g}(w, w^*, t), \quad (10.5.9)$$

где $\tilde{g}$ — периодическая по t функция с периодом $T = 3$; при этом члены, зависящие от t , можно считать произвольно малыми (порядка $o(|w|^r)$, где r — гладкость системы).

В полярных координатах эта система записывается как

$$\begin{aligned} \dot{R} &= R^2 \cos 3\varphi + g_1(R, \varphi) + \tilde{g}_1(R, \varphi, t), \\ \dot{\varphi} &= -R \sin 3\varphi + g_2(R, \varphi) + \tilde{g}_2(R, \varphi, t), \end{aligned} \quad (10.5.10)$$

где $g_1 = O(R^3)$, $g_2 = O(R^2)$ и

$$\tilde{g}_1 = o(R^r), \quad \tilde{g}_2 = o(R^{r-1}). \quad (10.5.11)$$

Опуская неавтономные члены, получаем

$$\begin{aligned} \dot{R} &= R^2 \cos 3\varphi + g_1(R, \varphi), \\ \dot{\varphi} &= -R \sin 3\varphi + g_2(R, \varphi). \end{aligned} \quad (10.5.12)$$

После замены времени

$$d\tau = R dt \quad (10.5.13)$$

⁵Можно взять такую произвольную неавтономную периодическую во времени систему, что рассматриваемое отображение будет для этой системы отображением Пуанкаре. После этого применяется нормализующая процедура, описанная в параграфе 3.14.

эта система принимает следующий вид, в главном порядке совпадающий с (10.5.7):

$$\begin{aligned}\dot{R} &= R \cos 3\varphi + O(R^2), \\ \dot{\varphi} &= -\sin 3\varphi + O(R).\end{aligned}\tag{10.5.14}$$

Мы не будем пока отождествлять точки, соответствующие $R = 0$ при различных значениях φ . Таким образом, фазовое пространство системы (10.5.14) становится полуцилиндром. На инвариантной окружности $R = 0$ есть шесть состояний равновесия

$$(R = 0, \varphi = \varphi_n \equiv \pi n/3), \quad n = 0, \dots, 5, \tag{10.5.15}$$

найденных из уравнения $\sin 3\varphi = 0$. Состояния равновесия с четными n являются устойчивыми на окружности, а с нечетными n — неустойчивыми. Если мы выберем малое $\varepsilon > 0$, то положительная полутраектория любой траектории (отличной от $\varphi = 2\pi n/3$) из интервала $\varphi \in (\pi(2n-1)/3, \pi(2n+1)/3)$ входит в ε -окрестность точки $2\pi n/3$ за конечное время; отрицательная полутраектория входит в ε -окрестность одной из точек $\pi(2n-1)/3$ или $\pi(2n+1)/3$. Вследствие непрерывной зависимости от начальных данных, траектории системы (10.5.14), начинающиеся при достаточно малых R , ведут себя так же.

Докажем, что это верно и для траекторий неавтономной системы (10.5.10). Во-первых, рассмотрим более подробно перемасштабирование времени, заданное формулой (10.5.13). Смысл этой формулы заключается в том, что прежнее время t , которое параметризует траектории (10.5.12), является функцией от (R, φ) и от нового времени τ , которое параметризует траектории (10.5.14). При этом

$$t(\tau, R, \varphi) = \int_0^\tau \frac{ds}{R^*(s - \tau; R, \varphi)}, \tag{10.5.16}$$

где $R^*(s; R, \varphi)$ — это траектория системы (10.5.14), начинающаяся в точке (R, φ) при $s = 0$.

Так как $\dot{R}$ имеет порядок R в (10.5.14), то для конечного τ отношение R^*/R при произвольно малых R отделено от нуля и бесконечности. Видно также, что $\frac{\partial R^*}{\partial \varphi}$ имеет порядок R . Таким образом, из формулы (10.5.16) следует, что

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = O\left(\frac{1}{R}\right), \quad \frac{\partial t}{\partial \varphi} = O\left(\frac{1}{R}\right), \quad \frac{\partial t}{\partial R} = O\left(\frac{1}{R^2}\right) \tag{10.5.17}$$

для ограниченных τ .

Более того, легко видеть, что

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{R^*(-\tau; R, \varphi)}. \quad (10.5.18)$$

Так как эта производная не обращается в нуль, то формула (10.5.16) определяет также и τ как функцию от t и (R, φ) . Поэтому формулу (10.5.13) можно представить в виде

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial \tau}{\partial R} \dot{R} + \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = R, \quad (10.5.19)$$

где $\dot{R} = O(R^2)$ и $\dot{\varphi} = O(R)$ заданы уравнениями (10.5.12).

А сейчас рассмотрим систему (10.5.10) и совершим ту же самую замену времени, что и в автономной системе (10.5.12). А именно пусть новое время τ задается через (10.5.16), где R^* — решение (10.5.14). Полученную систему можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{R} &= \left(R \cos 3\varphi + \frac{1}{R} g_1(R, \varphi) + \frac{1}{R} \tilde{g}_1(R, \varphi, t(\tau, R, \varphi)) \right) \chi(\tau, R, \varphi), \\ \dot{\varphi} &= \left(-\sin 3\varphi + \frac{1}{R} g_2(R, \varphi) + \frac{1}{R} \tilde{g}_2(R, \varphi, t(\tau, R, \varphi)) \right) \chi(\tau, R, \varphi), \end{aligned} \quad (10.5.20)$$

где

$$\chi = R / \frac{d\tau}{dt} \equiv \frac{R}{\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial \tau}{\partial R} \dot{R} + \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} \dot{\varphi}}$$

с $\dot{R}$ и $\dot{\varphi}$, заданными уравнениями (10.5.10). Эти $\dot{R}$ и $\dot{\varphi}$ отличаются от (10.5.19) членами $\tilde{g}_1$ и $\tilde{g}_2$ порядка $o(R^r)$ и $o(R^{r-1})$ соответственно. Следовательно,

$$\chi = \frac{1}{1 - \frac{1}{R} \frac{\partial t}{\partial \tau} \left(\frac{\partial t}{\partial R} \tilde{g}_1 + \frac{\partial t}{\partial \varphi} \tilde{g}_2 \right)} = 1 + o(R^{r-2}) \quad (10.5.21)$$

при ограниченных τ (см. (10.5.17) и (10.5.18)).

Таким образом, получается, что неавтономная система (10.5.20) определена при $R = 0$, где она принимает вид

$$\dot{\varphi} = -\sin 3\varphi,$$

в точности как в автономной системе (10.5.14). Таким образом, неавтономная система (10.5.20) имеет те же состояния равновесия при $R = 0$, и, кроме того, все траектории, начинающиеся при малых R , входят в малую окрестность одного из этих состояний равновесия за конечное время.

Следовательно, чтобы изучить систему (10.5.20) при малых R , остается рассмотреть поведение траекторий в небольшой окрестности состояний равновесия.

Линейная часть системы (10.5.20) в состоянии равновесия ($R = 0, \varphi = \pi n/3$) эквивалентна линейной части системы (10.5.14):

$$\begin{aligned}\dot{R} &= R(-1)^n, \\ \dot{\varphi} &= 9(-1)^{n+1}\varphi + k_n R\end{aligned}$$

с какими-то k_n . Характеристические показатели равны $(-1)^n$ и $9(-1)^{n+1}$. Следовательно, для автономной системы (10.5.14) все состояния равновесия являются седлами. Состояния равновесия с четными n имеют неустойчивые сепаратрисы вида $\varphi = \pi n/3 + Rk_n/10 + O(R^2)$, а устойчивыми сепаратрисами являются дуги $\pi(n-1)/3 < \varphi < \pi n/3$ и $\pi n/3 < \varphi < \pi(n+1)/3$ на окружности $R = 0$. Состояния равновесия с нечетными n имеют устойчивые сепаратрисы вида $\varphi = \pi n/3 - Rk_n/10 + O(R^2)$, тогда как дуги $\pi(n-1)/3 < \varphi < \pi n/3$ и $\pi n/3 < \varphi < \pi(n+1)/3$ являются неустойчивыми сепаратрисами.

Теперь мы можем построить фазовый портрет системы (10.5.14) на полуцилиндре, как показано на рис. 10.5.3. Затем, при сжатии окружности $R = 0$ в точку, полученным состоянием равновесия $w = 0$ для (10.5.8) будет седло с шестью сепаратрисами, как показано на рис. 10.5.3 (а).

Для доказательства теоремы мы должны получить такой же результат для неавтономной системы (10.5.9). А именно, мы должны доказать существование (и единственность) устойчивой и неустойчивой сепаратрис для состояния равновесия ($R = 0, \varphi = \pi n/3$) системы (10.5.20). В силу симметрии задачи достаточно рассмотреть только одно состояние равновесия, скажем, с $n = 1$.

Согласно результатам параграфов 5.2 и 5.3, для доказательства существования и единственности устойчивой сепаратрисы седлового состояния равновесия неавтономной системы достаточно проверить, что в малой окрестности равновесия для всех положительных значений времени нелинейности остаются малы вместе со всеми производными. Таким образом, мы должны проверить, что функции $\tilde{g}_{1,2}(R, \varphi, t(R, \varphi, \tau))/R$ и $(\chi - 1)$ в правой части (10.5.20) остаются малыми вместе со всеми производными при

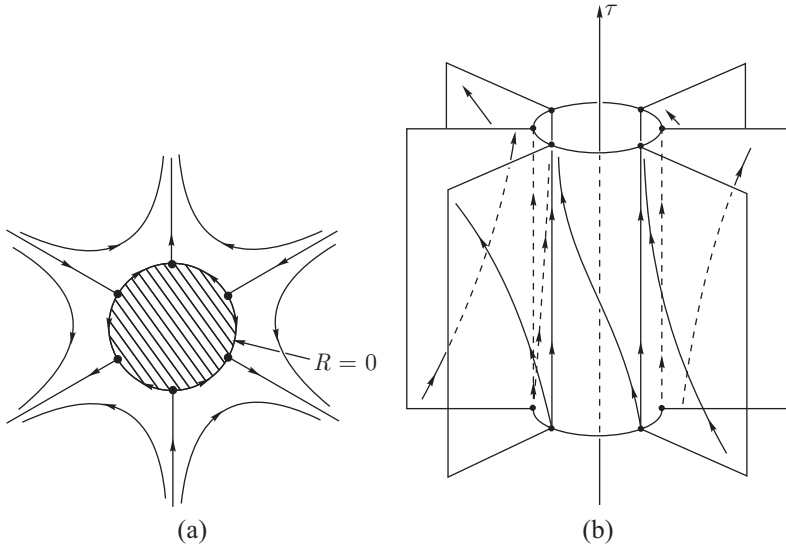


Рис. 10.5.3. Поперечное сечение цилиндра (a) и поведение траекторий на полуцилиндре (b)

условии, что

$$0 \leq R \leq \delta, \quad |\varphi - \pi/3| \leq \delta \quad (10.5.22)$$

для некоторого малого δ .

Непосредственно из (10.5.20) следует, что

$$R(\tau) \leq e^{-(1-\varepsilon)\tau} R(0)$$

в малой окрестности состояния равновесия для некоторого достаточно малого $\varepsilon > 0$. Поэтому достаточно проверить малость нелинейностей только в той части окрестности состояния равновесия, где

$$e^{(1-\varepsilon)\tau} \leq \frac{1}{R}, \quad \tau > 0. \quad (10.5.23)$$

Действительно, если нелинейности здесь малы, тогда вне множества, заданного (10.5.22) и (10.5.23), систему можно модифицировать таким образом, что она станет дихотомичной для всех (R, φ, τ) (более подробно см. параграф 5.2). Результаты параграфа 5.3. влекут существование и единственность инвариантного устойчивого многообразия для модифицированной системы. Любая положительная полутраектория на этом многообразии

априори удовлетворяет (10.5.23); следовательно, полученное инвариантное многообразие лежит в области, где система не модифицирована. Отсюда пересечение многообразия с малой окрестностью (10.5.22) состояния равновесия и есть искомое локальное инвариантное многообразие исходной системы.

Так как функции $\tilde{g}_{1,2}$, как и их производные по времени, имеют порядок по крайней мере $o(R^{r-2})$ (см. (10.5.11)), достаточно доказать, что производные от функции $t(\tau, R, \varphi)$ в (10.5.20) и (10.5.21) возрастают не быстрее, чем некоторые отрицательные степени R : когда гладкость r достаточно велика, это обеспечит требуемую малость нелинейностей в правой части (10.5.20). Теперь заметим, что собственные числа матрицы линеаризации системы (10.5.14) в состоянии равновесия больше или равны (-1) . Таким образом, при $s - \tau \leq 0$ мы имеем следующие оценки на решение R^* системы (10.5.14):

$$\operatorname{Re}^{(1-\varepsilon)(\tau-s)} \leq R^*(s - \tau; R, \varphi) \leq \operatorname{Re}^{(1+\varepsilon)(\tau-s)}$$

и

$$\frac{\partial^k R^*}{\partial(R, \varphi)^k} = O(e^{(k+\varepsilon)(\tau-s)})$$

для малого $\varepsilon > 0$. Подставляя эти оценки в формулу (10.5.16) для $t(\tau, R, \varphi)$ и используя (10.5.18) и (10.5.23), мы в конечном итоге получаем оценку

$$\frac{\partial^k t}{\partial(\tau, R, \varphi)^k} = O\left(\frac{1}{R^{k+1+\sigma}}\right)$$

с некоторым $\sigma > 0$, стремящимся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Как объяснено выше, этой оценки достаточно, чтобы доказать существование и единственность локального устойчивого многообразия состояния равновесия неавтономной системы (10.5.20).

Таким образом, мы установили существование и единственность инвариантных многообразий — поверхностей вида

$$\varphi = \pi n/3 + f_n(R, \tau)$$

в пространстве (φ, R, τ) , которые состоят из решений $(\varphi(\tau), R(\tau))$ системы (10.5.20) (см. рис. 10.5.3 (b)). Для нечетных n они являются устойчивыми многообразиями: на каждом значение R стремится к нулю при возрастании τ . Для четных n они являются неустойчивыми многообразиями.

Так как решения системы (10.5.20) являются решениями системы (10.5.10) до замены времени, мы доказали существование и единственность инвариантного устойчивого и неустойчивого многообразий стационарных состояний ($R = 0$, $\varphi = \pi n/3$) системы (10.5.10), которые образованы траекториями, стартующими при $t = 0$ на однозначно определенных

кривых $\mathcal{L}_n$, заданных уравнением

$$\varphi = \pi n/3 + f_n(R, 0). \quad (10.5.24)$$

Так как правая часть системы (10.5.10) периодична по t , то множество траекторий, которые начинаются при $t = 0$ из точек на образе $\tilde{\mathcal{L}}_n$ кривой $\mathcal{L}_n$ (под действием отображения вдоль траекторий системы за период), также составляет инвариантное многообразие. В силу единственности, это должно быть то же самое инвариантное многообразие, и, следовательно, $\tilde{\mathcal{L}}_n = \mathcal{L}_n$. Но отображением за период системы (10.5.10) является отображение (10.5.3). Таким образом, мы установили существование шести инвариантных многообразий $\mathcal{L}_0, \dots, \mathcal{L}_5$ (три устойчивых и три неустойчивых) неподвижной точки $w = 0$ заданного отображения, из чего следует теорема. ■

ЗАМЕЧАНИЕ. В многомерном случае, когда помимо центральных координат имеются также устойчивые координаты, неустойчивое множество состоит из трех кривых, а устойчивое множество является пучком, состоящим из трех полуплоскостей, пересекающихся вдоль неведущего многообразия W^{ss} , как показано на рис. 10.5.4 для трехмерного случая.

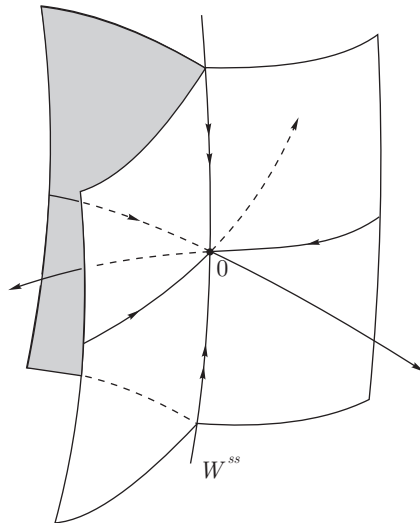


Рис. 10.5.4. Топология устойчивого и неустойчивого многообразий неподвижной точки в $\mathbb{R}^3$ в случае резонанса $2\pi/3$

А сейчас рассмотрим резонанс $\omega = \pi/2$. Для него нормальная форма отображения имеет вид

$$\bar{w} = e^{\pi i/2}(w + C'_{21}|w|^2w + C'_{03}w^{*3}) + o(|w|^3). \quad (10.5.25)$$

Мы будем полагать, что $C'_{03} \neq 0$. Далее, после преобразования $w \rightarrow e^{\alpha i/4}C^{1/4}$, где $C'_{03} = Ce^{i\alpha}$, отображение принимает вид

$$\bar{w} = e^{\pi i/2}(w + (L + i\Omega)|w|^2w + w^{*3}) + o(|w|^3), \quad (10.5.26)$$

где $L + i\Omega \equiv C'_{21}\sqrt{C}$.

Теорема 10.5. *В случае $L < 0$ и $L^2 + \Omega^2 > 1$ неподвижная точка асимптотически устойчива. В случае $L > 0$ и $L^2 + \Omega^2 > 1$ неподвижная точка вполне неустойчива; когда $L^2 + \Omega^2 < 1$, она является седлом с шестью сепаратрисами.*

Мы докажем теорему только для случая, когда четвертая итерация отображения (10.5.26)

$$\bar{w}^{(4)} = w + 4[(L + i\Omega)|w|^2w + w^{*3}] + o(|w|^3) \quad (10.5.27)$$

совпадает с отображением сдвига по времени некоторой автономной системы (общий случай можно рассмотреть в основном тем же способом, что и в предыдущей теореме).

Запишем автономную систему вида

$$\dot{w} = B_1|w|^2w + B_2w^{*3} + O(|w|^4) \quad (10.5.28)$$

с еще не определенными B_1 и B_2 . Перепишем (10.5.28) в виде

$$w_t = w_0 + \int_0^t (B_1|w_s|^2w_s + B_2w_s^{*3} + O(|w_s|^4)) ds$$

и построим ее решение методом последовательных приближений. На первом этапе мы имеем

$$w_t = w_0 + (B_1|w_0|^2w_0 + B_2w_0^{*3})t + O(|w_0|^4).$$

Легко доказать, что все приближения имеют такой же вид и, следовательно, решение уравнения (10.5.28) имеет такой же вид. Если мы положим $t = 4$,

то будет очевидно, что отображение (10.5.27) совпадает, вплоть до членов третьего порядка, с отображением сдвига вдоль траекторий любой системы вида

$$\dot{w} = (L + i\Omega)|w|^2 w + w^{*3} + g(w, w^*), \quad (10.5.29)$$

в котором g начинается с членов четвертого порядка. Как упомянуто выше, мы полагаем, что отображение (10.5.27) точно совпадает с отображением сдвига на $t = 4$ вдоль траекторий системы (10.5.29) при некотором g . Вводя полярные координаты $w = R e^{i\varphi}$, мы получаем

$$\begin{aligned} \dot{R} &= R^3(L + \cos 4\varphi) + O(R^4), \\ \dot{\varphi} &= R^2(\Omega - \sin 4\varphi) + O(R^3) \end{aligned}$$

или после преобразования времени $R^2 dt \rightarrow dt$:

$$\begin{aligned} \dot{R} &= R(L + \cos 4\varphi) + O(R^2), \\ \dot{\varphi} &= \Omega - \sin 4\varphi + O(R). \end{aligned} \quad (10.5.30)$$

Без потери общности мы можем полагать, что $\Omega \geq 0$, потому что преобразование $\varphi \rightarrow -\varphi$ не изменяет вид системы, но Ω меняет свой знак.

При $L = 0$ укороченная система (10.5.30)

$$\begin{aligned} \dot{R} &= R \cos 4\varphi, \\ \dot{\varphi} &= \Omega - \sin 4\varphi \end{aligned}$$

обладает первым интегралом

$$H = R^4(\Omega - \sin 4\varphi).$$

Заметим, что когда $L < 0$ и $\Omega > 1$, функция H является функцией Ляпунова для исходной системы (10.5.30) при достаточно малых R . Действительно, так как $\Omega > 1$, очевидно, что $H > 0$ при $R > 0$. Проверим, что $\dot{H} < 0$, т. е. $H'_R \dot{R} + H'_\varphi \dot{\varphi} < 0$. Последнее неравенство можно записать в виде

$$4R^4(\Omega - \sin 4\varphi)(L + \cos 4\varphi) - 4R^4(\Omega - \sin 4\varphi) \cos 4\varphi + O(R^5) < 0$$

или

$$4R^4(\Omega - \sin 4\varphi)L + O(R^5) < 0,$$

что, очевидно, выполняется при всех достаточно малых R , если $L < 0$ и $\Omega > 1$.

Существование функции Ляпунова влечет асимптотическую устойчивость, т. е. в этом случае теорема верна. Можно построить функцию Ляпунова для расширенной параметрической области: $\Omega^2 + L^2 > 1$, $L < 0$.

Для этого рассмотрим функцию $V = R^4(\beta - \sin 4\varphi)$ и докажем, что она является функцией Ляпунова при подходящем выборе β . Действительно, необходимо, чтобы $V > 0$ при $R > 0$, т. е.

$$\beta > 1, \quad (10.5.31)$$

и $\dot{V} < 0$, т. е. $V'_R \dot{R} + V'_\varphi \dot{\varphi} < 0$. Последнее неравенство принимает вид

$$4R^4(\beta - \sin 4\varphi)(L + \cos 4\varphi) - 4R^4(\Omega - \sin 4\varphi) \cos 4\varphi + O(R^5) < 0.$$

Чтобы неравенство выполнялось для достаточно малых R , достаточно иметь

$$(\beta - \sin 4\varphi)(L + \cos 4\varphi) - (\Omega - \sin 4\varphi) \cos 4\varphi < 0$$

для всех φ или

$$\beta L - L \sin 4\varphi + (\beta - \Omega) \cos 4\varphi < 0.$$

Это эквивалентно (так как $\beta L < 0$)

$$L^2 + (\beta - \Omega)^2 < \beta^2 L^2. \quad (10.5.32)$$

Можно легко проверить, что величина β , удовлетворяющая (10.5.31) и (10.5.32) для $L^2 + \Omega^2 > 1$, существует всегда: когда $\Omega > 1$, можно взять $\beta = \Omega$; когда $|L| \geq 1$, за β можно взять любое достаточно большое число; в любом другом случае полагаем $\beta = \Omega/(1 - L^2)$.

Если $L > 0$, то функция V является функцией Ляпунова для систем, полученных из (10.5.30) посредством обращения времени. Таким образом, состояние равновесия системы (10.5.29) и, следовательно, неподвижная точка отображения (10.5.27) здесь вполне неустойчивы.

Наконец, рассмотрим случай, когда $L^2 + \Omega^2 < 1$. Так же как и для резонанса $2\pi/3$, будем считать, что система определена на полуцилиндре. Тогда она будет обладать восемью состояниями равновесия

$$(R = 0, \varphi = \varphi_n), \quad (n = 0, \dots, 7),$$

где φ_n находится из уравнения

$$\Omega - \sin 4\varphi = 0. \quad (10.5.33)$$

Линейная часть системы в состоянии равновесия имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{R} &= R(L + \cos 4\varphi_n), \\ \dot{\varphi} &= -(4 \cos 4\varphi_n)\varphi + k_n R. \end{aligned}$$

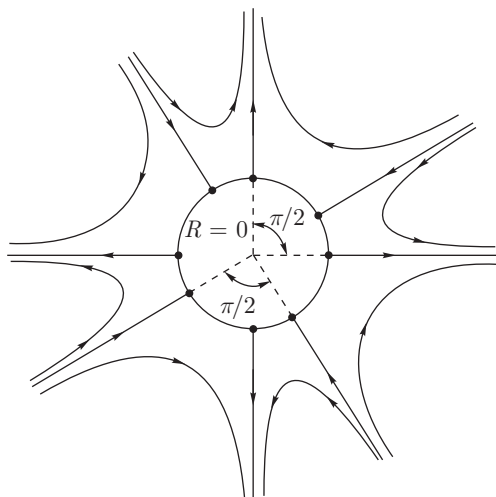
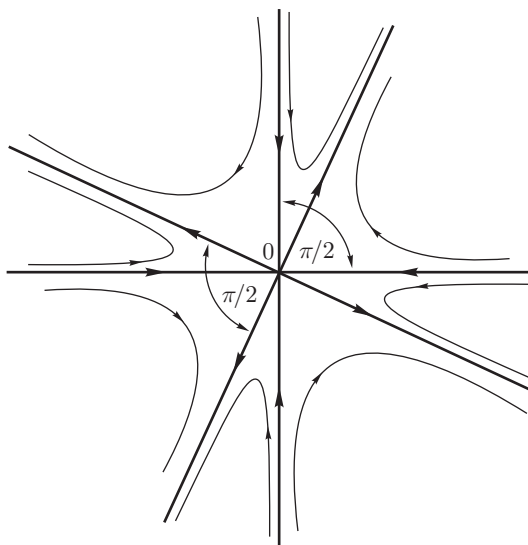


Рис. 10.5.5. Поперечное сечение полуцилиндра

Рис. 10.5.6. Каждая итерация поворачивает устойчивое (неустойчивое) многообразие на угол $\pi/2$

Определитель матрицы линеаризации равен

$$\Delta = -4 \cos 4\varphi_n (L + \cos 4\varphi_n).$$

Из (10.5.33) следует, что $|\cos 4\varphi_n| = (1 - \Omega^2)^{1/2}$, и поэтому $|\cos 4\varphi_n| > |L|$. Отсюда оба значения: $\cos 4\varphi_n$ и $(L + \cos 4\varphi_n)$ — имеют одинаковый знак, а определитель Δ отрицателен. Таким образом, мы нашли, что все состояния равновесия являются седлами, как и в случае $2\pi/3$. Фазовый портрет системы (10.5.30) на полуцилиндре показан на рис. 10.5.5. Если мы отождествим все точки с $R = 0$, результатом будет седло с восьмью сепаратрисами, как показано на рис. 10.5.6.

10.6. Переход через сильный резонанс на границе устойчивости

В предыдущих параграфах мы нашли, что качественное поведение сильно резонансной критической неподвижной точки существенно отличается от поведения нерезонансной и слабо резонансной. Закономерно возникает вопрос: «Что происходит с сильно резонансной точкой при изменении частоты?» В частности, в случае резонанса $\omega = 2\pi/3$ неподвижная точка, в общем случае, является седлом с шестью сепаратрисами, но когда вводится произвольно малая расстройка, точка становится слабым фокусом (устойчивым или неустойчивым, в зависимости от знака первой ляпуновской величины). Вопрос, на который мы сейчас ищем ответ: «Как перестраивается динамика до и после критического момента?»

На границе устойчивости отображение вблизи неподвижной точки для ω , близкого к $2\pi/3$, можно записать в следующем виде:

$$\bar{w} = e^{i(2\pi/3+\varepsilon)}(w + w^{*2} + C'_{21}|w|^2w + \dots), \quad (10.6.1)$$

где параметр ε характеризует отклонение от резонанса; мы считаем, что коэффициенты в правой части отображения, в частности C'_{21} , непрерывно зависят от ε . Обозначим отображение (10.6.1) через T_ε .

Теорема 10.6. Пусть $\operatorname{Re} C'_{21} < 1$. Тогда для любого малого $\varepsilon \neq 0$ точка $O(w = 0)$ устойчива. При этом отображение T_ε обладает седловой периодической траекторией (O_1, O_2, O_3) периода 3, которая лежит на расстоянии $O(\varepsilon)$ от точки O . Одна из двух неустойчивых сепаратрис каждой точки O_i стремится к O , другая неустойчивая сепаратриса покидает окрестность начала координат. Устойчивые сепаратрисы периодической траектории формируют границу области притяжения точки O (см. рис. 10.6.1).

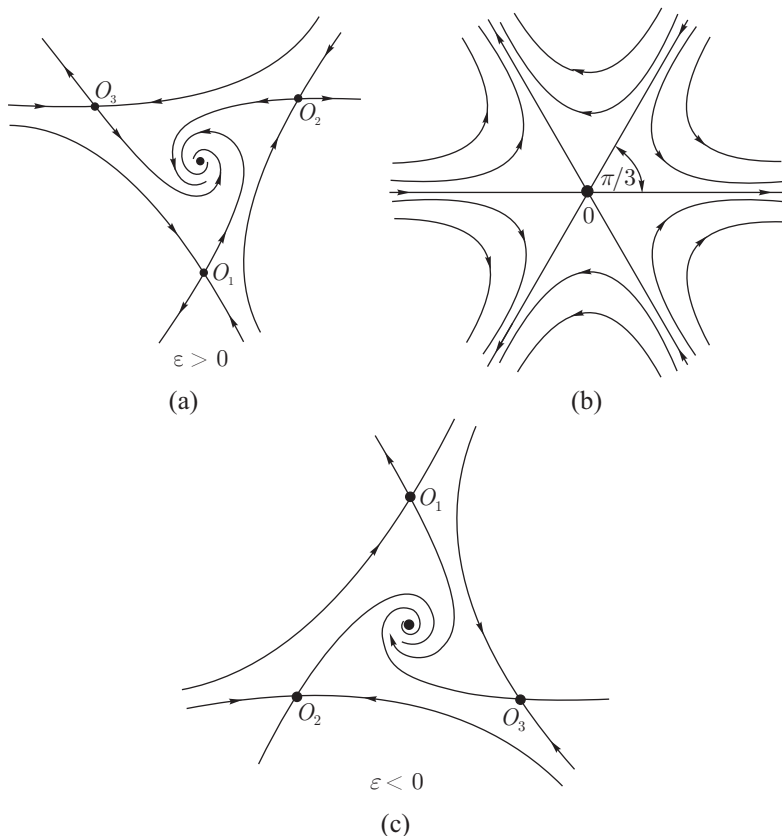


Рис. 10.6.1. Модификации фазового портрета при изменении ε . Неподвижная точка устойчива при положительных и отрицательных значениях ε . Направление вращения близи начала координат изменяется при изменении знака ε

Таким образом, при приближении параметра к сильному резонансу седловой цикл извне окрестности начала координат подходит к точке O . Точно в момент резонанса он влипаёт в O , так что последняя становится неустойчивой. При прохождении через резонанс цикл вновь отдаляется от точки O , и при дальнейшем изменении ε цикл покидает (малую) окрестность O . Случай, когда $\text{Re} C'_{21} > 0$, аналогичен, но результат применяется к обратному отображению T_ε^{-1} ; в этом случае при $\varepsilon \neq 0$ точка O является вполне неустойчивой.

Мы опустим доказательство теоремы 10.6.1, потому что оно является частью более общей задачи изучения бифуркаций сильно резонансных критических точек (см. Арнольд [20] и Гукенхеймер и Холмс [64]), что выходит за рамки этой книги. Мы же ограничимся здесь тем, что рассмотрим модельные примеры.

Рассмотрим третью итерацию отображения (10.6.1)

$$\overline{\overline{w}} = e^{3\varepsilon i}w + (1 + e^{3\varepsilon i} + e^{-3\varepsilon i})w^{*2} + (3C'_{21}e^{3\varepsilon i} + 4 + 2e^{-3\varepsilon i})|w|^2w + \dots, \quad (10.6.2)$$

где многоточие обозначает члены четвертого и больших порядков по $|w|$. Можно показать, что отображение (10.6.2) совпадает с отображением сдвига по времени на $t = 3$ для некоторого дифференциального уравнения вида

$$\dot{w} = i\varepsilon w + (1 + \alpha_1(\varepsilon))w^{*2} + (C'_{21} - 1 + \alpha_2(\varepsilon))|w|^2w + f(w, w^*, t), \quad (10.6.3)$$

где $\alpha_1(\varepsilon)$ и $\alpha_2(\varepsilon)$ — некоторые функции, стремящиеся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$, а функция f начинается с членов четвертого порядка малости (более подробно см. предыдущий параграф).

Для большей определенности, положим, что $\varepsilon > 0$ (когда $\varepsilon < 0$, рассуждения аналогичны). Проведем преобразование $w \rightarrow \varepsilon w e^{i \arg(1 + \alpha_1(\varepsilon))/3} / |1 + \alpha_1(\varepsilon)|$ и $t \rightarrow t/\varepsilon$. Уравнение (10.6.3) принимает вид

$$\dot{w} = iw + w^{*2} + \varepsilon(C'_{21}(0) - 1)|w|^2w + o(\varepsilon) \quad (10.6.4)$$

(напомним, что C'_{21} также является функцией от ε , т. е. $C'_{21}(0)$ — просто константа). Отбросим члены порядка $o(\varepsilon)$ и рассмотрим укороченное уравнение

$$\dot{w} = iw + w^{*2} + \varepsilon(C'_{21}(0) - 1)|w|^2w. \quad (10.6.5)$$

В полярных координатах $w = R e^{i\varphi}$ оно принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{R} &= R^2 \cos 3\varphi + \varepsilon L R^3, \\ \dot{\varphi} &= 1 - R \sin 3\varphi + \varepsilon \Omega R^2. \end{aligned} \quad (10.6.6)$$

В декартовых координатах $w = x + iy$ система (10.6.6) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x^2 - y^2 + \varepsilon(Lx - \Omega y)(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= x - 2xy + \varepsilon(\Omega x + Ly)(x^2 + y^2), \end{aligned} \quad (10.6.7)$$

где $C'_{21}(0) - 1 = L + i\Omega$ (напомним, что для рассматриваемого случая $\operatorname{Re} C'_{21} < 1$, т. е. $L < 0$).

При $\varepsilon = 0$ система, кроме точки O в начале координат, имеет 3 состояния равновесия $O_1(0, -1)$, $O_2(\sqrt{3}/2, 1/2)$ и $O_3(-\sqrt{3}/2, 1/2)$. Отметим, что прямые линии $y = 1/2$, $y = \sqrt{3}x - 1$ и $y = -\sqrt{3}x - 1$, проходящие через точки O_2O_3 , O_1O_2 и O_1O_3 соответственно, при $\varepsilon = 0$ инвариантны по отношению к системе (10.6.7). Более того, функция

$$H = (y - 1/2)(y - \sqrt{3}x + 1)(y + \sqrt{3}x + 1)$$

или в полярных координатах

$$H = 3R^2/2 - R^3 \sin 3\varphi - 1/2$$

является первым интегралом системы при $\varepsilon = 0$. Множество уровня $H = 0$ показано на рис. 10.6.2. Таким образом, точка O — центр, а O_1, O_2, O_3 — седла. Сепаратрисами седел являются инвариантные прямые. Более того, неустойчивая сепаратриса точки O_1 совпадает с устойчивой сепаратрисой точки O_2 и так далее, как изображено на рисунке. Таким образом, все вместе они составляют сепаратрисную связку.

Когда $\varepsilon \neq 0$, функция $(H + 1/2)$ является функцией Ляпунова для состояния равновесия в начале координат:

$$\dot{H} \equiv H'_R \dot{R} + H'_\varphi \dot{\varphi} = 3\varepsilon LR^4(1 + O(R)) < 0,$$

то есть начало координат асимптотически устойчиво. Состояния равновесия O_1, O_2, O_3 остаются седлами при малых ε . Априори возможны три варианта поведения их сепаратрис: (1) сохраняется сепаратрисная связка; (2) связка расщепляется, и неустойчивые сепаратрисы уходят наружу (рис. 10.6.3 (а)); или (3) связка расщепляется, и неустойчивые сепаратрисы входят внутрь (рис. 10.6.3 (б)). Покажем, что имеет место третий случай. Действительно, из (10.6.7) видно, что дивергенция правых частей системы отрицательна при $\varepsilon \neq 0$ ($\text{div} \equiv \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} = 3\varepsilon L(x^2 + y^2)$). Отсюда площадь любой области на плоскости должна убывать при положительном сдвиге по времени вдоль траекторий системы. С другой стороны, из рис. 10.6.2 и 10.6.3 (а) понятно, что если связка сохраняется или расщепляется наружу, то можно найти область, площадь которой не уменьшается при небольшом положительном сдвиге по времени ($S_t \geq S_0$, см. рисунки). Таким образом, сепаратрисная связка должна расщепляться, и неустойчивые сепаратрисы стремятся внутрь при всех малых ε .

Очевидно, что при $t \rightarrow +\infty$ неустойчивые сепаратрисы, которые входят внутрь, могут в принципе стремиться либо к точке O , как показано на

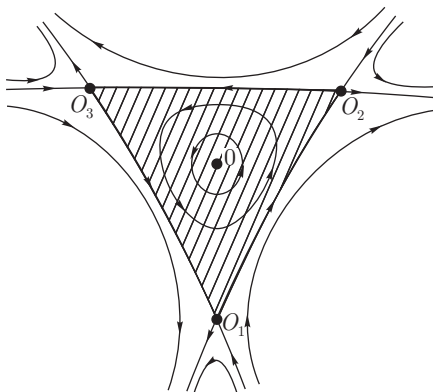


Рис. 10.6.2. Состояние равновесия является центром при $\varepsilon = 0$. Седловые состояния равновесия образуют гетероклинический цикл

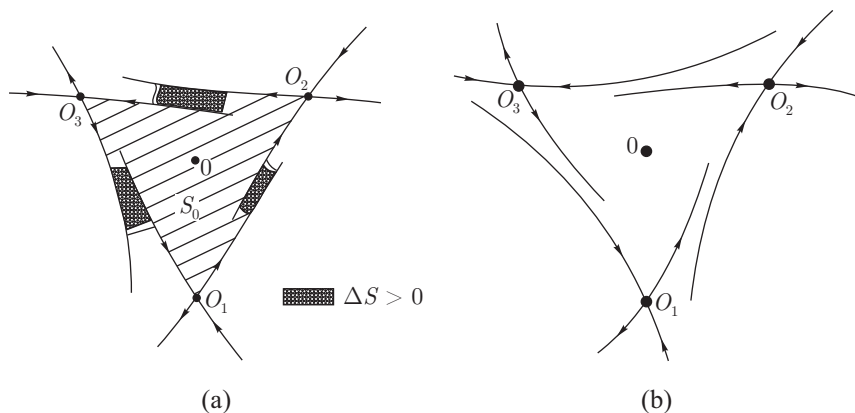


Рис. 10.6.3. Два возможных пути расщепления гетероклинической связки. См. рассуждения в тексте

рис. 10.6.1, либо к некоторой периодической траектории, окружающей начало координат, как показано на рис. 10.6.4. В последнем случае, однако, площадь, ограниченная этой траекторией, не будет уменьшаться при сдвиге вдоль траекторий системы, что противоречит отрицательности дивергенции. Это означает, что сепаратрисы должны стремиться к началу координат.

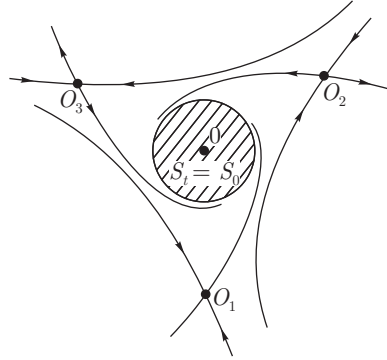


Рис. 10.6.4. Геометрическое объяснение отсутствия периодической орбиты, окружающей начало координат

Седловые состояния равновесия являются седловыми неподвижными точками отображения сдвига, и соответственно их сепаратрисы являются инвариантными многообразиями. Возвращаясь к исходным (не перемасштабированным) координатам, находим, что неподвижные точки лежат на расстоянии порядка ε от начала координат. Если бы третья итерация (10.6.2) отображения (10.6.1) была отображением сдвига редуцированной системы (10.6.5), то теорема следовала бы из наших аргументов, так как неподвижные точки O_1, O_2, O_3 третьих итераций соответствуют циклу периода 3 исходной системы.

Однако, вообще говоря, отображение (10.6.2) нельзя считать при всех ε отображением сдвига вдоль траекторий автономной системы. Следовательно, чтобы доказать, что перестройки фазового портрета действительно происходят как изображено на рис. 10.6.1, необходимо удостовериться (но мы не будем это делать), что инвариантные многообразия седловых неподвижных точек отображения сдвига неавтономной системы (10.6.4) достаточно близки к сепаратрисам усеченной системы (10.6.5).

В случае второго сильного резонанса $\omega = \pi/2$ ситуация сложнее. Рассмотрим семейство отображений T_ε вида

$$\bar{w} = e^{i(\pi/2+\varepsilon)}(w + w^{*3} + C'_{21}(\varepsilon)|w|^2w) + o(|w|^3), \quad (10.6.8)$$

которое проходит через резонанс при $\varepsilon = 0$. Обозначим $C'_{21}(0) = L + i\Omega$.

Теорема 10.7. Пусть $L < 0$. Тогда:

- (1) если $L < -1$, то для всех малых ε неподвижная точка $O(w = 0)$ является асимптотически устойчивой и притягивает все траектории из некоторой малой окрестности, которая не зависит от ε ;

- (2) если $L^2 + \Omega^2 < 1$, то для любого малого $\varepsilon \neq 0$ точка O асимптотически устойчива. При этом отображение T_ε имеет седловой цикл (O_1, O_2, O_3, O_4) периода 4 на расстоянии порядка $O(\sqrt{|\varepsilon|})$ от O . Одна из двух неустойчивых сепаратрис каждой точки O_i стремится к O , другая покидает окрестность начала координат. Устойчивые сепаратрисы седлового цикла образуют границу области притяжения точки O (см. рис. 10.6.5); и

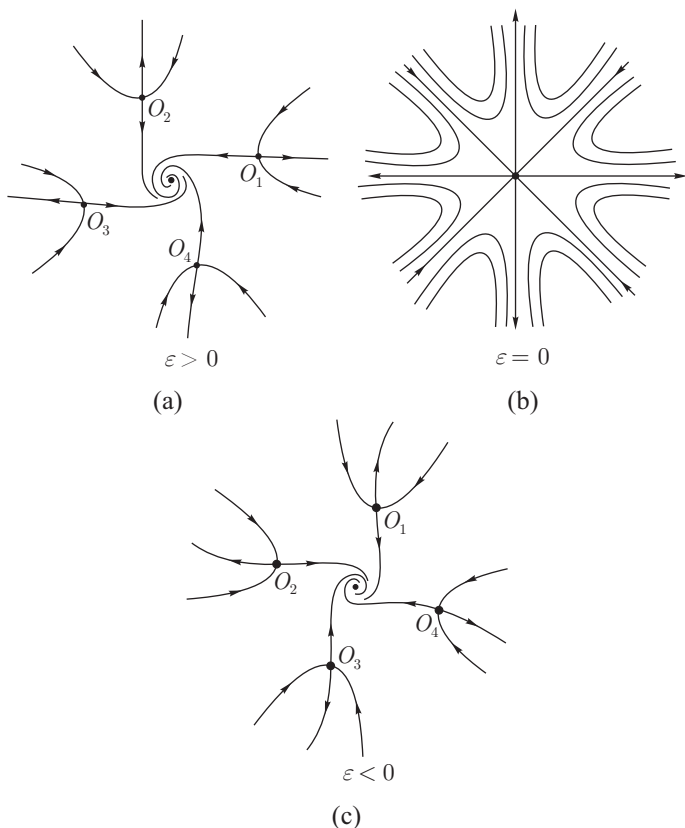


Рис. 10.6.5. Модификации фазового портрета при изменении ε (здесь $L^2 + \Omega^2 < 1$)

(3) если $0 > L > -1$ и $L^2 + \Omega^2 > 1$, то для всех малых ε точка O является асимптотически устойчивой и при $\varepsilon\Omega \geq 0$ она притягивает все траектории из малой окрестности, размеры которой не зависят от ε . Когда $\varepsilon\Omega < 0$, от точки O отрываются две траектории периода 4: седловой цикл (O_1, O_2, O_3, O_4) и устойчивый цикл (O'_1, O'_2, O'_3, O'_4) , как показано на рис. 10.6.6. Одна из неустойчивых сепаратрис точки O_i стремится к O , другая стремится к O'_i . Устойчивые сепаратрисы O_i отделяют область притяжения точки O от области притяжения цикла (O'_1, O'_2, O'_3, O'_4) .

Мы заменяем доказательство этой теоремы обсуждением только динамики редуцированной системы уравнений. Четвертая итерация отображения (10.6.8) имеет вид

$$\bar{w}^{(4)} = e^{4i\varepsilon}(w + 4C'_{21}(\varepsilon)|w|^2w) + w^{*3}(e^{4i\varepsilon} + e^{-4i\varepsilon})(1 + e^{-4i\varepsilon}) + o(|w|^3).$$

Это отображение совпадает со сдвигом на время $t = 4$ по траекториям некоторой неавтономной системы вида

$$\dot{w} = i\varepsilon w + (1 + \alpha_1(\varepsilon))w^{*3} + (L + i\Omega + \alpha_2(\varepsilon))|w|^2w + g(w, w^*, t),$$

где $g = o(|w|^3)$. Перенормировав w на $\sqrt{|\varepsilon|}$ и время t на $|\varepsilon|$ и взяв предел $\varepsilon \rightarrow 0$, мы получаем укороченную систему

$$\dot{w} = i\delta w + (L + i\Omega)|w|^2w + w^{*3}, \quad (10.6.9)$$

где $\delta = \pm 1 = \text{sign } \varepsilon$.

В декартовых координатах это уравнение записывается в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\delta y + (Lx - \Omega y)(x^2 + y^2) + x^3 - 3xy^2, \\ \dot{y} &= \delta x + (Lx + \Omega y)(x^2 + y^2) - 3x^2y + y^3, \end{aligned} \quad (10.6.10)$$

а в полярных координатах —

$$\begin{aligned} \dot{R} &= R^3(L + \cos 4\varphi), \\ \dot{\varphi} &= \delta + R^2(\Omega - \sin 4\varphi). \end{aligned} \quad (10.6.11)$$

Непосредственно из (10.6.11) следует, что $\dot{R} < 0$, когда $L < -1$. Поэтому все траектории системы (10.6.11) стремятся к началу координат, что соответствует утверждению теоремы.

Для того чтобы изучить систему в случае $0 > L > -1$, заметим, что дивергенция правой части отрицательна и равна $4L(x^2 + y^2) < 0$ (см. (10.6.10)). Следовательно (повторяя соответствующие доводы для системы (10.6.5)), система (10.6.10) не имеет ни замкнутых траекторий, ни сепаратрисных связок. Что касается состояний равновесия, их можно легко найти в полярных координатах (см. (10.6.11)).

Когда $L^2 + \Omega^2 > 1$, система обладает только одним состоянием равновесия (в начале координат), если $\Omega\delta > 0$. Это состояние равновесия устойчиво и притягивает все траектории системы. Для доказательства достаточно проверить, что функция

$$V = R^4(\beta - \sin 4\varphi) + 2\delta R^2 \quad (10.6.12)$$

является функцией Ляпунова при $\Omega > 0$ и $\delta = 1$, где β — величина, определяемая из соотношений (10.5.25)–(10.5.26) в предыдущем параграфе; случай $\Omega < 0$, $\delta = -1$ сводится к данному заменой переменных $\varphi \rightarrow -\varphi$. Когда $\Omega\delta < 0$, система имеет, помимо нулевого состояния равновесия, восемь дополнительных состояний равновесия; а именно: 4 седла O_1, O_2, O_3, O_4 и 4 устойчивых состояния равновесия O'_1, O'_2, O'_3, O'_4 . Координаты последних находятся из соотношений

$$\cos 4\varphi = -L, \quad \sin 4\varphi = -\delta\sqrt{1 - L^2}, \quad R^2 = \frac{1}{|\Omega| - \sqrt{1 - L^2}},$$

а седел — из

$$\cos 4\varphi = -L, \quad \sin 4\varphi = \delta\sqrt{1 - L^2}, \quad R^2 = \frac{1}{|\Omega| + \sqrt{1 - L^2}}.$$

Точка O является устойчивой; функция $(2R^2 - \delta R^4 \sin 3\varphi)$ является функцией Ляпунова при малых R . Очевидно, что устойчивые сепаратрисы седловых точек стремятся к бесконечности при $t \rightarrow -\infty$. В противном случае они должны стремиться к вполне неустойчивой периодической траектории или к вполне неустойчивому состоянию равновесия, но такие отсутствуют. Другая возможность заключается в том, что устойчивые сепаратрисы одного седла могут совпадать с неустойчивыми сепаратрисами другого седла, таким образом составляя сепаратрисный цикл, как показано на рис. 10.6.2, но с четырьмя седлами; однако это противоречит отрицательности дивергенции. Неустойчивые сепаратрисы также не могут стремиться к бесконечности при $t \rightarrow +\infty$. Для доказательства этого заметим, что, когда R велико, $\dot{V} < 0$ для функции V в (10.6.12). Поэтому все траектории системы при увеличении t должны попадать внутрь некоторой замкнутой кривой $V = C$ с достаточно большой C , где они остаются навсегда. Таким образом, единственным вариантом для неустойчивых сепаратрис точки O_i является то, что одна стремится к O , а другая — к O'_i , как показано на рис. 10.6.6.

При $L^2 + \Omega^2 < 1$ система имеет пять состояний равновесия: одно устойчивое тривиальное в начале координат и четыре других O_1, O_2, O_3, O_4 ,

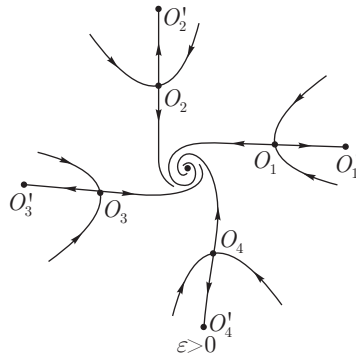


Рис. 10.6.6. Фазовый портрет при $\varepsilon\Omega < 0$ в случае, когда $-1 < L < 0$, $L^2 + \Omega^2 > 1$. При бифуркации седло-узла одновременно возникают четыре пары неподвижных точек

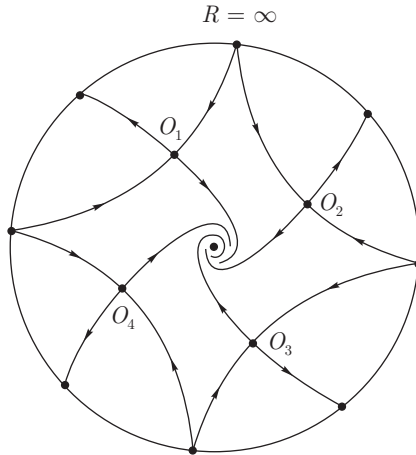


Рис. 10.6.7. Этот рисунок иллюстрирует, каким образом сепаратрисы седловой точки формируют глобальный фазовый портрет

которые являются седловыми точками для $\delta = 1$ и $\delta = -1$. Координаты состояний равновесия находятся из отношений:

$$\cos 4\varphi = -L, \quad \sin 4\varphi = \delta\sqrt{1-L^2}, \quad R^2 = \frac{1}{\sqrt{1-L^2}-\delta\Omega}.$$

Как и в предыдущем случае, устойчивые сепаратрисы седловых точек стремятся к бесконечности при $t \rightarrow -\infty$. Для доказательства того, что неустойчивые сепаратрисы точек O_i ведут себя так, как изображено на рис. 10.6.7 (одна стремится к бесконечности при $t \rightarrow +\infty$, в то время как вторая стремится к началу координат), мы должны доказать, что они обе одновременно не стремятся к бесконечности. Для этого рассмотрим систему (10.6.11) при больших R . Введем новую переменную $z = R^{-2}$ и сделаем замену времени $dt \rightarrow zdt$. Мы получаем:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= -2z(L + \cos 4\varphi), \\ \dot{\varphi} &= \delta z + \Omega - \sin 4\varphi.\end{aligned}\tag{10.6.13}$$

Значение $z = 0$ соответствует $R = +\infty$. Система (10.6.13) при $z = 0$ имеет шесть состояний равновесия, определяемых из соотношения $\Omega = \sin 4\varphi$: четыре состояния равновесия устойчивы, а другие — вполне неустойчивы. Устойчивые сепаратрисы седел O_i выходят из вполне неустойчивых состояний равновесия при $t = -\infty$ — по две сепаратрисы из каждого (т. к. имеется восемь сепаратрис четырех состояний равновесия). Из рис. 10.6.7. видно, что только четыре неустойчивые сепаратрисы входят в устойчивые состояния равновесия на бесконечности при $t \rightarrow +\infty$; остальные должны оставаться внутри ограниченного участка плоскости и, таким образом, должны стремиться к точке O .

10.7. Дополнительные замечания, касающиеся резонансов

В параграфе 10.4 мы определили, что в случае слабого резонанса $\omega = 2\pi M/N$, $N \geq 5$ устойчивость критической неподвижной точки определяется знаком первой отличной от нуля ляпуновской величины. Аналогичная ситуация имеет место в критическом случае состояния равновесия с чисто мнимой парой характеристических показателей. Однако существует важное отличие, а именно: для резонансной неподвижной точки определено только конечное число ляпуновских величин, которое не превышает $(N - 3)/2$. Вопрос о структуре малой окрестности неподвижной точки, в случае когда все ляпуновские величины обращаются в нуль, сложен, поэтому здесь мы его не изучаем. Вместо этого рассмотрим два примера.

Первый пример аналогичен сильному резонансу. Это отображение

$$\bar{w} = e^{2\pi i M/N} w + (w^*)^{N-1}.\tag{10.7.1}$$

Легко видеть, что N -я итерация отображения (10.7.1) вплоть до членов порядка N совпадает с отображением сдвига за время $t = N$ вдоль траекторий

системы:

$$\dot{w} = (w^*)^{N-1}. \quad (10.7.2)$$

В полярных координатах эта система принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{R} &= R^{N-1} \cos N\varphi, \\ \dot{\varphi} &= -R^{N-2} \sin N\varphi. \end{aligned}$$

Функция

$$H = R^N \sin N\varphi$$

является первым интегралом системы. Тривиальное восстановление линий уровня функции H показывает, что состояние равновесия в начале координат является седлом с $2N$ сепаратрисами. Подобное утверждение также верно и для неподвижной точки исходного отображения (10.7.1).

На самом деле резонансные неподвижные точки не ограничены только седлами и устойчивыми (вполне неустойчивыми) точками. Пример другой структуры дается отображением

$$\bar{w} = e^{2\pi M/N} w + w^{N+1}, \quad (10.7.3)$$

N -я итерация которого вплоть до членов $(N+1)$ порядка совпадает со сдвигом вдоль траекторий системы

$$\dot{w} = w^{N+1} \quad (10.7.4)$$

или, в полярных координатах:

$$\begin{aligned} \dot{R} &= R^{N+1} \cos N\varphi, \\ \dot{\varphi} &= R^N \sin N\varphi. \end{aligned}$$

Последнее уравнение в качестве первого интеграла имеет

$$H = \frac{\sin N\varphi}{R^N}.$$

Интегральные кривые задаются формулой

$$R = C(\sin N\varphi)^{1/N}.$$

Теперь мы можем построить фазовый портрет (см. рис. 10.7.1 для $N=3$): имеется $2N$ инвариантных луча, играющих роль сепаратрис (устойчивых и неустойчивых), которые разделяют фазовую плоскость на $2N$ сектора (так называемых эллиптических сектора), внутри каждого сектора любая траектория является биасимптотической к состоянию равновесия, т. е. она стремится к O при $t \rightarrow \pm\infty$. Можно проверить, что окрестность неподвижной точки исходного отображения (10.7.3) имеет аналогичную структуру.

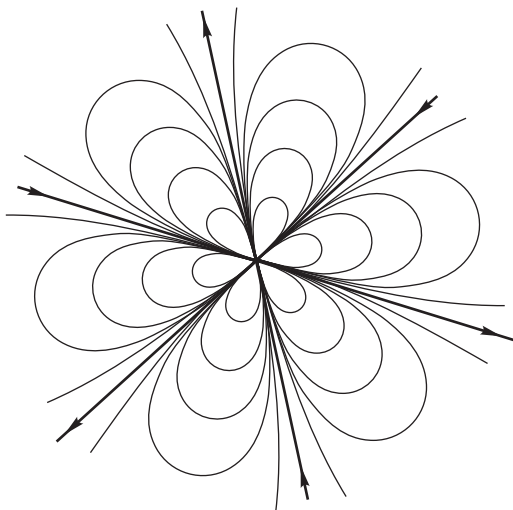


Рис. 10.7.1. Неподвижная точка при $N = 3$. Сектора между сепаратрисами называются *эллиптическими*

ГЛАВА 11

Локальные бифуркации при пересечении границы устойчивости

Изучение критических случаев поднимает ряд вопросов: «Почему состояние равновесия или периодическая орбита сохраняет устойчивость на границе в одних случаях и не сохраняет в других? Что происходит за границей устойчивости?»

Ответы на эти вопросы дает теория бифуркаций. В этой главе мы рассмотрим только локальные бифуркации, т. е. те, которые возникают вблизи критических состояний равновесия и вблизи неподвижных точек отображения Пуанкаре. Мы ограничим наше исследование простейшими, но ключевыми бифуркациями, которые непосредственно связаны с критическими случаями, рассматриваемыми в двух предыдущих главах.

Комплекс методов, используемых для изучения бифуркационных задач, состоит из трех частей: теорема о центральном многообразии, теоремы о редукции, метод нормальных форм.

Любое изучение бифуркации должно включать выбор подходящих независимых параметров, которые управляют бифуркацией. При выборе параметров используются понятия теории особенностей гладких отображений, основанные на понятии трансверсальности. Обычно в простых случаях выбор управляющих параметров определяется здравым смыслом. Для более сложных бифуркаций выбор подходящих параметров является нетривиальной задачей.

11.1. Бифуркационные поверхности и трансверсальные семейства

Система дифференциальных уравнений обычно служит математической моделью реальной динамической системы, управляемой некоторым множеством параметров. Очевидно, любое утверждение, касающееся реальной системы, полученное при анализе ее теоретической идеализации,

т. е. ее модели, должно быть не слишком чувствительно к малым неконтролируемым изменениям параметров. Поэтому стандартное требование состоит в том, что необходимо рассмотреть не только систему саму по себе, но и понять, что происходит со всеми близкими системами. Это нетрудно, если изучаются грубые состояния равновесия и периодические орбиты: в таком случае качественная структура не меняется при малых возмущениях правой части системы. В отличие от этого анализ систем, близких к системам на границах устойчивости, может стать настоящей бифуркационной задачей.

Рассмотрим семейство систем дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X(x, \varepsilon),$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ — набор параметров. Предположим, что для некоторого $\varepsilon = \varepsilon^0$ система имеет критическое состояние равновесия или критическую периодическую орбиту, т. е. она лежит на границе $\mathfrak{M}$ области устойчивости. В общем случае $\mathfrak{M}$ — гладкая $(p - 1)$ -мерная поверхность в окрестности точки ε^0 и задается уравнением вида

$$\Phi(\varepsilon) = 0, \quad (11.1.1)$$

где

$$\Phi' = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_2}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_p} \right) \neq 0. \quad (11.1.2)$$

Так как производная Φ хотя бы по одной переменной не равна нулю, мы можем без потери общности предположить, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_p} \neq 0. \quad (11.1.3)$$

Ясно, что это условие не нарушается при малых возмущениях правой части. Более того, если это условие не удовлетворяется, его можно достичь посредством малого возмущения рассматриваемого семейства $X(x, \varepsilon)$. Когда неравенство (11.1.2) верно, мы говорим, что семейство $X(x, \varepsilon)$ находится в общем положении относительно $\mathfrak{M}$.

Если мы определим

$$\mu = \Phi(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p), \quad (11.1.4)$$

то поверхность $\mathfrak{M}$ задается просто как

$$\mu = 0.$$

Кроме того, любая точка в пространстве параметров вблизи ε^0 однозначно определена значениями $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p-1}$ и μ , потому что $\partial \Phi / \partial \varepsilon_p \neq 0$, и, таким

образом, ε_p определяется из (11.1.4) однозначно. Если мы разрешим (11.1.1) относительно ε_p , т. е. представим $\mathcal{M}$ в виде

$$\varepsilon_p = \varphi(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p-1}),$$

то

$$\mu \equiv \varepsilon_p - \varphi(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p-1}),$$

и отсюда

$$\varepsilon_p = \mu + \varphi(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p-1}).$$

Скаляр μ называется бифуркационным параметром. Он измеряет расстояние от точки в пространстве параметров до поверхности $\mathcal{M}$, в то время как $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p-1}$ задают проекцию на $\mathcal{M}$, как показано на рис. 11.1.1.

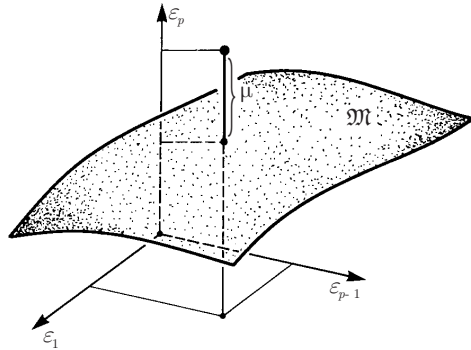


Рис. 11.1.1. Выбор бифуркационного параметра в семействе $\mathcal{M}$, трансверсальном к бифуркационной поверхности

Ниже мы будем рассматривать однопараметрические семейства вида

$$\dot{x} = X(x, \varepsilon_1(\mu), \dots, \varepsilon_p(\mu)),$$

где $\varepsilon_i(\mu)$ — гладкие функции и $\Phi(\varepsilon(\mu)) \equiv \mu^1$. Такое семейство является трансверсальным в том смысле, что кривая

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\mu), \dots, \varepsilon_p = \varepsilon_p(\mu)$$

¹Для того чтобы равенство соблюдалось, можно выбрать $\varepsilon_1(\mu), \dots, \varepsilon_{p-1}(\mu)$ произвольно, а $\varepsilon_p(\mu)$ найти из (11.1.4).

трансверсально (без касания) пересекает поверхность $\mathcal{M}$. Так как такая трансверсальная кривая может быть проведена через любую точку, достаточно близкую к ε^0 , очевидно, что для изучения всех систем, близких к $\dot{x} = X(x, \varepsilon^0)$, достаточно изучить только трансверсальные семейства. В соответствии с постановкой Андронова (параграф 8.4), задача состоит в определении интервалов значений μ , на которых качественные характеристики поведения траекторий одинаковы, а также в выявлении того, что происходит при бифуркационных значениях μ , которые соответствуют границам этих интервалов.

Идеальным случаем (иногда он возможен) будет тот, когда все близкие трансверсальные семейства качественно одинаковы (такие семейства называются версальными согласно Арнольду [20]). Изучив бифуркации в одном трансверсальном семействе, мы получим полное описание всех близких.

В случаях дополнительного вырождения (например, состояние равновесия с нулевым характеристическим показателем и нулевой первой ляпуновской величиной) граница области устойчивости может потерять гладкость в точке ε^0 . Также возможны ситуации, когда граница остается гладкой, но бифуркации в различных близких однопараметрических семействах протекают различно (т. е. не существует версального однопараметрического семейства, например, как в случае состояния равновесия с парой чисто мнимых показателей и нулевой первой ляпуновской величиной). В таких случаях процедура такова. Рассмотрим поверхность $\mathcal{M}'$ меньшей размерности (менее чем $(p - 1)$), которая проходит через точку ε^0 и является частью границы области устойчивости, выделяемой некоторыми дополнительными условиями; в вышеприведенных примерах условием является то, что первая ляпуновская величина равно нулю. Если наложить $(k - 1)$ дополнительных условий, то поверхность $\mathcal{M}'$ будет $(p - k)$ -мерной, и она задается системой вида

$$\begin{cases} \Phi_1(\varepsilon) = 0, \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \Phi_k(\varepsilon) = 0. \end{cases} \quad (11.1.5)$$

Пусть матрица производных

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varepsilon_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varepsilon_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_k}{\partial \varepsilon_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_k}{\partial \varepsilon_p} \end{pmatrix}$$

имеет ранг k , т. е. наибольший ранг², поскольку мы полагаем, что $p \geq k$. В этом случае k параметров можно выразить через другие; а именно:

$$\varepsilon_p = \varphi_1(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p-k}), \dots, \varepsilon_{p-k+1} = \varphi_1(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p-k}).$$

Введем бифуркационные параметры (см. рис. 11.1.2 для $k = 2$)

$$\begin{cases} \mu_1 \equiv \varepsilon_p - \varphi_1(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p-k}), \\ \vdots \\ \mu_k \equiv \varepsilon_{p-k+1} - \varphi_1(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p-k}). \end{cases} \quad (11.1.6)$$

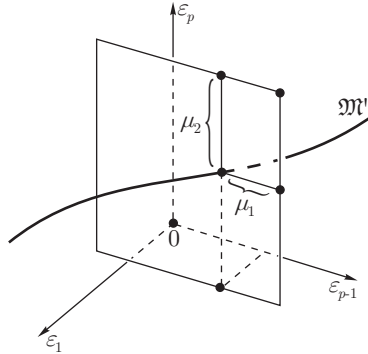


Рис. 11.1.2. В трехпараметрическом семействе бифуркационная поверхность коразмерности два — это кривая $\mathfrak{M}'$

Если (11.1.5) не разрешено относительно $(\varepsilon_{p-k+1}, \dots, \varepsilon_p)$, мы можем задать

$$\begin{cases} \mu_1 \equiv \Phi_1(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p), \\ \vdots \\ \mu_k \equiv \Phi_k(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p). \end{cases} \quad (11.1.7)$$

Рассмотрим трансверсальное к $\mathfrak{M}'$ k -параметрическое семейство векторных полей вида

$$\dot{x} = X(x, \varepsilon_1(\mu), \dots, \varepsilon_p(\mu)),$$

²В этом случае мы будем говорить, что семейство находится в общем положении по отношению к $\mathfrak{M}'$.

где $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)$ и $\varepsilon_i(\mu)$ — некоторые гладкие функции, удовлетворяющие (11.1.6) или (11.1.7).

В подобной ситуации мы говорим о *бифуркации коразмерности k* , а поверхность $\mathcal{M}'$ называем *бифуркационной поверхностью коразмерности k* (коразмерность равна числу бифуркационных параметров).

Процедура изучения k -параметрического семейства такая же, как и в однопараметрическом случае: во-первых, пространство параметров делится на области с топологически эквивалентным поведением траекторий и изучаются системы в каждой из этих областей. Во-вторых, описываются границы этих областей (бифуркационное множество), и, наконец, изучается, что происходит при бифуркационных значениях параметра. Ниже мы увидим, что в простейших случаях (например, состояние равновесия с одним нулевым или парой чисто мнимых характеристических показателей или периодическая орбита с одним мультипликатором, равным 1 или -1) почти всегда, за исключением бесконечных вырождений, можно выбрать правильную бифуркационную поверхность подходящей коразмерности и полностью изучить трансверсальные семейства. Более того, все эти семейства оказываются версальными.

Следует отметить, что построение версальных семейств возможно только в этих простых случаях и в некоторых специальных случаях. Например, нельзя построить конечнопараметрическое версальное семейство для бифуркации периодической орбиты с одной парой комплексных мультипликаторов $e^{\pm i\omega}$. Тем не менее эта задача допускает вполне разумное описание в рамках одно- и двухпараметрических семейств. Здесь рождение инвариантного тора можно полностью понять в однопараметрической постановке, в то время как изучение бифуркаций резонансных периодических орбит требует по крайней мере двух параметров. Таким образом, одна и та же бифуркация может относиться к коразмерности один или к коразмерности два, в зависимости от того, на каких особенностях динамики мы сосредотачиваемся. Эта неопределенность довольно типична для теории бифуркации динамических систем.

В более сложных случаях задача получения полного описания или доказательства того, что рассматриваемое семейство является версальным, вообще не ставится. Однако общий подход остается неизменным: негрубая система рассматривается как точка на некоторой гладкой бифуркационной поверхности конечной коразмерности. Затем строится трансверсальное семейство, и необходимо показать, что качественные результаты, полученные при изучении данного конкретного трансверсального семейства, остаются верными также для всех близких семейств.

11.2. Бифуркации состояния равновесия с одним нулевым показателем

Рассмотрим семейство дифференциальных уравнений класса $\mathbb{C}^r$ ($r \geq 2$) как по переменным, так и по параметрам, которое имеет состояние равновесия в начале координат с одним нулевым характеристическим показателем; у остальных характеристических показателей действительная часть отрицательна. В таком случае вблизи начала координат систему можно записать в виде

$$\begin{aligned}\dot{x} &= g(x, y, \varepsilon), \\ \dot{y} &= Ay + f(x, y, \varepsilon),\end{aligned}\tag{11.2.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^1$, $y \in \mathbb{R}^n$; характеристические числа матрицы A лежат слева от мнимой оси, f и g — такие $\mathbb{C}^r$ -гладкие функции, что и f и g обращаются в нуль при $x = 0$, $y = 0$ и $\varepsilon = 0$, вместе со своими первыми производными по x и y .

В силу теоремы редукции 5.5 существуют $\mathbb{C}^{r-1}$ -координаты, в которых семейство (11.2.1) приводится к виду

$$\begin{aligned}\dot{x} &= G(x, \varepsilon), \\ \dot{y} &= [A + F(x, y, \varepsilon)]y,\end{aligned}\tag{11.2.2}$$

где F — $\mathbb{C}^{r-1}$ -функция и G — $\mathbb{C}^r$ -функция такие, что

$$\begin{aligned}F(0, 0, 0) &= 0, \\ G(0, 0) &= 0, \\ G'_x(0, 0) &= 0.\end{aligned}\tag{11.2.3}$$

Из (11.2.2) следует, что, для того чтобы исследовать бифуркации исходной системы, достаточно рассмотреть ограничение системы на центральное многообразие

$$\dot{x} = G(x, \varepsilon).\tag{11.2.4}$$

Из (11.2.3) следует, что функция G при $\varepsilon = 0$ имеет вид

$$G(x, 0) = l_2 x^2 + o(x^2).\tag{11.2.5}$$

Рассмотрим сначала случай, когда первая ляпуновская величина l_2 не равна нулю. Следуя схеме, обрисованной в предыдущем параграфе, сначала мы выведем уравнение границы $\mathcal{M}$ области устойчивости вблизи $\varepsilon = 0$. Далее мы найдем условия, при которых $\mathcal{M}$ является гладкой поверхностью коразмерности один. Наконец, мы выберем бифуркационный параметр и исследуем трансверсальные семейства.

Множество $\mathfrak{M}$ при малых ε задается условием, что система (11.2.4) имеет состояние равновесия с одним нулевым характеристическим показателем. Когда $\varepsilon \neq 0$, состояние равновесия, вообще говоря, находится не в начале координат. Условие, задающее $\mathfrak{M}$, есть просто существование такого x^* , что

$$G(x^*, \varepsilon) = 0, \quad (11.2.6)$$

$$G'_x(x^*, \varepsilon) = 0. \quad (11.2.7)$$

Напомним, что $l_2 \equiv G''_{xx}(0, 0)/2 \neq 0$ и, следовательно, в силу теоремы о неявной функции, x^* можно однозначно найти из (11.2.7) для всех малых ε . Отсюда (11.2.6) принимает вид

$$G(x^*(\varepsilon), \varepsilon) = 0. \quad (11.2.8)$$

Обозначим $\Phi(\varepsilon) = G(x^*(\varepsilon), \varepsilon)$. Так как G'_x — это $\mathbb{C}^{r-1}$ -функция, то $x^*(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{r-1}$, и отсюда $\Phi(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{r-1}$. При малых ε уравнение $\Phi(\varepsilon) = 0$ определяет $\mathbb{C}^{r-1}$ -гладкую поверхность коразмерности один при условии, что

$$\Phi'_\varepsilon \equiv \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_2}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_p} \right) \neq 0$$

или

$$\frac{d}{d\varepsilon} G(x^*(\varepsilon), \varepsilon)_{\varepsilon=0} \neq 0.$$

Последнее неравенство можно переписать как

$$G'_x \frac{dx^*}{d\varepsilon} + G'_\varepsilon \neq 0$$

или, поскольку $G'_x(0, 0) = 0$, как

$$G'_\varepsilon(0, 0) \neq 0. \quad (11.2.9)$$

Будем полагать, что (11.2.9) выполнено³, т. е. семейство находится в общем положении. Введем бифуркационный параметр

$$\mu \equiv G(x^*(\varepsilon), \varepsilon) \quad (11.2.10)$$

³Функция G' тождественно равна $g(x, \varphi(x, \varepsilon), \varepsilon)$, где $y = \varphi(x, \varepsilon)$ — уравнение центрального многообразия системы (11.2.1). Так как $g'_{(x,y)}(0, 0, 0) = 0$, условие (11.2.9) эквивалентно $g'_\varepsilon(0, 0, 0) \neq 0$.

и рассмотрим произвольное однопараметрическое семейство вида

$$\dot{x} = G(x, \varepsilon(\mu)), \quad (11.2.11)$$

которое трансверсально $\mathfrak{M}$ (здесь $\varepsilon(\mu)$ — некоторая $\mathbb{C}^{r-1}$ -гладкая функция, удовлетворяющая (11.2.10)).

Переместим начало координат в точку $x^*(\varepsilon(\mu))$, т.е. сделаем замену переменной $x = x^* + \xi$. Тогда (11.2.11) принимает вид

$$\dot{\xi} = G(x^* + \xi; \varepsilon(\mu)) = G(x^*, \varepsilon(\mu)) + G'_x(x^*, \varepsilon(\mu))\xi + G''_{xx}(x^*, \varepsilon(\mu))\xi^2/2 + o(\xi^2).$$

Из (11.2.7) и (11.2.10) получаем

$$\dot{\xi} = \mu + l_2\xi^2 + \tilde{G}(\xi, \mu), \quad (11.2.12)$$

где $\tilde{G}$ — функция класса $\mathbb{C}^r$ по ξ и $\mathbb{C}^{r-1}$ по μ и

$$\tilde{G}(0, \mu) = 0, \quad \tilde{G}'_\xi(0, \mu) = 0, \quad \tilde{G}''_{\xi\xi}(0, 0) = 0.$$

Величина l_2 равна $G''_{xx}(x^*(\varepsilon(0)), \varepsilon(0))/2$. Она зависит не от μ , а от выбора трансверсального семейства (11.2.11). Так как эта зависимость непрерывна, то значения l_2 близки и имеют одинаковый знак для всех близких трансверсальных семейств. Отметим, что случай $l_2 < 0$ сводится к $l_2 > 0$ заменой $\xi \rightarrow -\xi$ и $\mu \rightarrow -\mu$. Следовательно, мы будем полагать, что $l_2 > 0$, но соответствующие рисунки приведем для двух случаев.

Уравнение (11.2.12) исследуется легко. Отметим, что $\xi = 0$ — точка минимума правой части и соответственно μ — наименьшее значение. Отсюда при $\mu > 0$ значение ξ положительно для всех малых ξ , и поэтому все траектории должны покидать окрестность начала координат за конечное время. Когда $\mu < 0$, правая часть обращается в нуль в двух точках: $O_2(\xi^-(\mu) < 0)$ и $O_1(\xi^+(\mu) > 0)$. Значение ξ отрицательно внутри интервала $(\xi^-(\mu), \xi^+(\mu))$ и положительно за его пределами; таким образом, точка $O_2(\xi^-(\mu))$ — устойчивое состояние равновесия, в то время как точка $O_1(\xi^+(\mu))$ — неустойчивое состояние равновесия, как показано на рис. 11.2.1 (а). Соответствующий сценарий для случая $l_2 < 0$ показан на рис. 11.2.3.

При увеличении μ состояния равновесия подходят ближе друг к другу и сливаются при $\mu = 0$. График, изображающий зависимость координат состояния равновесия от μ , изображен на рис. 11.2.2. Можно вывести следующее асимптотическое выражение для состояния равновесия:

$$\xi^\pm \sim \pm \sqrt{|\mu|/l_2}. \quad (11.2.13)$$

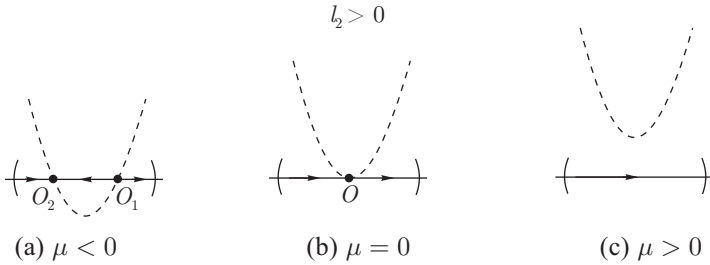


Рис. 11.2.1. Одномерный портрет уравнения (11.2.11) при $G''_{xx} = l_2 > 0$ в зависимости от бифуркационного параметра μ

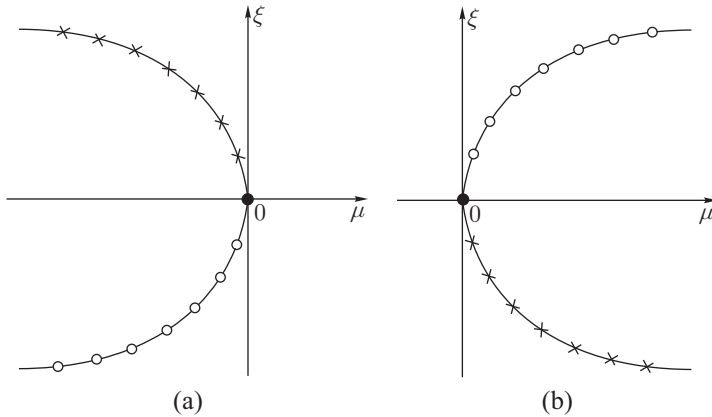


Рис. 11.2.2. Зависимость координат состояния равновесия от μ в случаях $l_2 > 0$ (a) и $l_2 < 0$ (b). Крестики и кружочки отмечают соответственно неустойчивые и устойчивые ветви

Для доказательства отмасштабируем координату ξ и время в (11.2.12) на $\sqrt{|\mu|}$: $\xi \rightarrow \xi\sqrt{|\mu|}$ и $t \rightarrow t/\sqrt{|\mu|}$. Тогда (11.2.12) принимает вид

$$\frac{d\sqrt{|\mu|}\xi}{dt/\sqrt{|\mu|}} = \mu + l_2(\sqrt{|\mu|}\xi)^2 + \tilde{G}(\sqrt{|\mu|}\xi, \mu)$$

или

$$\dot{\xi} = -1 + l_2\xi^2 + \tilde{G}(\sqrt{|\mu|}\xi, \mu)/|\mu|. \quad (11.2.14)$$

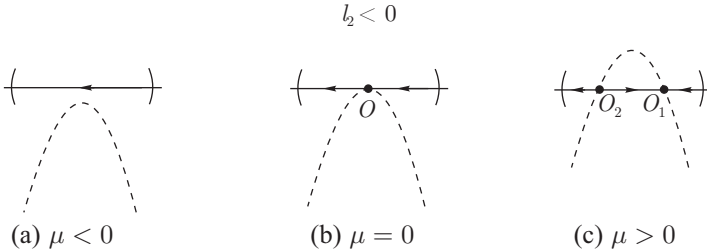


Рис. 11.2.3. То же, что и на рис. 11.2.1, но при $l_2 < 0$

Так как $\tilde{G} = o(\xi^2)$ и $\tilde{G}'_\xi = o(\xi)$, то $\tilde{G}(\sqrt{|\mu|}\xi, \mu)/|\mu|$ стремится к нулю при $\mu \rightarrow 0$ вместе со своими производными по ξ . Отсюда в силу теоремы о неявной функции, мы находим, что правая часть (11.2.14) обращается в нуль в двух точках

$$\xi^\pm = \pm 1/\sqrt{l_2} + \dots,$$

что при возвращении к исходным координатам дает (11.2.13).

Когда $l_2 < 0$, изменения в фазовом портрете при изменении μ приведены на рис. 11.2.3, а зависимость координат неподвижной точки от μ изображена на рис. 11.2.2 (b).

Фазовые портреты систем размерности два и более проиллюстрированы на рис. 11.2.4–11.2.7 соответственно. При $l_2\mu < 0$ существует два грубых состояния равновесия: узел и седло, которые сближаются при увеличении $l_2\mu$. Когда $\mu = 0$, они сливаются, образуя седло-узловую точку, которая исчезает, когда $l_2\mu$ становится положительным и все траектории уходят из окрестности начала координат.

Рассмотрим далее случай, когда $l_2 = 0$. Пусть k — порядковый номер первой отличной от нуля ляпуновской величины, т. е. при $\varepsilon = 0$ функция $G(x, \varepsilon)$ в (11.2.4) имеет вид

$$G(x, 0) = l_k x^k + o(x^k)$$

(предполагается, что порядок гладкости системы не меньше k). Докажем, что если число p параметров ε равно или больше чем $(k - 1)$, то множество точек в пространстве параметров, которое соответствует существованию негрубого состояния равновесия с одним нулевым характеристическим показателем и с нулевыми значениями $l_2, \dots, l_{k-1}$, составляет гладкую поверхность $\mathcal{M}'$ коразмерности $(k - 1)$ и любое семейство, трансверсальное $\mathcal{M}'$, можно представить в виде

$$\dot{x} = \mu_1 + \dots + \mu_{k-1} x^{k-2} + l_k x^k + o(x^k). \quad (11.2.15)$$

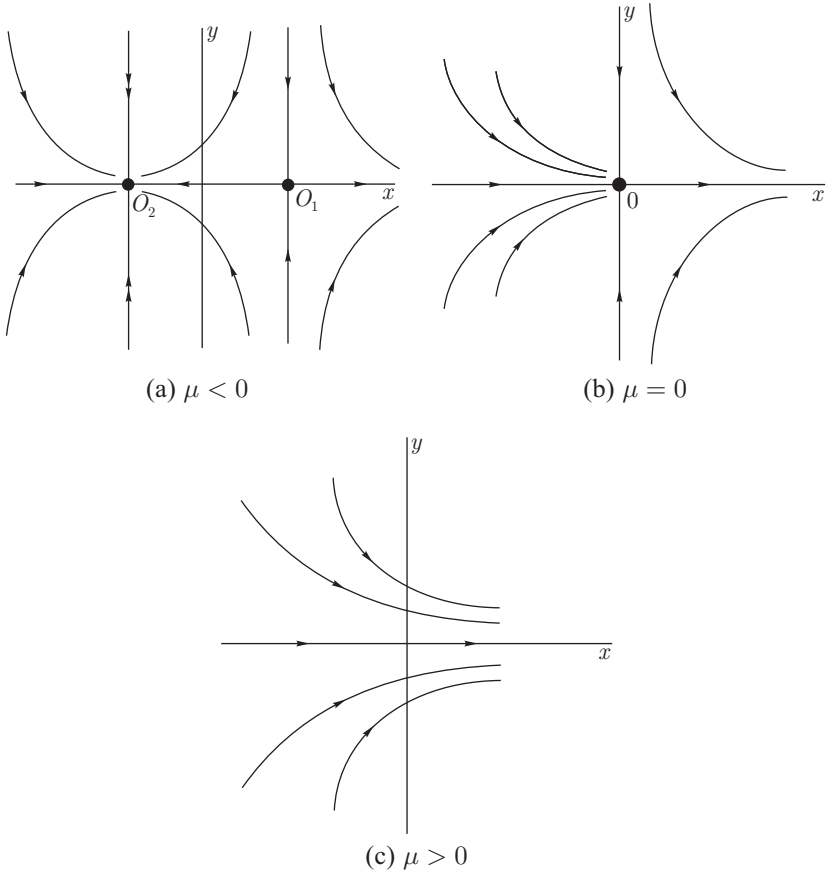
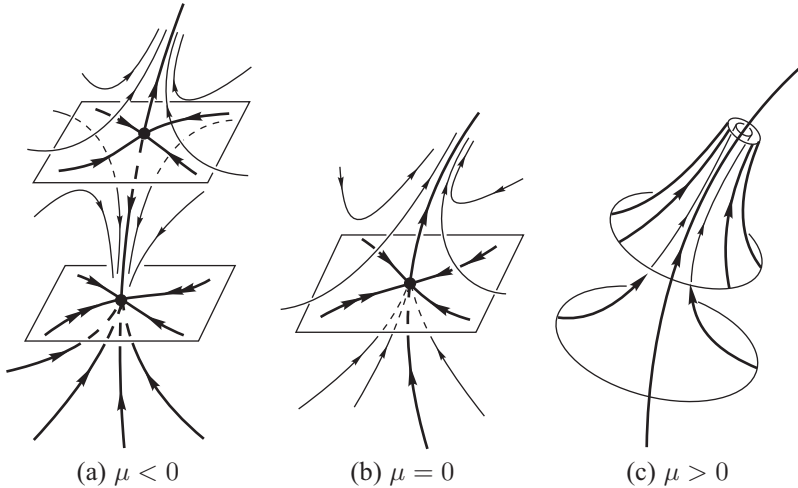


Рис. 11.2.4. Бифуркация состояния равновесия типа седло-узел на плоскости при $\ell_2 > 0$

Действительно, условие, при котором система имеет состояние равновесия x^* с одним нулевым показателем и нулевыми ляпуновскими величинами $l_2, \dots, l_{k-1}$, задается как

$$G(x^*, \varepsilon) = G'_x(x^*, \varepsilon) = G''_{xx}(x^*, \varepsilon) = \dots = G^{(k-1)}(x^*, \varepsilon) = 0. \quad (11.2.16)$$


 Рис. 11.2.5. Бифуркация седло-узловое состояния равновесия в $\mathbb{R}^3$. Вариант I

Поскольку

$$\frac{\partial^k G(0, 0)}{\partial x^k} \equiv l_k k! \neq 0,$$

значение x^* однозначно находится из уравнения

$$G^{(k-1)}(x^*, \varepsilon) = 0 \quad (11.2.17)$$

при малых ε . Пусть $x = x^*(\varepsilon)$ — решение (11.2.17); ясно, что $x^* — $\mathbb{C}^{r-k+1}$ -гладкая функция. Подстановкой $x^*(\varepsilon)$ в оставшиеся уравнения (11.2.16) мы получим уравнение поверхности $\mathcal{M}'$:$

$$G(x^*(\varepsilon), \varepsilon) = 0, \quad G'_x(x^*(\varepsilon), \varepsilon) = 0, \dots, G^{(k-2)}(x^*(\varepsilon), \varepsilon) = 0.$$

Поверхность является гладкой, если система находится в общем положении, т. е. если ранг матрицы

$$\left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial G(x^*(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial \varepsilon_1} & \cdots & \frac{\partial G(x^*(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial \varepsilon_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G^{(k-2)}(x^*(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial \varepsilon_1} & \cdots & \frac{\partial G^{(k-2)}(x^*(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial \varepsilon_p} \end{array} \right)_{\varepsilon=0} \quad (11.2.18)$$

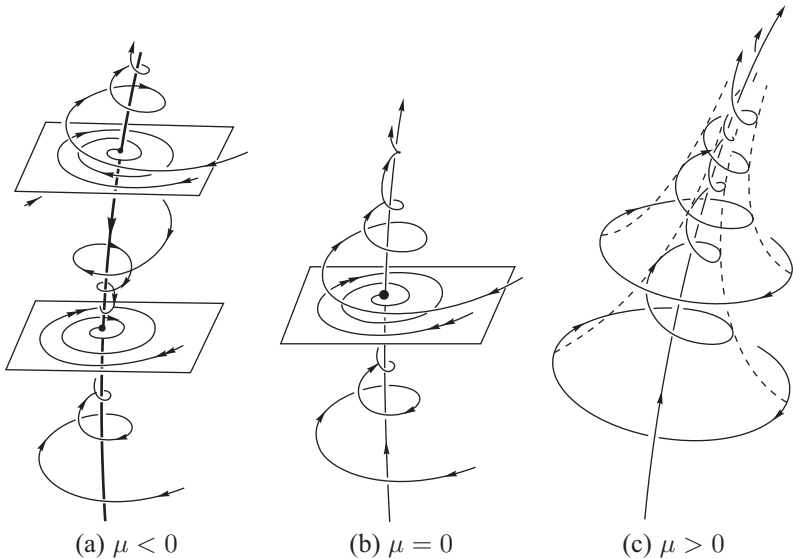


Рис. 11.2.6. Бифуркация седло-узловое состояния равновесия в $\mathbb{R}^3$. Вариант II

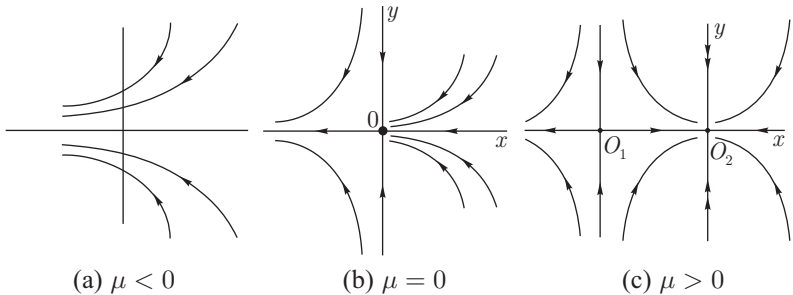


Рис. 11.2.7. Случай $l_2 < 0$ сводится к случаю на рис. 11.2.4 заменой ($\mu \rightarrow -\mu$, $x \rightarrow -x$)

равен $(k-1)$ (см. предыдущий параграф; отсюда непосредственно следует, что количество параметров, p , должно быть не меньше $(k-1)$). Поскольку

$$\frac{\partial G^j(x^*(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial \varepsilon_i} \equiv \left(\frac{\partial^{j+1} G}{\partial x^{j+1}} \frac{\partial x^*}{\partial \varepsilon_i} + \frac{\partial^{j+1} G}{\partial x^j \partial \varepsilon_i} \right)_{x=x^*(\varepsilon)}$$

и

$$\frac{\partial^j G(0,0)}{\partial x^j} = 0 \quad \text{при} \quad 1 \leq j \leq k-1,$$

для этого достаточно, чтобы матрица

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial \varepsilon_1} & \cdots & \frac{\partial G}{\partial \varepsilon_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^{k-1} G}{\partial \varepsilon_1 \partial x^{k-2}} & \cdots & \frac{\partial^{k-1} G}{\partial \varepsilon_p \partial x^{k-2}} \end{pmatrix}_{(x=0, \varepsilon=0)}$$

имела максимальный ранг. Будем предполагать, что это условие выполнено. Тогда мы можем ввести $k-1$ управляющих параметров $\mu_1, \dots, \mu_{k-1}$:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= G(x^*(\varepsilon), \varepsilon), \\ \mu_2 &= G'_x(x^*(\varepsilon), \varepsilon), \\ &\vdots \\ \mu_i &= G^{(i-1)}(x^*(\varepsilon), \varepsilon)/(i-1)!, \\ &\vdots \\ \mu_{k-1} &= G^{(k-2)}(x^*(\varepsilon), \varepsilon)/(k-2)!, \end{aligned} \tag{11.2.19}$$

так что трансверсальное к $\mathfrak{M}'$ $(k-1)$ -параметрическое семейство будет иметь вид

$$\dot{x} = G(x, \varepsilon(\mu)), \tag{11.2.20}$$

где $\varepsilon(\mu)$ — некоторая функция класса $\mathbb{C}^{r-k+1}$, которая удовлетворяет (11.2.19). Такая $\varepsilon(\mu)$ существует ввиду максимальности ранга матрицы (11.2.18): некоторые $(k-1)$ параметров ε_i однозначно выражаются из (11.2.19) через $\mu_1, \dots, \mu_{k-1}$ и другие ε .

Если начало координат сдвинуть в точку x^* (т. е. мы полагаем $x = \xi + x^*$), то уравнение (11.2.20) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= G(x^* + \xi, \varepsilon(\mu)) = \\ &= G(x^*, \varepsilon(\mu)) + G'_x(x^*, \varepsilon(\mu))\xi + \dots + G^{(k)}(x^*, \varepsilon(\mu))\xi^k/k! + o(\xi^k). \end{aligned}$$

Из (11.2.17) и (11.2.19) мы получаем

$$\dot{\xi} = \mu_1 + \dots + \mu_{k-1}\xi^{k-2} + l_k\xi^k + \tilde{G}(\xi, \mu). \tag{11.2.21}$$

Функция $\tilde{G}$ здесь $\mathbb{C}^r$ -гладкая по ξ и $\mathbb{C}^{r-k+1}$ -гладкая по μ ; ее производные по ξ вплоть до порядка $(k-1)$ также остаются $\mathbb{C}^{r-k+1}$ -гладкими по μ . Более того,

$$\tilde{G}(0, \mu) = \tilde{G}'_{\xi}(0, \mu) = \dots = \tilde{G}^{(k-1)}(0, \mu) = 0, \quad \tilde{G}^{(k)}(0, 0) = 0. \quad (11.2.22)$$

Заменяя ξ обратно на x , мы получим (11.2.15).

Подробно мы рассмотрим только бифуркации небольших коразмерностей ($k = 3, 4$). Когда $l_3 \neq 0$, семейство (11.2.21) принимает вид

$$\dot{x} = \mu_1 + \mu_2 x + l_3 x^3 + \tilde{G}(x, \mu). \quad (11.2.23)$$

Напомним, что при $\mu_1 = \mu_2 = 0$ точка $O(x = 0)$ устойчива, если $l_3 < 0$, и неустойчива, если $l_3 > 0$ (см. параграф 9.2). Отметим также, что случай $l_3 > 0$ сводится к случаю $l_3 < 0$ при помощи замены: $t \rightarrow -t$, $\mu_1 \rightarrow -\mu_1$ и $\mu_2 \rightarrow -\mu_2$.

Легко можно увидеть, что при малых μ уравнение (11.2.23) может иметь не более трех состояний равновесия вблизи начала координат. Действительно, если правая часть имеет, например, четыре корня (включая кратность), тогда ее первая производная должна иметь по меньшей мере три корня, вторая производная должна иметь два корня, а третья производная должна иметь по крайней мере один корень. Но третья производная равна $(6l_3 + o(1))$ и, следовательно, не может обращаться в нуль вблизи начала координат.

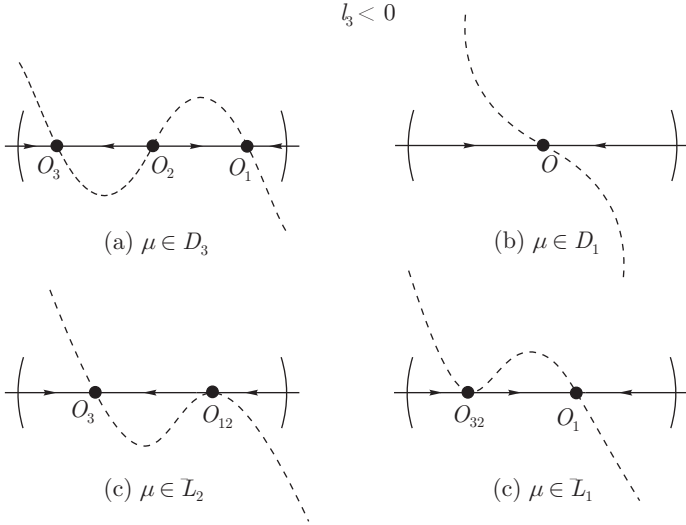
Очевидно, что значения параметров, при которых существует только два состояния равновесия, являются точками бифуркации, так как один из корней правой части в этом случае должен быть кратным (см. рис. 11.2.8 (с) и (d) при $l_3 < 0$ и рис. 11.2.9 (с) и (d) при $l_3 > 0$). Этот корень соответствует полустойчивому состоянию равновесия, которое после произвольного малого изменения параметров либо исчезает, либо расщепляется на два состояния равновесия.

Точка x является двукратным корнем, если

$$\begin{aligned} \mu_1 + \mu_2 x + l_3 x^3 + \tilde{G}(x, \mu) &= 0, \\ \mu_2 + 3l_3 x^2 + \tilde{G}'_x(x, \mu) &= 0. \end{aligned} \quad (11.2.24)$$

Для того чтобы решить систему (11.2.24), нормируем x на $\sqrt{|\mu_2|}$ и допустим, что $M = \mu_1/(\mu_2 \sqrt{|\mu_2|})$. В новых переменных система (11.2.24) принимает вид

$$\begin{aligned} M + x \pm l_3 x^3 + \tilde{G}(x \sqrt{|\mu_2|}, \mu)/(\mu_2 \sqrt{|\mu_2|}) &= 0, \\ \pm 1 + 3l_3 x^2 + \tilde{G}'_x(x \sqrt{|\mu_2|}, \mu)|\mu_2| &= 0, \end{aligned} \quad (11.2.25)$$


 Рис. 11.2.8. Случай $l_2 = 0$, $l_3 < 0$

где $\pm$ обозначает знак μ_2 . Так как $\tilde{G} = o(x^3)$, то члены с $\tilde{G}$ и $\tilde{G}'$ в (11.2.25) становятся бесконечно малыми при $\mu_1 \rightarrow 0$ и $\mu_2 \rightarrow 0$. Из второго уравнения (11.2.25) видно, что знак μ_2 должен быть противоположен знаку l_3 . В пределе $\mu_1 = \mu_2 = 0$ система (11.2.25) принимает вид

$$\begin{aligned} M + x - |l_3|x^3 &= 0, \\ -1 + 3|l_3|x^2 &= 0. \end{aligned}$$

Решая эту систему, мы получаем

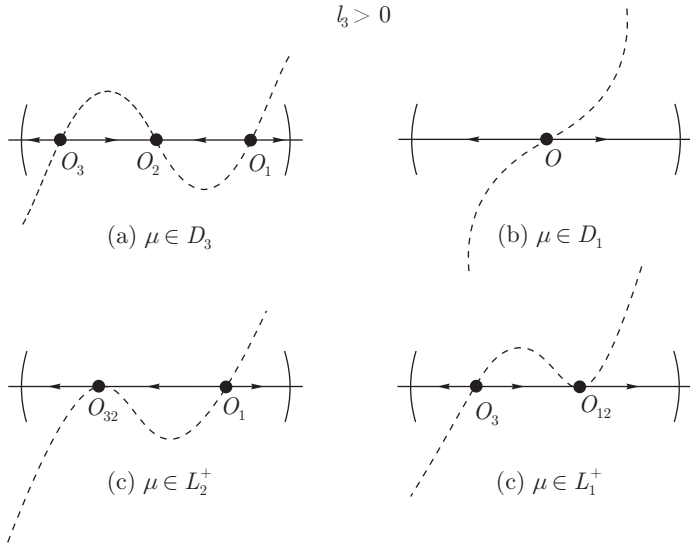
$$x = \pm 1/\sqrt{3|l_3|}, \quad M = -\frac{2}{3}x.$$

Далее, из теоремы о неявной функции следует, что при малых μ_2

$$M = \pm 2/(3\sqrt{3|l_3|}) + \dots$$

в (11.2.25). Возвращаясь обратно к неперемасштабированным координатам, мы получаем следующее уравнение бифуркационной кривой (рис. 11.2.10):

$$\mu_1 = \pm 2\mu_2\sqrt{|\mu_2/l_3|}/3\sqrt{3} + \dots, \quad \mu_2 l_3 < 0. \quad (11.2.26)$$

Рис. 11.2.9. Случай $l_2 = 0$, $l_3 > 0$

Мы будем обозначать эту кривую через L^- , когда $l_3 < 0$ (см. рис. 11.2.10 (a)), и через L^+ , когда $l_3 > 0$ (см. рис. 11.2.10 (b)). Точка $(\mu_1 = 0, \mu_2 = 0)$ делит эти кривые на две ветви, которые мы обозначаем как $L_1^\pm$ и $L_2^\pm$. Ветви касаются друг друга и оси μ_2 в начале координат.

Вследствие такой особенной формы бифуркационного множества, эта бифуркация называется «сборкой». Кривая $L^\pm$ делит окрестность начала координат на две части: D_3 — область внутри клина (она содержит положительную полуось μ_2 , когда $l_3 < 0$, или отрицательную полуось, когда $l_3 > 0$), и D_1 — внешняя область. Легко проверить, что в каждой точке на кривых $L^\pm$ семейство (11.2.23) с двумя параметрами удовлетворяет условию общего положения (11.2.9).

Легко показать, что при $l_3 < 0$

- (1) внутри клина D_3 уравнение (11.2.17) имеет три состояния равновесия: два устойчивых (O_1 и O_3) и одно неустойчивое (O_2), как показано на рис. 11.2.8 (a);
- (2) вне клина в области D_1 уравнение (11.2.17) имеет только одно устойчивое состояние равновесия, как показано на рис. 11.2.8 (b);
- (3) при $\mu \in L^-$ уравнение (11.2.17) имеет одно устойчивое состояние

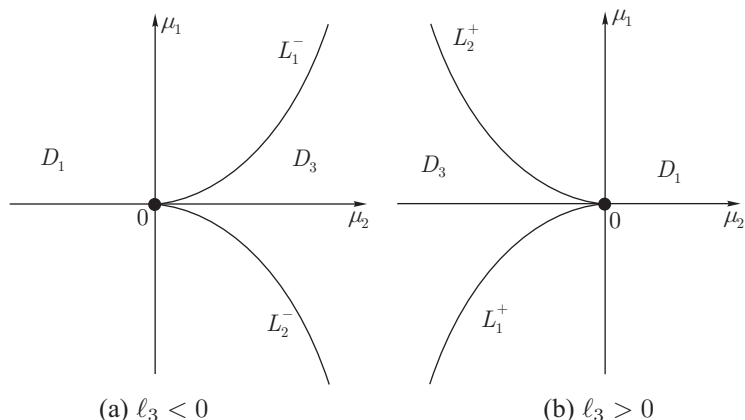


Рис. 11.2.10. Бифуркационная диаграмма в случаях $l_3 < 0$ (a) и $l_3 > 0$ (b)

равновесия O_1 и одно полуустойчивое состояние равновесия $O_{2,3}$ (результат слияния O_3 и O_2) с отрицательной первой ляпуновской величиной, как показано на рис. 11.2.8 (d); и

- (4) при $\mu \in L_2^-$ уравнение (11.2.17) имеет одно устойчивое состояние равновесия O_3 и седло-узел O_{12} с отрицательной первой ляпуновской величиной, как показано на рис. 11.2.8 (c).

Если $l_3 > 0$, то

- (1) в области D_3 уравнение (11.2.17) имеет три состояния равновесия — два неустойчивых (O_1 и O_3) и одно устойчивое (O_2), как показано на рис. 11.2.9 (a);
- (2) вне клина (т.е. в D_1) уравнение (11.2.17) имеет только одно неустойчивое состояние равновесия, как показано на рис. 11.2.9 (b);
- (3) когда $\mu \in L_1^+$, уравнение (11.2.17) имеет одно неустойчивое состояние равновесия O_1 и одно полуустойчивое состояние равновесия $O_{2,3}$ с положительной первой ляпуновской величиной, как показано на рис. 11.2.9 (c); и
- (4) когда $\mu \in L_2^+$, уравнение (11.2.17) имеет одно неустойчивое состояние равновесия O_3 и полуустойчивое состояние равновесия $O_{1,2}$, как показано на рис. 11.2.9 (d).

Бифуркация в двумерном случае проиллюстрирована на рис. 11.2.11 и 11.2.12 для случаев $l_3 < 0$ и $l_3 > 0$ соответственно.

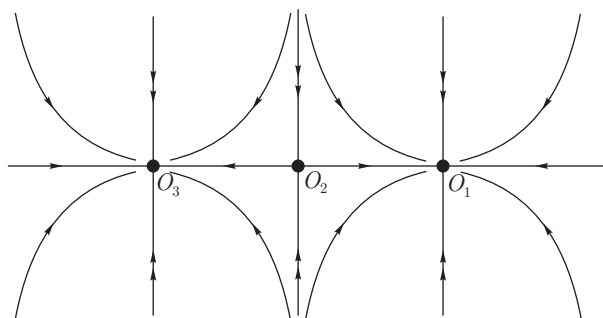
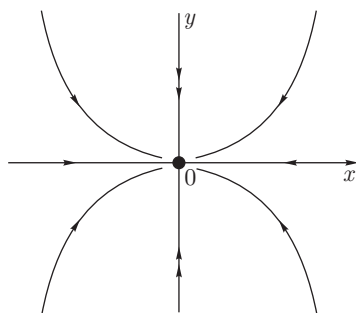
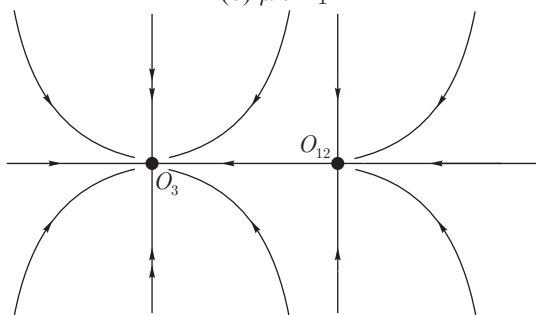
(a) $\mu \in D_3$ (b) $\mu \in D_1$ (c) $\mu \in L_2^-$

Рис. 11.2.11. Фазовые портреты, соответствующие бифуркационной диаграмме на рис. 11.2.10 (a)

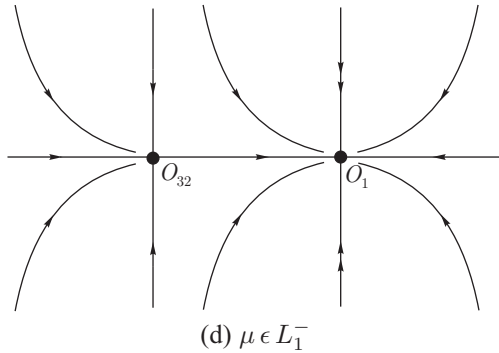


Рис. 11.2.11. Продолжение

В случае $l_3 > 0$ центральное состояние равновесия устойчиво при $\mu \in D_3$. При $l_3 < 0$ характер области устойчивости становится менее тривиальным: а именно, она становится многолистной (см. рис. 11.2.13). Следует отметить, что граница устойчивости в начале координат не гладкая.

Предположим теперь, что $l_2 = l_3 = 0$ и $l_4 \neq 0$. Тогда трансверсальное семейство принимает вид

$$\dot{x} = \mu_1 + \mu_2 x + \mu_3 x^2 + l_4 x^4 + o(x^4). \quad (11.2.27)$$

Здесь пространство параметров разделено на три области: D_0 , D_2 и D_4 , примыкающие к началу координат. Когда $\mu \in D_4$, уравнение (11.2.27) имеет четыре грубых состояния равновесия, два из которых устойчивы и два — неустойчивы; при $\mu \in D_2$ уравнение имеет два грубых состояния равновесия, одно устойчивое, а другое неустойчивое; при $\mu \in D_0$ состояний равновесия нет.

Поверхность бифуркации, разделяющая эти области, называется ласточкин хвост (см. рис. 11.2.14 для $l_4 > 0$). Она имеет линию самопересечения

$$\mu_3 = -2l_4 \sqrt{\mu_1/l_4} + o(\sqrt{|\mu_1|}), \quad \mu_2 = o(|\mu_1|^{3/4}),$$

которая соответствует существованию пары полуустойчивых состояний равновесия в уравнении (11.2.27), и два ребра (линии сборки)

$$\mu_1 = -\mu_3^2/12l_4 + o(\mu_3^2), \quad \mu_2 = \pm \sqrt{-8\mu_3^3/27l_4} + o(|\mu_3|^{3/2}),$$

которые соответствуют существованию тройного состояния равновесия, третья ляпуновская величина в котором положительна, если $\mu_2 > 0$, и от-

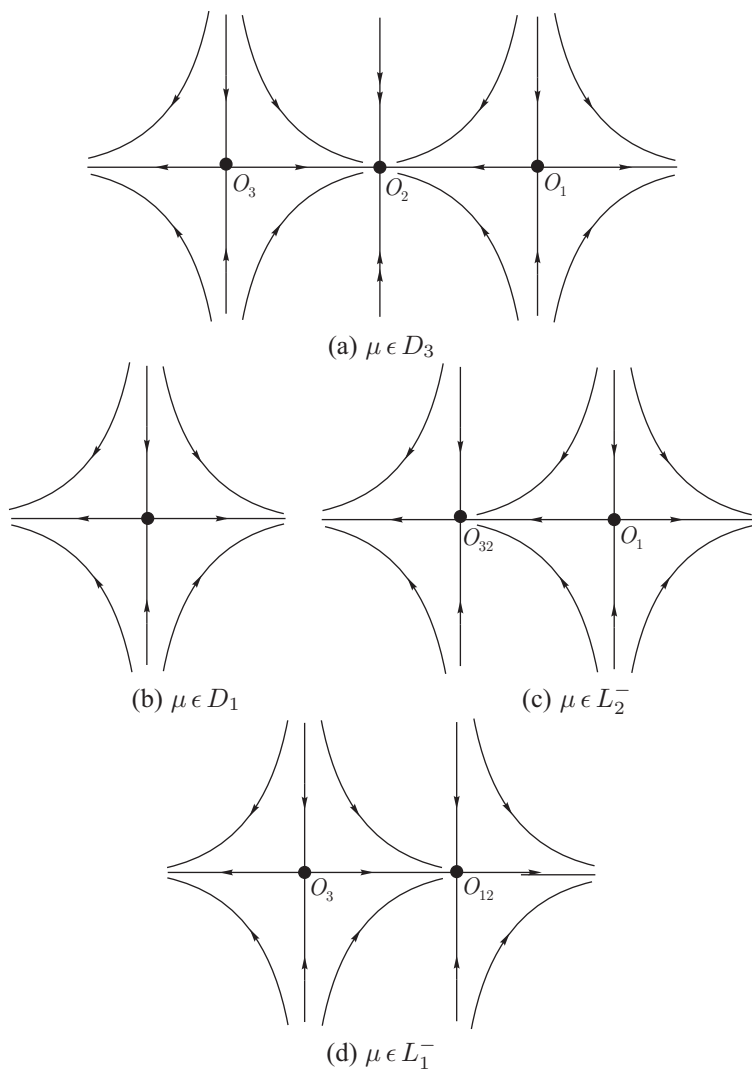


Рис. 11.2.12. Фазовые портреты, соответствующие бифуркационной диаграмме на рис. 11.2.10 (b)

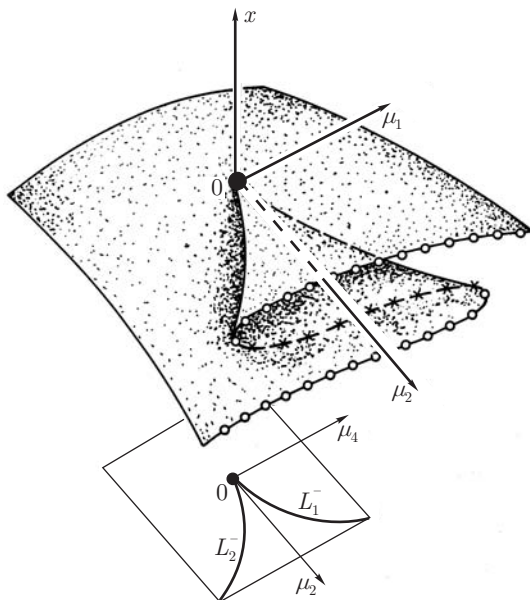


Рис. 11.2.13. Топология бифуркационного множества в расширенном фазовом пространстве

рицательна, если $\mu_2 < 0$. Вне линии самопересечения и ребер значения параметра на бифуркационной поверхности соответствуют одному устойчивому состоянию равновесия.

Случай $l_2 = \dots = l_{k-1} = 0$, $l_k \neq 0$ рассматривается аналогичным образом при любых k . Он сводится к анализу корней уравнения

$$0 = \mu_1 + \dots + \mu_{k-1}x^{k-2} + l_kx^k + \tilde{G}(x, \mu). \quad (11.2.28)$$

Строго говоря, последняя задача относится к теории особенностей, и мы не будем подробно ее рассматривать. Поскольку k -я производная правой части (11.2.28) не обращается в нуль при малых x , число корней этого уравнения не может превышать k (считая с кратностями), т.е. исходное состояние равновесия может разваливаться не более чем на k состояний равновесия.

Бифуркационное множество в пространстве $(\mu_1, \dots, \mu_{k-1})$ соответствует состояниям равновесия различной степени вырождения. Самопересечения бифуркационной поверхности соответствуют наличию двух или

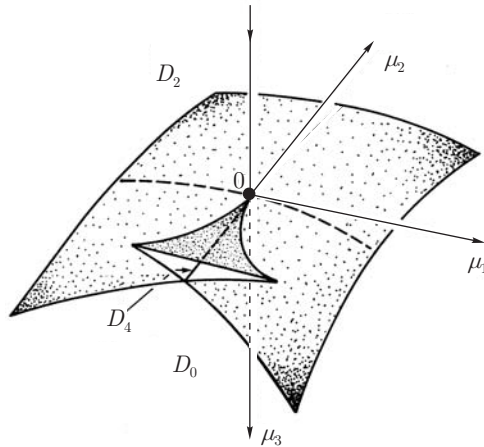


Рис. 11.2.14. Бифуркационная поверхность известная как «ласточкин хвост». См. пояснения в тексте

более негрубых состояний равновесия. Для нахождения бифуркационной поверхности полезно провести перенормировку координат и параметров. В частности, пусть

$$\delta = \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i^{1/(k+1-i)}, \quad M_i = \mu_i / \delta^{k+1-i}.$$

Далее, после замены $x \rightarrow \delta x$ уравнение (11.2.28) принимает вид

$$0 = \sum_{i=1}^{k-1} M_i x^{i-1} + l_k x^k + \dots, \quad (11.2.29)$$

где многочотия обозначают члены, которые стремятся к нулю при $\delta \rightarrow 0$; x и $M_1, \dots, M_{k-1}$ уже не малы, и $\sum_{i=1}^{k-1} M_i^{1/(k+1-i)} = 1$.

Можно показать, что анализ уравнения (11.2.29) равносильен анализу укороченного уравнения

$$0 = \sum_{i=1}^{k-1} M_i x^{i-1} + l_k x^k \quad (11.2.30)$$

(после возвращения к неперемасштабированным координатам это означает, что структура бифуркационного множества и фазового портрета уравне-

ния (11.2.25) такая же, как и у полиномиального семейства $\dot{x} = \mu_1 + \dots + \mu_{k-1}x^{k-2} + l_kx^k$.

Пусть $(M_1^*, \dots, M_{k-1}^*)$ — точка бифуркации для (11.2.30), т. е. она отвечает существованию одного или более кратных корней. В этой точке семейство (11.2.30) находится в общем положении относительно заданной бифуркации. Применяя теорему о неявной функции, можно убедиться, что если δ достаточно мало, то определена кривая $\{M_i(\delta) = M_i^* + \dots\}_{i=1, \dots, k-1}$, отвечающая такой же бифуркации в уравнении (11.2.29). Таким образом, бифуркационное множество состоит из кривых с асимптотикой

$$\mu_i \sim M_i^* \delta^{k+1-i}. \quad (11.2.31)$$

Можно показать больше; а именно оказывается, что для любой бифуркации коразмерности s не равно нулю по крайней мере одно из значений M_i^* с $i \geq s+1$. Это означает, что часть бифуркационного множества, которая соответствует бифуркациям коразмерности s , состоит из поверхностей (примыкающих к $\mu = 0$) вида

$$\mu_j = \psi_j(\mu_{s+1}, \dots, \mu_{k-1}) \quad (j = 1, \dots, s), \quad (11.2.32)$$

где ψ_j удовлетворяет отношению

$$|\psi_j|^{1/(k+1-j)} \leq C \sum_{i=s+1}^{k-1} |\mu_i|^{1/(k+1-s)} \quad (11.2.33)$$

(здесь C — просто константа, не зависящая от s и j). Таким образом, например, ласточкин хвост лежит полностью внутри «конуса»

$$|\mu_1| \leq C(|\mu_2|^{4/3} + |\mu_3|^2),$$

а ребра и линия самопересечения на нем (это кривые коразмерности два) удовлетворяют неравенствам

$$|\mu_1| \leq C|\mu_3|^2, \quad |\mu_2| \leq C|\mu_3|^{3/2}.$$

В заключение отметим, что на практике часто случается, что уравнение на центральном многообразии таково, что управляющие параметры не входят общим образом. Например, если система инвариантна по отношению к симметрии $x \rightarrow -x$, то уравнение на центральном многообразии

имеет такую же симметрию. Следовательно, правая часть системы на центральном многообразии будет содержать только члены с четными степенями x . Тогда соответствующее трансверсальное семейство можно представить в виде

$$\dot{x} = \mu x + l_3 x^3 + o(x^3).$$

Если $l_3 \neq 0$, то достаточно одного параметра μ . Зависимость координат от μ для случая $l_3 < 0$ проиллюстрирована на рис. 12.2.15. Когда μ становится положительным, тривиальное состояние равновесия теряет устойчивость и порождает два новых устойчивых равновесия.

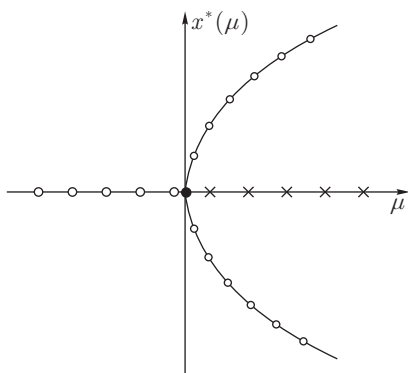


Рис. 11.2.15. Координаты состояния равновесия в зависимости от параметра μ в бифуркации вилки (типичной для симметричных систем)

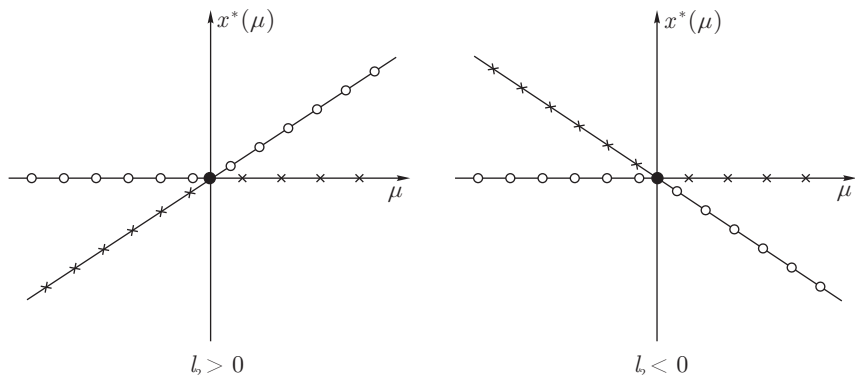


Рис. 11.2.16. Координаты состояний равновесия при транскритической бифуркации. Ни одно из состояний равновесия не исчезает; они обмениваются устойчивостью

Другой часто встречающийся на практике механизм — когда априори известно, что состояние равновесия не исчезает при бифуркации. Если оно находится в начале координат, трансверсальное семейство имеет вид

$$\dot{x} = \mu x + l_2 x^2 + o(x^2).$$

Если $l_2 \neq 0$, бифуркация развивается следующим образом (см. рис. 11.2.16): при $\mu \rightarrow -0$ неустойчивое состояние равновесия приближается к устойчивому в начале координат; когда μ проходит через нуль, тривиальное состояние равновесия становится неустойчивым, в то время как нетривиальное становится устойчивым, т. е. имеет место так называемый обмен устойчивости. Такая бифуркация называется транскритической.

11.3. Бифуркации периодических орбит с мультипликатором, равным +1

Рассмотрим семейство $\mathbb{C}^r$ -отображений ($r \geq 2$), которые имеют неподвижную точку с одним мультипликатором, равным +1 при нулевом значении параметра; остальные мультипликаторы находятся внутри единичной окружности. В этом случае отображение вблизи неподвижной точки записывается в виде

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x + g(x, y, \varepsilon), \\ \bar{y} &= Ay + f(x, y, \varepsilon),\end{aligned}\tag{11.3.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^1$, $y \in \mathbb{R}^n$, характеристические числа матрицы A , лежат внутри единичной окружности, f и g — такие $\mathbb{C}^r$ -гладкие функции, что f и g обращаются в нуль при $x = 0$, $y = 0$, $\varepsilon = 0$ вместе с их первыми производными по x и по y .

В силу теоремы редукции существуют $\mathbb{C}^{r-1}$ -координаты, в которых семейство (11.3.1) сводится к виду

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x + G(x, \varepsilon), \\ \bar{y} &= [A + F(x, y, \varepsilon)]y,\end{aligned}\tag{11.3.2}$$

где G — $\mathbb{C}^r$ -функция и f — $\mathbb{C}^{r-1}$ -функция такие, что

$$\begin{aligned}F(0, 0, 0) &= 0, \\ G(0, 0) &= 0, \\ G'_x(0, 0) &= 0.\end{aligned}\tag{11.3.3}$$

Так как динамика переменных y тривиальна — они экспоненциально стремятся к началу координат, то для нас достаточно рассмотреть только бифуркации системы (11.3.2), ограниченной на центральное многообразие

$$\bar{x} = x + G(x, \varepsilon). \quad (11.3.4)$$

В силу (11.3.3) функция G при $\varepsilon = 0$ имеет по крайней мере второй порядок малости по x . Если k — порядковый номер первой отличной от нуля ляпуновской величины, то функция G при $\varepsilon = 0$ имеет вид

$$G(x, 0) = l_k x^k + o(x^k), \quad (11.3.5)$$

где $l_k \neq 0$. В наиболее типичном случае k равно 2, и отсюда $G(x, 0) = l_2 x^2 + o(x^2)$.

Поскольку $G'_x(x, \varepsilon)$ мала, то и x и ε также малы и правая часть (11.3.4) является монотонно возрастающей функцией от x . Неподвижные точки отображения (11.3.4) находятся из условия $G(x, \varepsilon) = 0$; их устойчивость определяется знаком производной $G'_x(x, \varepsilon)$: если эта производная в неподвижной точке положительна, последняя неустойчива; если производная отрицательна, неподвижная точка устойчива. Другими словами, имеется полная аналогия с семейством дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = G(x, \varepsilon),$$

т. е. бифуркации неподвижной точки с единичным мультипликатором совпадают с бифуркациями состояния равновесия с нулевым характеристическим показателем.

Таким образом, мы можем просто использовать результаты предыдущего параграфа. Так, если семейство (11.3.4) находится в общем положении (т. е. матрица (11.2.18) имеет максимальный ранг; если $l_2 \neq 0$, это условие сводится к неравенству (11.2.9)), то множество значений параметра, которое отвечает существованию неподвижной точки с единичным мультипликатором и нулевыми ляпуновскими величинами $l_2, \dots, l_{k-1}$, образует $\mathbb{C}^{r-(k-1)}$ -гладкую поверхность $\mathcal{M}'$ коразмерности $(k-1)$, которая проходит через $\varepsilon = 0$. Семейства отображений, трансверсальных к $\mathcal{M}'$, можно привести к виду

$$\bar{x} = x + G(x, \mu) = x + \mu_1 + \mu_2 x + \dots + \mu_{k-1} x^{k-2} + l_k x^k + o(x^k) \quad (11.3.6)$$

(чтобы получить этот вид, необходимо сдвинуть начало координат в точку x^* , где производная $G^{(k-1)}$ обращается в нуль; поскольку k -я производная от G по x не обращается в нуль, точка x^* определена однозначно и $\mathbb{C}^{r-(k-1)}$ -гладко зависит от параметров).

В предыдущем параграфе мы уже отмечали, что изучение нулей функции G равносильно изучению нулей полинома

$$\mu_1 + \mu_2 x + \dots + \mu_{k-1} x^{k-2} + l_k x^k.$$

Мы не обсуждаем далее общий случай и будем рассматривать только бифуркации небольших коразмерностей.

1. $l_2 \neq 0$. Трансверсальное семейство одномерных отображений в этом случае принимает вид

$$\bar{x} = x + \mu + l_2 x^2 + o(x^2). \quad (11.3.7)$$

Диаграмма Ламерея для случаев $l_2 > 0$ и $l_2 < 0$ показана на рис. 11.3.1 и 11.3.2 соответственно. Когда $l_2 \mu < 0$, существуют две неподвижные точки $x^\pm = \sqrt{-\mu/l_2} + o(\sqrt{\mu})$; при $\mu = 0$ существует только одна негрубая точка; когда $l_2 \mu > 0$, неподвижных точек вообще нет, и все траектории выходят из окрестности после конечного числа итераций (порядка $\sqrt{\mu/l_2}$).

Зависимость координат неподвижной точки от μ приведена на рис. 11.2.2. Для размерностей больше 1 фазовый портрет исходного отображения (11.3.1) для различных μ показан на рис. 11.3.3 и 11.3.4.

Когда отображение (11.3.1) является отображением Пуанкаре вблизи периодической орбиты некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений, рассматриваемая неподвижная точка соответствует седло-узловой периодической орбите (при $\mu = 0$). Фазовые портреты для этого случая показаны на рис. 11.3.5–11.3.7.

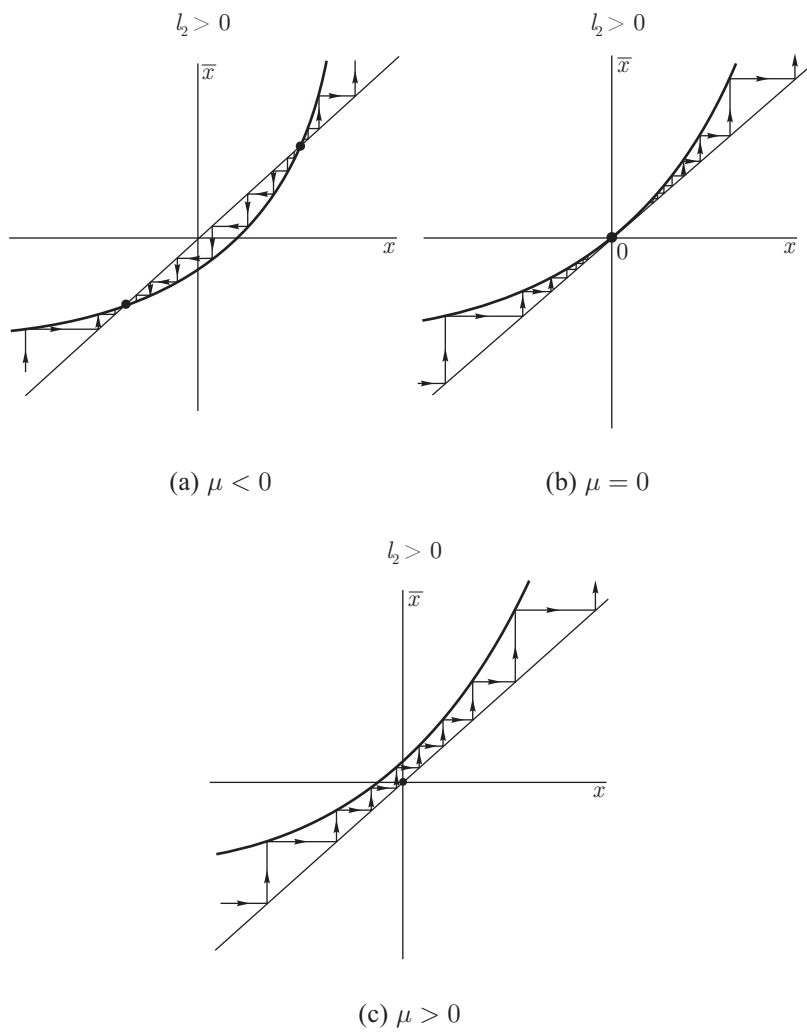
2. $l_2 = 0, l_3 \neq 0$. Трансверсальное семейство в этом случае принимает вид

$$\bar{x} = x + \mu_1 + \mu_2 x + l_3 x^3 + o(x^3). \quad (11.3.8)$$

Бифуркации показаны на рис. 11.3.8 ($l_3 < 0$) и 11.3.9 ($l_3 > 0$). Бифуркационные кривые $L^\pm$, соответствующие неподвижной точке типа седло-узел [т. е. кратному корню уравнения $G(x, \mu) = 0$], задаются уравнением

$$27\mu_1^2 + \frac{4\mu_2^3}{l_3} + o(\mu_2^3) = 0.$$

В области D_3 отображение (11.3.8) имеет три грубые неподвижные точки: две устойчивые и одну неустойчивую, если $l_3 < 0$, или две неустойчивые и одну устойчивую, если $l_3 > 0$. В области D_1 существует единственная неподвижная точка: устойчивая, если $l_3 < 0$, и неустойчивая в противном случае. Рисунки 11.3.10 и 11.3.11 представляют диаграмму Ламерея для перехода через L_1 и L_2 для обоих знаков l_3 . Рисунки 11.3.12 и 11.3.13 представляют соответствующие двумерные случаи.

Рис. 11.3.1. Лестница Ламерея для случая $l_2 > 0$

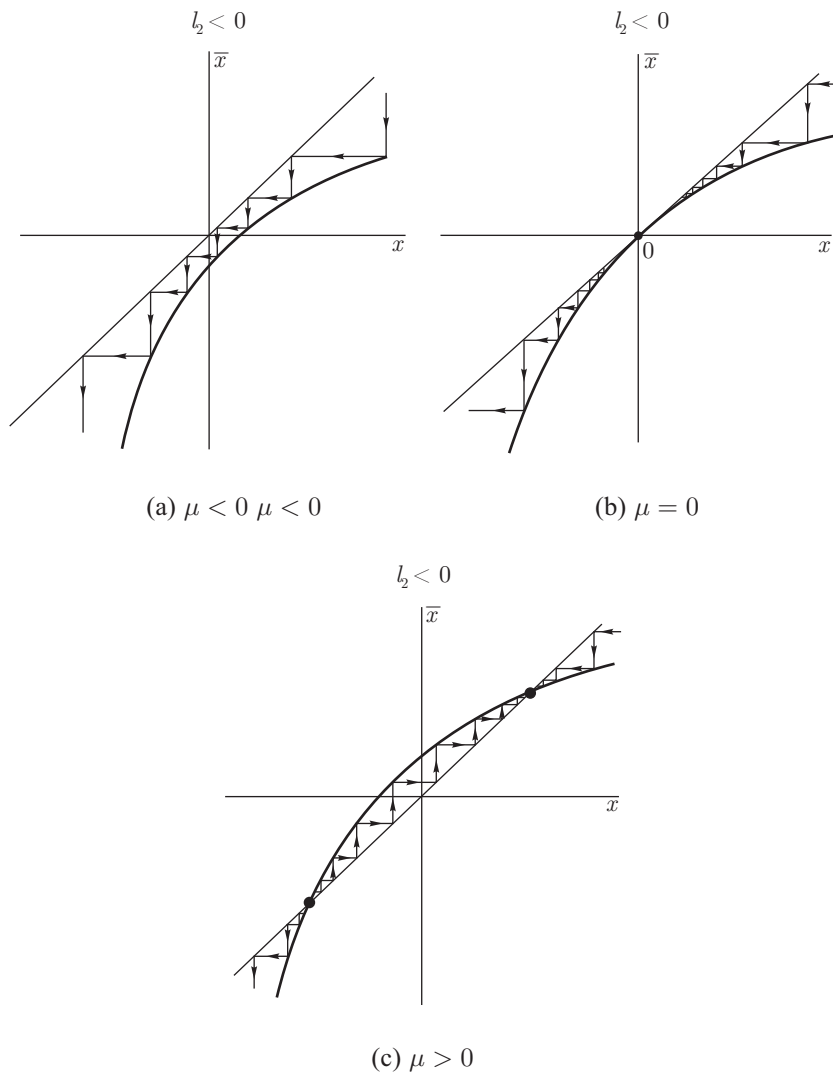
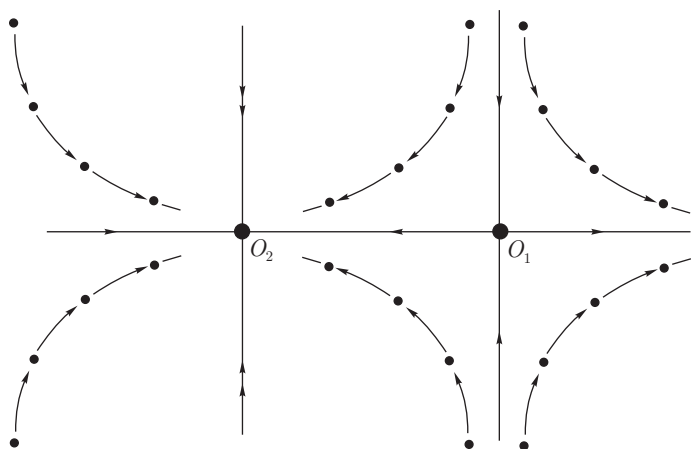
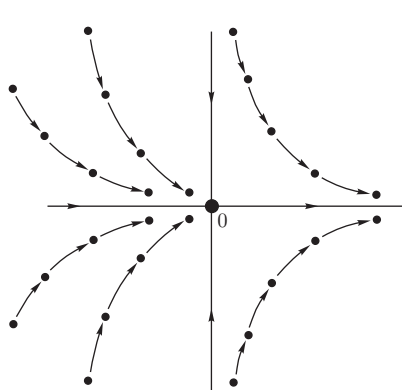
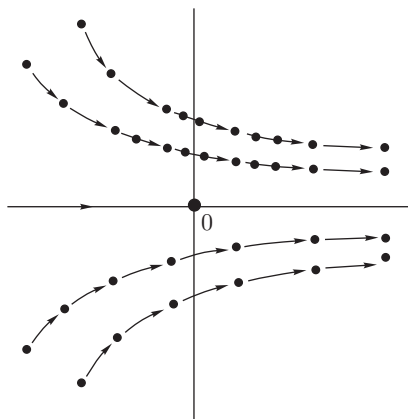


Рис. 11.3.2. Лестница Ламерея для случая $l_2 < 0$

(a) $\mu < 0$ (b) $\mu = 0$ (c) $\mu > 0$ Рис. 11.3.3. Бифуркации седло-узловой неподвижной точки в случае $l_2 > 0$

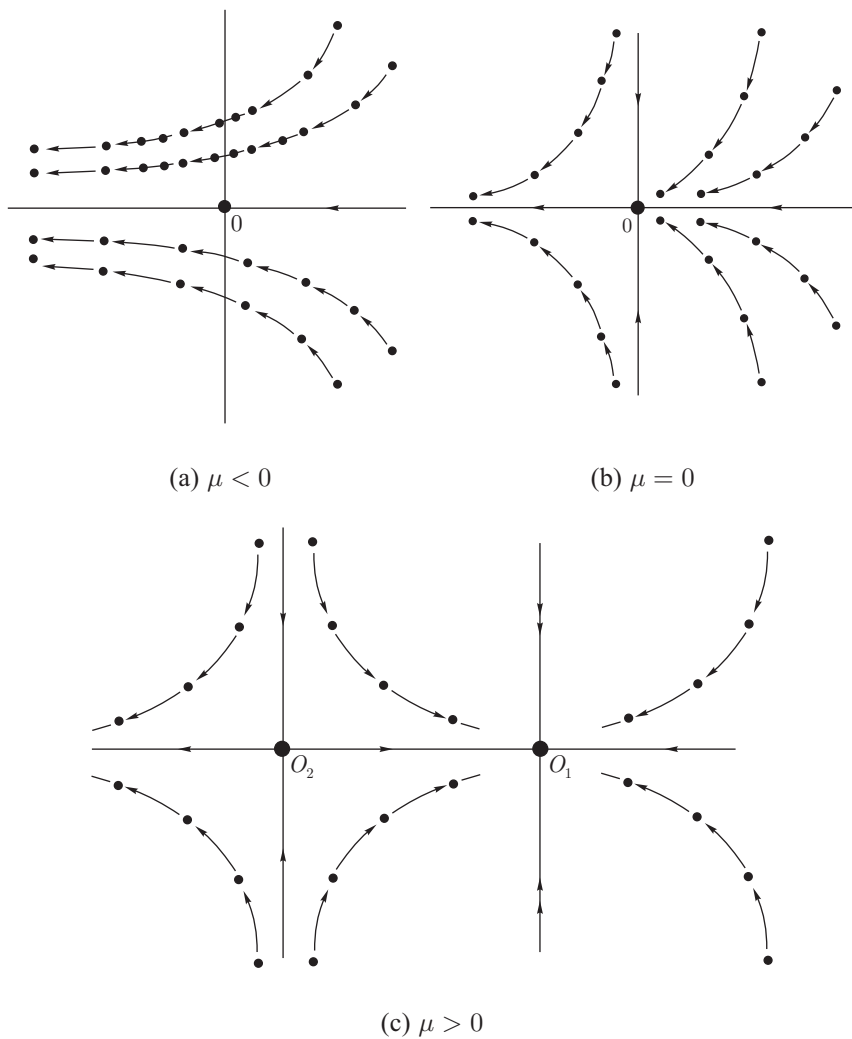


Рис. 11.3.4. Бифуркации седло-узловой неподвижной точки в случае $l_2 < 0$

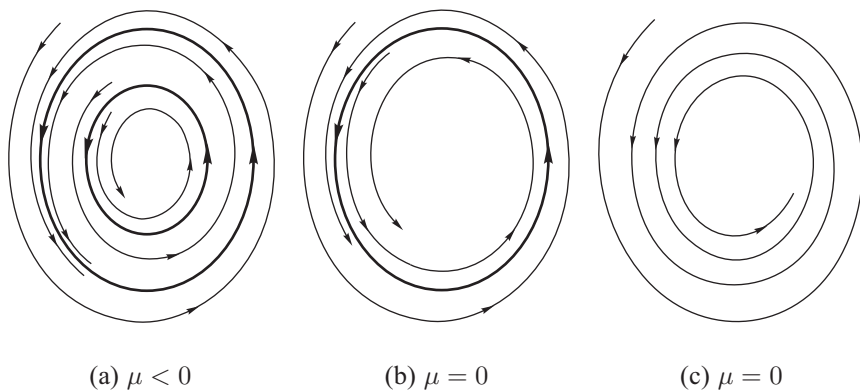


Рис. 11.3.5. Бифуркация седло-узлового предельного цикла на плоскости для случая $l_2 > 0$. Полуустойчивый цикл (b) является притягивающим во внешней области и отталкивающим во внутренней области

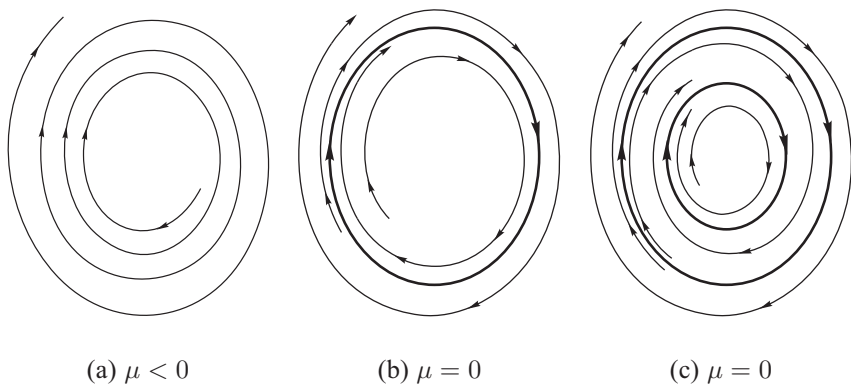


Рис. 11.3.6. Бифуркация седло-узлового предельного цикла на плоскости для случая $l_2 < 0$. Все так же, как и на рис. 11.3.5, с точностью до $\mu \rightarrow -\mu$. С ростом μ седло-узловой цикл появляется из сгущения траекторий

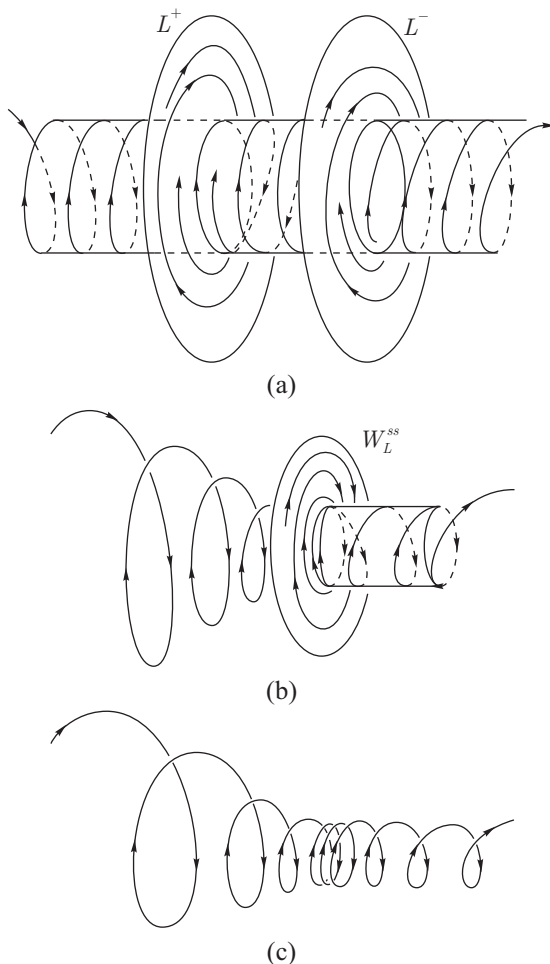


Рис. 11.3.7. Сценарий седло-узловой бифуркации периодических орбит в $\mathbb{R}^3$. Устойчивая периодическая орбита и седловая периодическая орбита (а) при $\mu = 0$ сливаются в одну седло-узловую периодическую орбиту (б), а затем исчезают в (с). Неустойчивое многообразие седло-узловой орбиты (б) гомеоморфно полуцилиндру. Траектория в (с) замедляется в том месте, где была седло-узловая периодическая орбита, так что ее средний сегмент похож на сжатую пружину

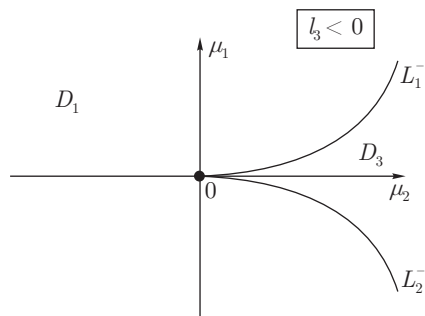


Рис. 11.3.8. Бифуркационная диаграмма для $l_2 = 0$ и $l_3 > 0$

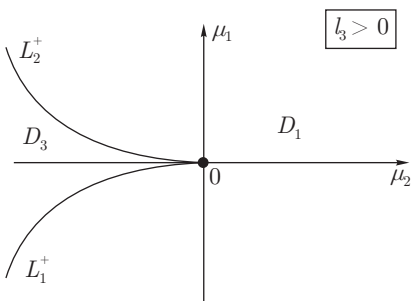
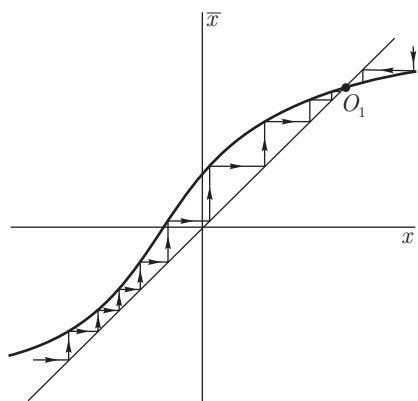
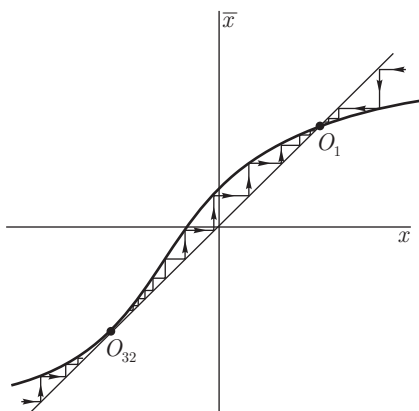


Рис. 11.3.9. Бифуркационная диаграмма для $l_2 = 0$ и $l_3 < 0$

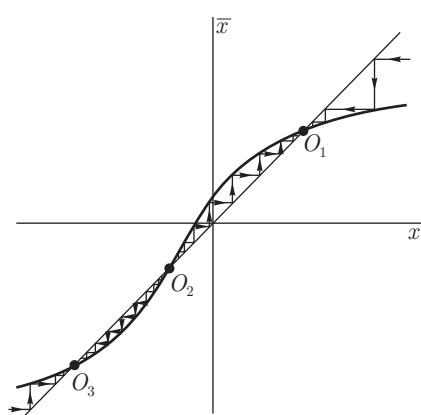


(a) $\mu \in D_1$

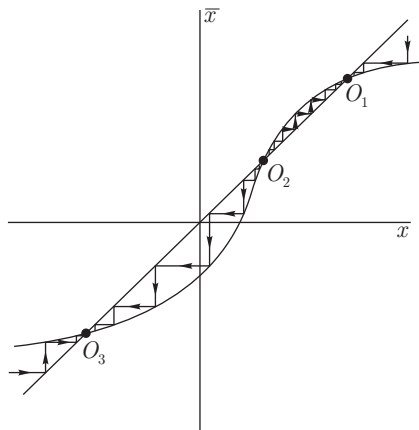


(b) $\mu \in L_1^-$

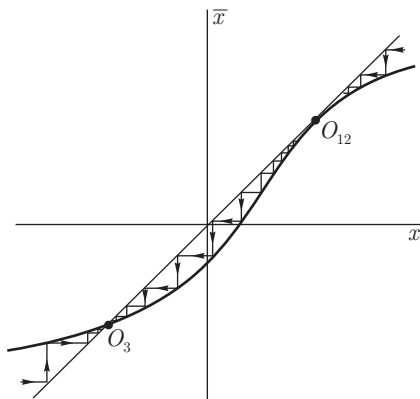
Рис. 11.3.10. Бифуркации неподвижных точек, отвечающие диаграмме на рис. 11.3.8



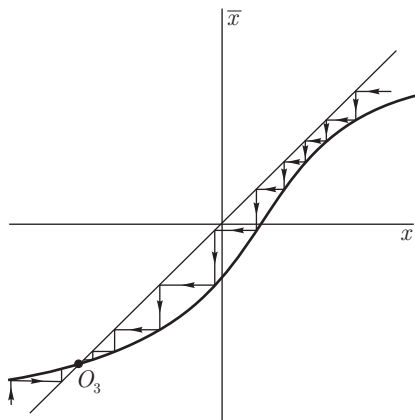
(c) $\mu \in D_3$



(d) $\mu \in D_3$



(e) $\mu \in L^{-}_2$



(f) $\mu \in D_1$

Рис. 11.3.10. Продолжение

$$l_3 > 0$$

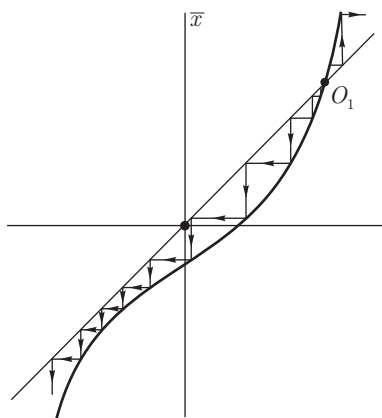
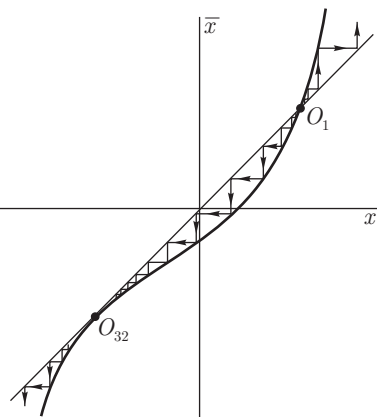
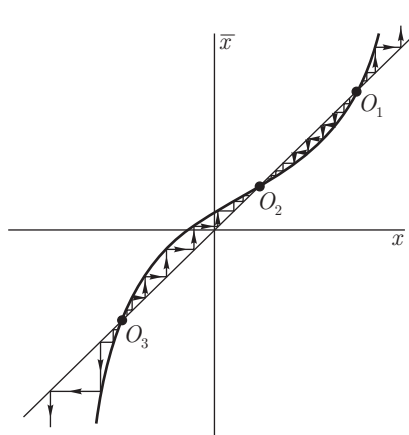
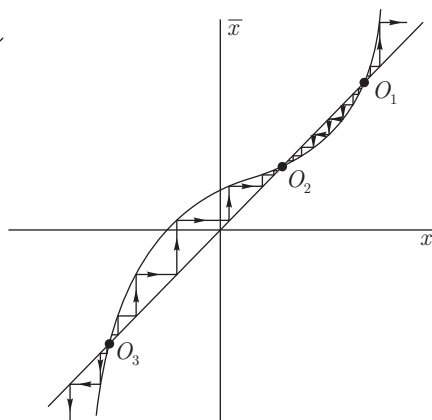
(a) $\mu \in D_1$ (b) $\mu \in L_1^+$ (c) $\mu \in D_3$ (d) $\mu \in D_3$

Рис. 11.3.11. Бифуркации неподвижных точек, отвечающие диаграмме на рис. 11.3.9

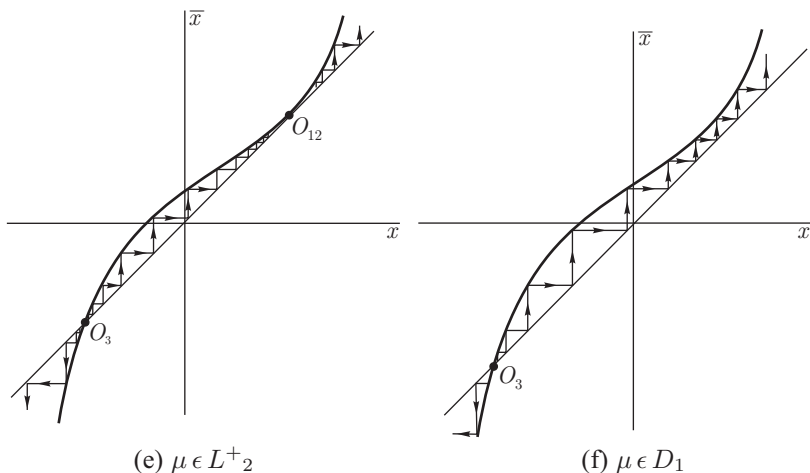
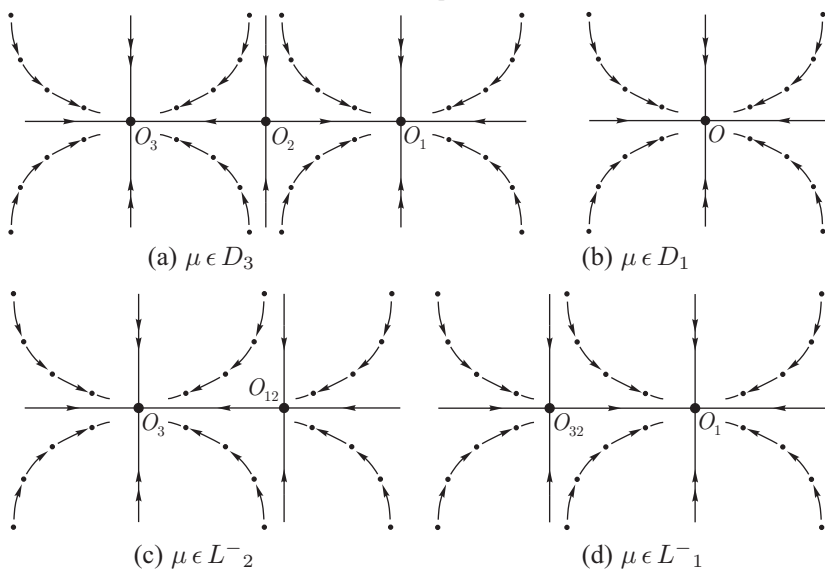


Рис. 11.3.11. Продолжение


 Рис. 11.3.12. Бифуркации неподвижных точек на плоскости для случая $l_2 = 0$ и $l_3 < 0$

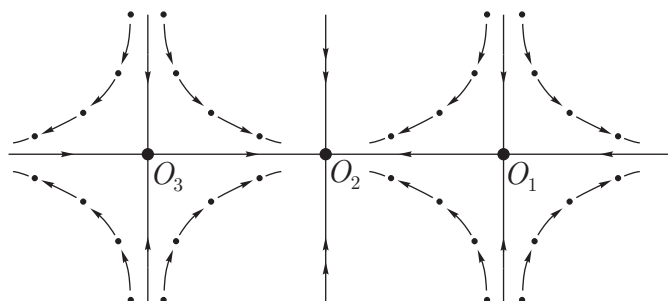
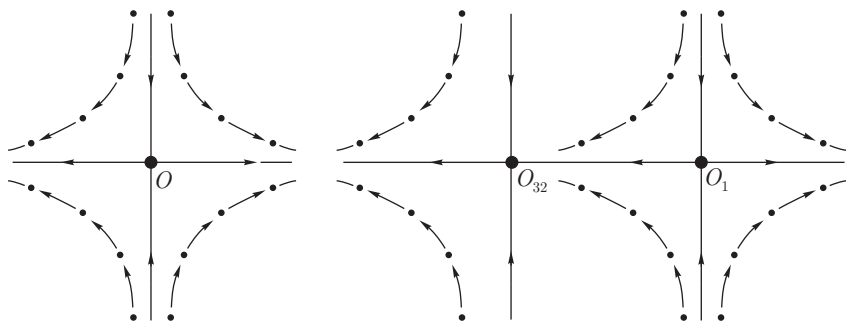
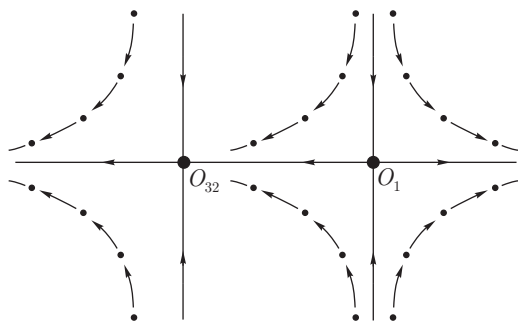
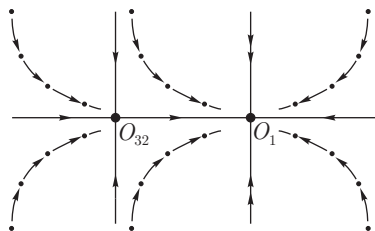
(a) $\mu \in D_3$ (b) $\mu \in D_1$ (c) $\mu \in L_1^+$ (d) $\mu \in L_2^+$

Рис. 11.3.13. Бифуркации неподвижных точек на плоскости для случая $l_2 = 0$ и $l_3 > 0$

11.4. Бифуркации периодических орбит с мультипликатором -1

Рассмотрим семейство отображений класса $\mathbb{C}^r (r \geq 3)$, которое имеет неподвижную точку с одним мультипликатором, равным (-1) при нулевом значении параметра. Поскольку предполагается, что остальные мультипликаторы находятся внутри единичной окружности, отображение вблизи неподвижной точки принимает вид

$$\begin{aligned}\bar{x} &= -x + G(x, y, \varepsilon), \\ \bar{y} &= (A + F(x, y, \varepsilon))y,\end{aligned}\tag{11.4.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^1$, $y \in \mathbb{R}^n$, характеристические числа матрицы A , лежат внутри единичной окружности, G — $\mathbb{C}^r$ -функция, F — $\mathbb{C}^{r-1}$ -функция и

$$\begin{aligned}F(0, 0, 0) &= 0, \\ G'_x(0, 0) &= 0.\end{aligned}\tag{11.4.2}$$

Рассмотрим отображение на центральном многообразии

$$\bar{x} = -x + G(x, \varepsilon).\tag{11.4.3}$$

Поскольку производная правой части отображения (11.4.3) не обращается в нуль (при $x = 0$, $\varepsilon = 0$ она равна -1), неподвижная точка сохраняется (и остается единственной) при всех малых ε . Без потери общности предположим, что неподвижная точка расположена в начале координат, т. е.

$$G(0, \varepsilon) \equiv 0.\tag{11.4.4}$$

В параграфе 10.6 было показано, что при $\varepsilon = 0$ все четные степени x в разложении Тейлора для G являются нерезонансными. Поэтому их можно убить вплоть до любого порядка посредством полиномиальных преобразований. Очевидно, что эти члены остаются нерезонансными также и при малых $\varepsilon \neq 0$, т. е. при всех малых ε их тоже можно убить вплоть до любого порядка посредством полиномиального преобразования с коэффициентами, гладко зависящими от ε .

В общем случае первая ляпуновская величина l_1 отлична от нуля, т. е. функция G при $\varepsilon = 0$ начинается с членов третьего порядка

$$G(x, 0) = -l_1 x^3 + o(x^3).$$

Уничтожив члены x^2 при всех малых ε , отображение можно свести к виду

$$\bar{x} = -x(1 + l_0(\varepsilon) + l_1 x^2) + o(x^3),\tag{11.4.5}$$

где l_0 — $\mathbb{C}^{r-1}$ -гладкая функция от ε , $l_0(0) = 0$.

Граница $\mathfrak{M}$ области устойчивости неподвижной точки задается условием $l_0(\varepsilon) = 0$ и является $\mathbb{C}^{r-1}$ -гладкой поверхностью коразмерности один при условии, что вектор $(\partial l_0/\partial \varepsilon_1, \dots, \partial l_0/\partial \varepsilon_p)_{\varepsilon=0}$ не нулевой. Выберем $l_0(\varepsilon)$ в качестве управляющего параметра μ . Тогда любое трансверсальное семейство имеет вид

$$\bar{x} = -x(1 + \mu + l_1 x^2) + \tilde{G}(x, \mu), \quad (11.4.6)$$

где $\tilde{G} = o(x^3)$ — $\mathbb{C}^r$ -гладкая функция от x и $\mathbb{C}^{r-2}$ -гладкая функция от μ такая, что

$$\tilde{G}(0, \mu) = \tilde{G}'_x(0, \mu) = \tilde{G}''_{xx}(0, \mu) = \tilde{G}'''_{xxx}(0, 0) = 0. \quad (11.4.7)$$

При всех достаточно малых x и μ отображение (11.4.6) имеет единственную неподвижную точку. Эта точка (в начале координат) устойчива, когда $\mu < 0$, и неустойчива, когда $\mu > 0$; когда $\mu \neq 0$, она не претерпевает бифуркаций. Кроме этой неподвижной точки, отображение (11.4.6) может иметь точки периода два. Следовательно, необходимо рассмотреть вторую итерацию отображения. Периодических точек с периодом более двух в отображении нет, так как вторая итерация (11.4.6) является монотонно возрастающим одномерным отображением — периодическими орбитами таких отображений могут быть только неподвижные точки.

Вторая итерация задается как

$$\bar{\bar{x}} = x(1 + 2\mu + \mu^2 + 2l_1 x^2) + \tilde{\tilde{G}}(x, \mu), \quad (11.4.8)$$

где

$$\tilde{\tilde{G}}(0, \mu) = \tilde{\tilde{G}}'_x(0, \mu) = \tilde{\tilde{G}}''_{xx}(0, \mu) = \tilde{\tilde{G}}'''_{xxx}(0, 0) = 0. \quad (11.4.9)$$

Отличные от нуля неподвижные точки второй итерации находятся из уравнения

$$\mu(1 + \mu/2) + l_1 x^2 + \tilde{\tilde{G}}(x, \mu)/2x = 0.$$

Это уравнение аналогично уравнению, описывающему координаты неподвижных точек, которые возникают при бифуркации седло-узла (см. (11.2.12)). Соответственно можно проверить, что при $\mu l_1 > 0$ уравнение не имеет действительных корней, а при $\mu l_1 < 0$ оно имеет два корня с противоположными знаками; а именно:

$$x^\pm(\mu) = \pm \sqrt{|\mu/l_1|} + o(\sqrt{|\mu|}).$$

Для отображения (11.4.7) пара (x^+, x^-) составляет орбиту периода два. Ее мультипликатор находится дифференцированием правой части (11.4.8) и равен

$$\rho = 1 + 2\mu + 6l_1 x^2 + o(\mu) + o(x^2) = 1 - 4\mu + o(\mu).$$

Поскольку в области существования точек периода два знак μ противоположен знаку l_1 , то при $l_1 > 0$ мультипликатор больше единицы и точки периода два неустойчивы. Соответственно, когда $l_1 < 0$, мультипликатор меньше единицы и точки периода два являются устойчивыми. Подытоживая, мы получаем, что:

- (1) Если $l_1 < 0$, то неподвижная точка в начале координат устойчива при $\mu \leq 0$ и притягивает все траектории из любой малой окрестности. Когда $\mu > 0$, неподвижная точка становится неустойчивой и от нее рождается устойчивая точка периода два; см. рис. 11.4.1, показывающий соответствующие диаграммы Ламерея.
- (2) Если $l_1 > 0$, то при $\mu < 0$ существует как устойчивая неподвижная точка O в начале координат, так и неустойчивая орбита периода два, ограничивающая область притяжения O ; при $\mu = 0$ орбита периода два сливается с O ; последняя становится неустойчивой, и все траектории, исключая O , покидают окрестность начала координат при $\mu \geq 0$, см. рис. 11.4.2.

Далее рассмотрим исходное отображение (11.4.1). Для наглядности мы ограничимся двумерным случаем. Отображение записывается в виде

$$\begin{aligned}\bar{x} &= -x(1 + \mu + l_1 x^2) + o(x^2), \\ \bar{y} &= \gamma(\mu)y + o(y),\end{aligned}$$

где $|\gamma(\mu)| < 1$. Если мы рассмотрим отображение Пуанкаре для трехмерного потока, то оно должно быть ориентируемым (сохраняющим ориентацию). Отсюда произведение мультипликаторов периодической орбиты должно быть положительным, т. е. $\gamma < 0$.

Если $l_1 < 0$, точка O является устойчивой (узел $(-)$) при $\mu \leq 0$. Когда μ становится положительным, точка O теряет устойчивость и превращается в седло $(-, -)$; это означает, что из начала координат рождается устойчивая орбита периода два. Фазовые портреты показаны на рис. 11.4.3.

Если $l_1 > 0$, то для всех достаточно малых отрицательных μ существует орбита (O_1, O_3) седлового типа $(+, +)$ периода два. Ее инвариантные устойчивое и неустойчивое многообразия ограничивают область притяжения неподвижной точки O_2 . Когда μ стремится к нулю, орбита периода два приближается к O и влипают в нее при $\mu = 0$. Когда $\mu > 0$, точка O становится седлом $(-, -)$ (см. рис. 11.4.4).

Особенностью этой бифуркации в случае периодических орбит автономной системы дифференциальных уравнений является то, что централь-

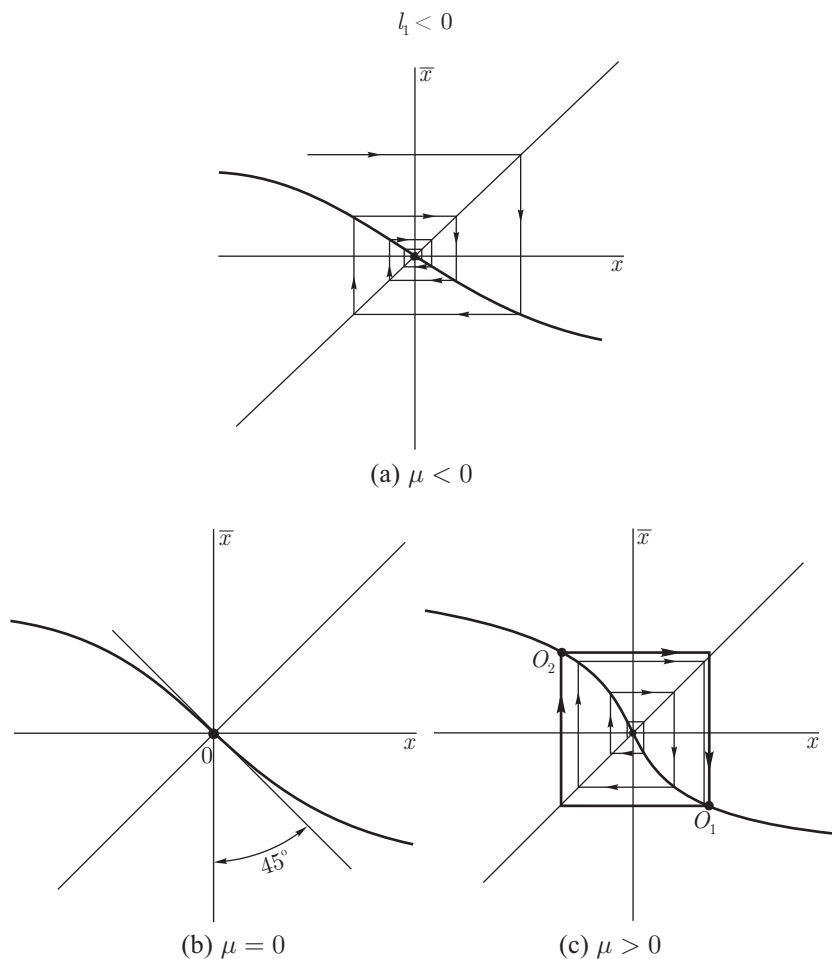


Рис. 11.4.1. Перестройки спирали Ламерея для случая $l_1 < 0$

ным многообразием периодической орбиты L , соответствующей неподвижной точке O отображения Пуанкаре, является лента Мёбиуса и, следовательно, новая орбита, которая при бифуркации возникает из L , должна дважды обвиваться вокруг L , как показано на рис. 11.4.5. Ясно, что период новой орбиты примерно вдвое больше периода L . Как следствие, эта бифурка-

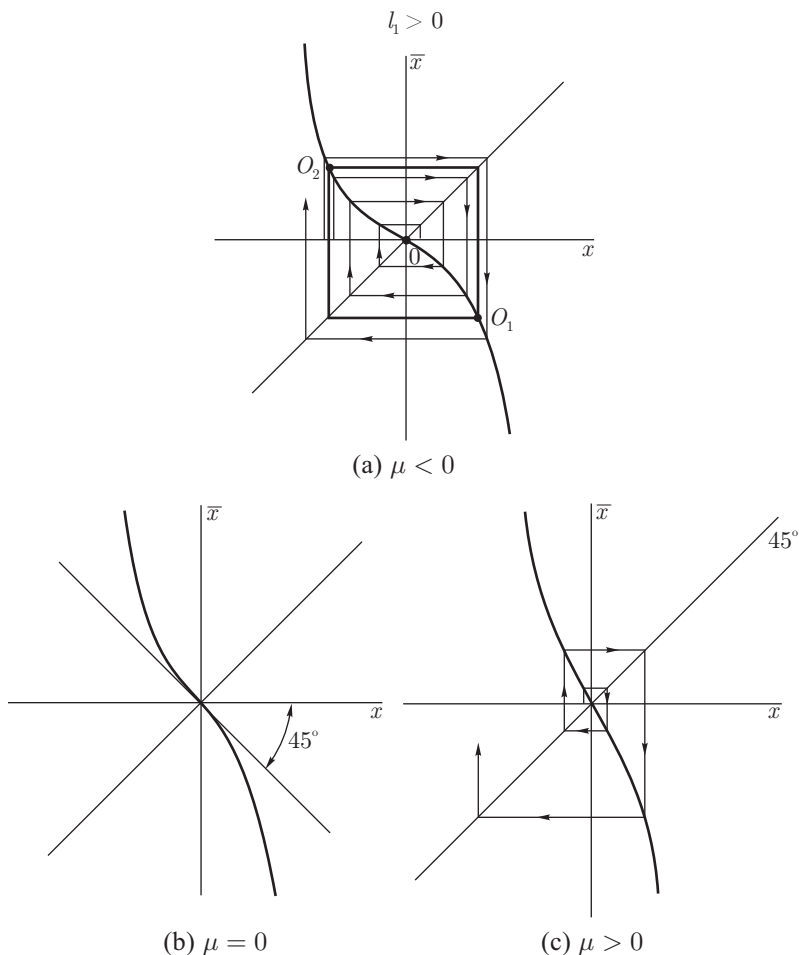


Рис. 11.4.2. Перестройки спирали Ламерея для случая $l_1 > 0$. Неустойчивый цикл периода два ограничивает область притяжения начала координат при $\mu < 0$

ция называется *бифуркацией удвоения периода*. Для неавтономных систем периода τ точки отображения Пуанкаре периода два отвечают двум периодическим орбитам с двойным периодом, при этом одна совпадает с другой при сдвиге фазы на τ .

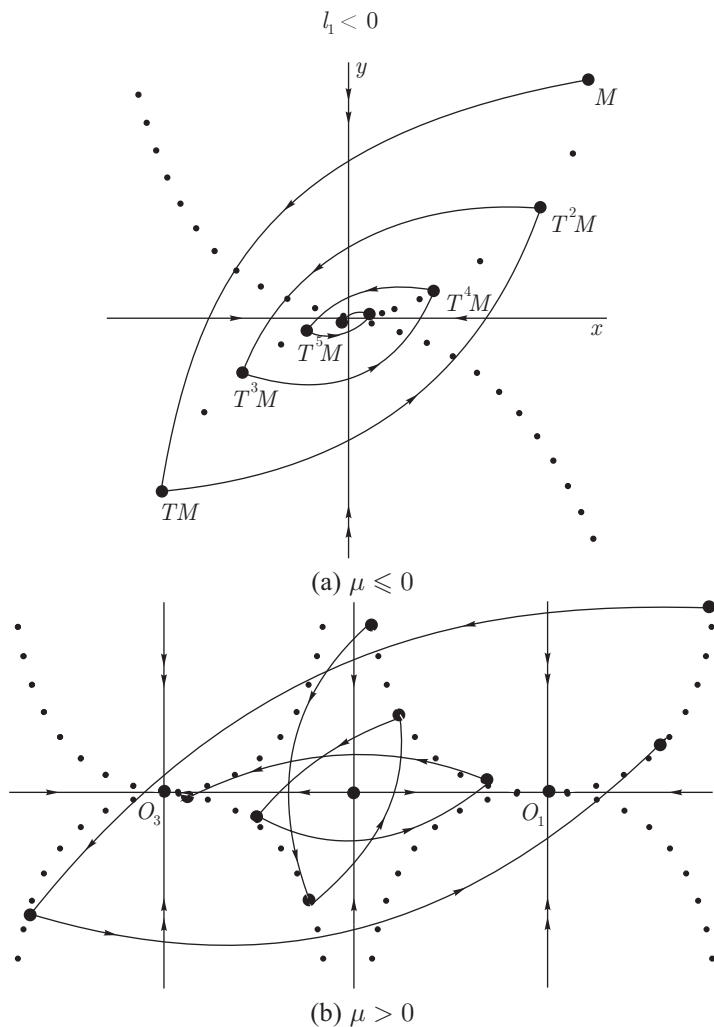


Рис. 11.4.3. Начало координат изначально является устойчивым узлом $(-)$. Каждая точка O_1 и O_3 в (b) является периодической периода два. Вдвоем они образуют устойчивый цикл периода два, рождающийся при бифуркации из начала координат, который становится седлом $(-, -)$

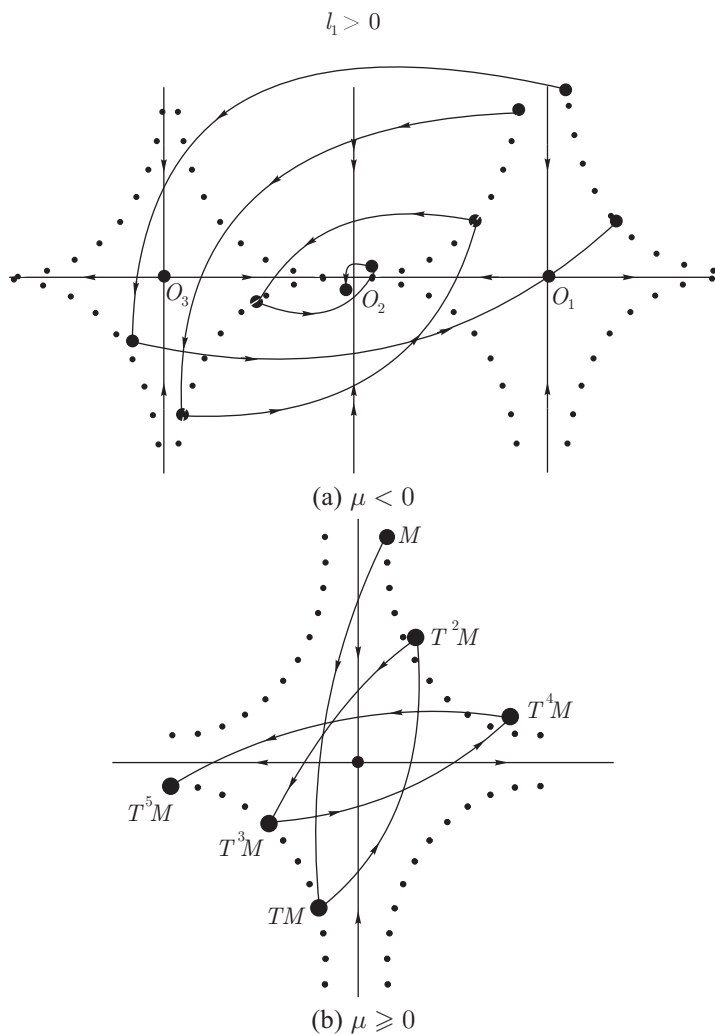


Рис. 11.4.4. Случай $l_1 > 0$. Устойчивый узел $(-)$ в начале координат окружен седловым циклом $(+, +)$ периода два. Когда цикл коллапсирует в начале координат, последний становится неустойчивым

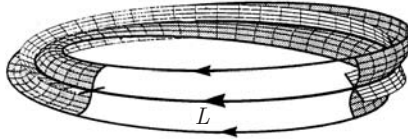


Рис. 11.4.5. Топология бифуркации удвоения периода. Неустойчивое многообразие исходной периодической орбиты L является лентой Мёбиуса, граница которой — устойчивая орбита периода два, которая только что возникла в результате бифуркации

Следующая бифуркация отвечает первой ляпуновской величине равной нулю. После уничтожения членов второго и четвертого порядка (предполагается, что гладкость r отображения не меньше 5) отображение приводится к виду

$$\bar{x} = -x(1 + l_0(\varepsilon) + l_1(\varepsilon)x^2 + l_2x^4) + o(x^5),$$

где $l_0(0) = l_1(0) = 0$, $l_2 \neq 0$. Бифуркационная поверхность $\mathfrak{M}$ в этом случае определяется уравнением

$$l_0(\varepsilon) = l_1(\varepsilon) = 0,$$

и при допущении, что условие общности положения

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \frac{\partial l_0}{\partial \varepsilon_1} & \cdots & \frac{\partial l_0}{\partial \varepsilon_p} \\ \frac{\partial l_1}{\partial \varepsilon_1} & \cdots & \frac{\partial l_1}{\partial \varepsilon_p} \end{pmatrix}_{\varepsilon=0} = 2$$

выполнено, это $\mathbb{C}^{r-3}$ -гладкая поверхность коразмерности два.

Таким образом, трансверсальное семейство зависит от двух параметров:

$$\bar{x} = -x(1 + \mu_0 + \mu_1x^2 + l_2x^4) + o(x^5). \quad (11.4.10)$$

При этом, как и выше, неподвижная точка единственна. Она устойчива, когда $\mu_0 < 0$, и неустойчива, когда $\mu_0 > 0$. При всех других малых $\mu_0 \neq 0$ она не претерпевает бифуркаций.

Для того чтобы найти точки периода два, рассмотрим вторую итерацию отображения

$$\bar{\bar{x}} = x(1 + \mu_0)^2 + \mu_1(1 + \mu_0)(2 + 2\mu_0 + \mu_0^2)x^3 + 2l_2x^5 + o(x^5). \quad (11.4.11)$$

Неподвижные точки этого отображения, отличные от $x = 0$, находятся как корни уравнения

$$2\mu_0 + \mu_0^2 + \mu_1(1 + \mu_0)(2 + 2\mu_0 + \mu_0^2)x^2 + 2l_2x^4 + o(x^4) = 0. \quad (11.4.12)$$

Кратные корни должны удовлетворять дополнительному уравнению

$$\mu_1(1 + \mu_0)(2 + 2\mu_0 + \mu_0^2) + 4l_2x^2 + o(x^2) = 0, \quad (11.4.13)$$

получаемому дифференцированием (11.4.12). Разрешая систему (11.4.12)–(11.4.13) относительно x , мы находим, что в плоскости параметров (μ_0, μ_1) кривая, отвечающая кратным корням, состоит из половины параболы

$$\mu_0 = \mu_1^2/4l_2 + o(\mu_1^2), \quad \mu_1 l_2 < 0. \quad (11.4.14)$$

Для отображения (11.4.10) эта кривая отвечает существованию траектории (x^+, x^-) седло-узлового типа периода два. Координаты седло-узловых точек находятся из (11.4.12) и (11.4.13): $x^\pm = \pm\sqrt{|\mu_1/2l_2|} + o(\sqrt{|\mu_1|})$. Разложив правую часть (11.4.11) в ряд Тейлора в точке x^+ , можно проверить, что первая ляпуновская величина не равна нулю, т. е. точка является простым седло-узлом.

Кроме линии $\mu_0 = 0$ и кривой (11.4.14), бифуркационная диаграмма не содержит никаких других кривых (см. рис. 11.4.6). Эти две кривые разбивают окрестность начала координат на 3 области D_0 , D_1 и D_2 . Диаграммы Ламерея, соответствующие каждой области, изображены на рис. 11.4.7 ($l_2 < 0$) и 11.4.8 ($l_2 > 0$). В D_0 нет других траекторий периода два, в D_1 существует одна траектория периода два, а в D_2 — две такие траектории. При переходе из D_2 в D_0 две орбиты периода два сливаются и исчезают.

В заключение мы схематично рассмотрим общий случай бифуркации, когда несколько ляпуновских величин одновременно обращаются в нуль. Пусть k — порядковый номер первой отличной от нуля ляпуновской величины при $\varepsilon = 0$. После уничтожения членов с четными степенями x , вплоть до порядка $2k$, отображение приводится к виду

$$\bar{x} = -x \left(1 + \sum_{i=0}^{k-1} l_i(\varepsilon)x^{2i} + l_kx^{2k} \right) + o(x^{2k+1}), \quad (11.4.15)$$

где l_i — $\mathbb{C}^{r-(2i+1)}$ -гладкая функция от ε ($i = 0, \dots, k-1$); предполагается, что гладкость r отображения не меньше $(2k+1)$ и $l_0(0) = \dots = l_{k-1}(0) = 0$, $l_k \neq 0$.

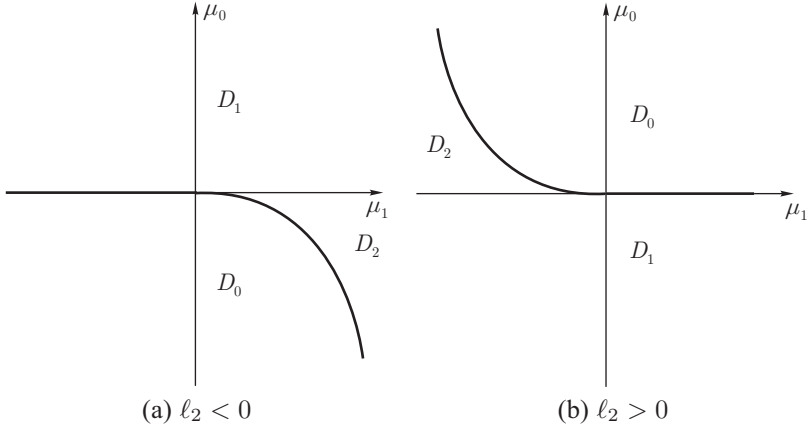


Рис. 11.4.6. Бифуркационная диаграмма отображения при $l_2 < 0$ (a) и $l_2 > 0$ (b)

Очевидно, что в случае общего положения (т. е. когда ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial l_0}{\partial \varepsilon_1} & \cdots & \frac{\partial l_0}{\partial \varepsilon_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial l_{k-1}}{\partial \varepsilon_1} & \cdots & \frac{\partial l_{k-1}}{\partial \varepsilon_p} \end{pmatrix}_{\varepsilon=0}$$

равен k), бифуркационная поверхность

$$\mathfrak{M}' : l_0(\varepsilon) = \dots = l_{k-1}(\varepsilon) = 0,$$

которая проходит через точку $\varepsilon = 0$ и соответствует неподвижной точке с мультипликатором -1 и с первыми $(k-1)$ ляпуновскими величинами равными нулю, является $\mathbb{C}^{r-(2k-1)}$ -гладкой поверхностью коразмерности k^4 .

⁴Отметим, что граница области устойчивости определяется условием $l_0(\varepsilon) = 0$ и является гладкой поверхностью коразмерности один, при условии, что вектор $(\frac{\partial l_0}{\partial \varepsilon_1}, \dots, \frac{\partial l_0}{\partial \varepsilon_p})_{\varepsilon=0}$ не нулевой, безотносительно к тому, обращаются в нуль или нет ляпуновские величины.

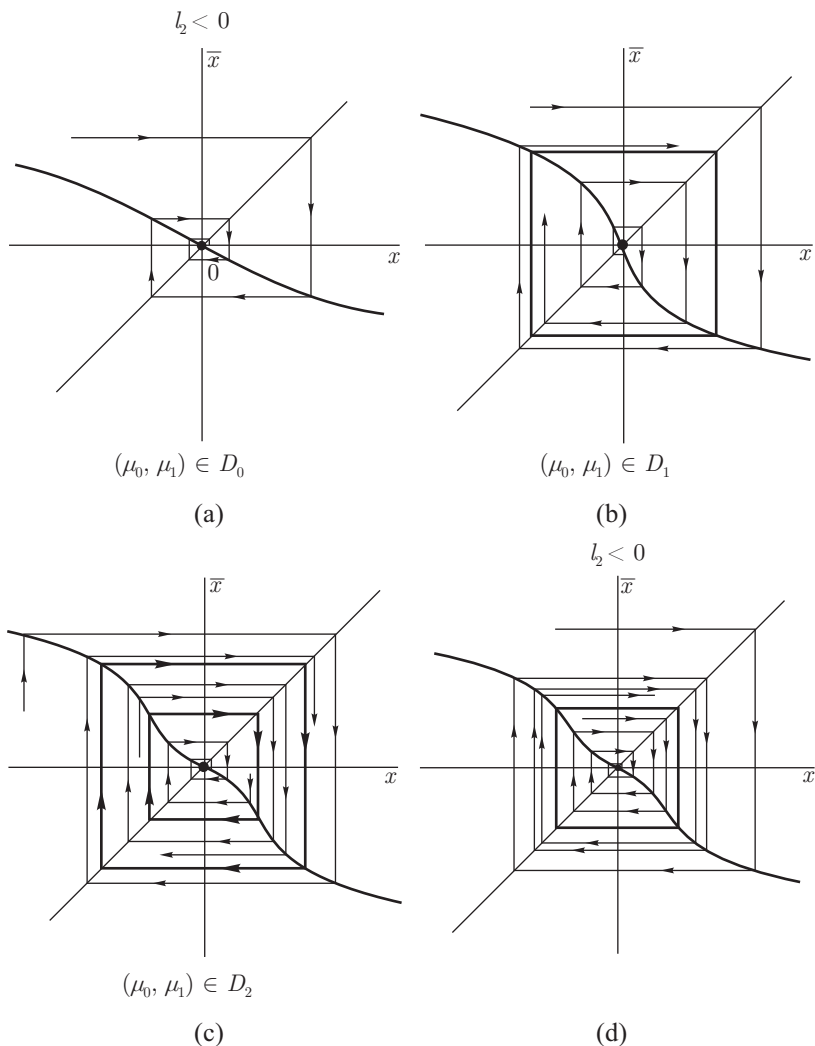


Рис. 11.4.7. Отображение для случая $l_2 < 0$, отвечающее бифуркационной диаграмме рис. 11.4.6 (а). Циклы периода два в (с) сливаются на границе, отделяющей D_2 от D_0 , и исчезают в D_0 . Полуустойчивый цикл периода два изображен в (d)

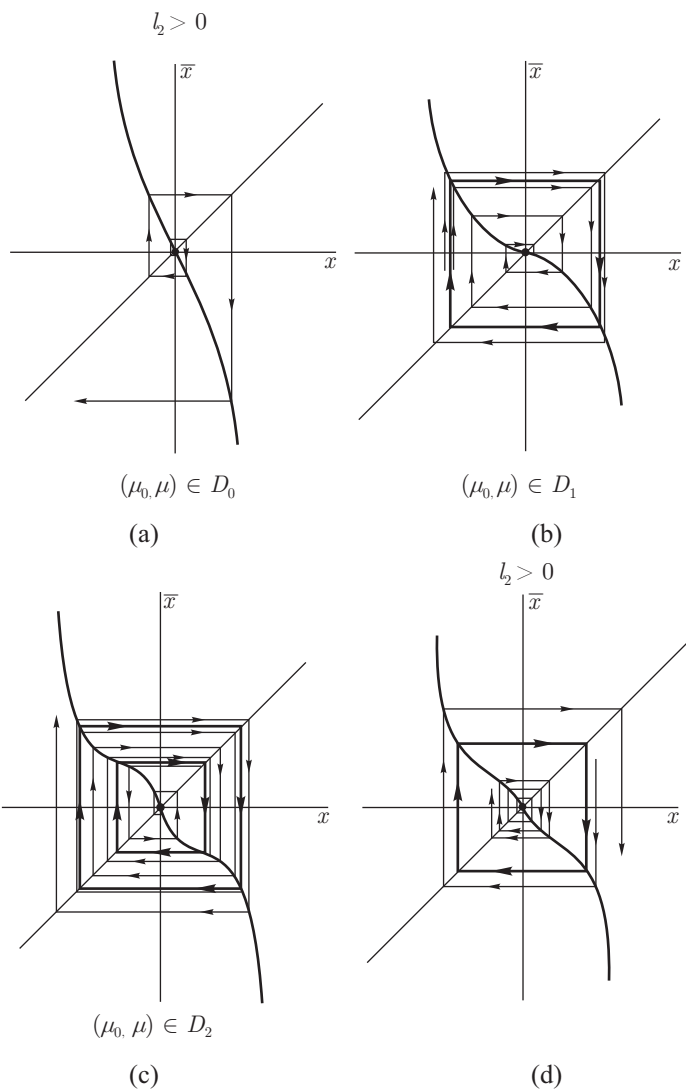


Рис. 11.4.8. Отображение, отвечающее бифуркационной диаграмме рис. 11.4.6 (b). Полуустойчивый цикл периода два на границе между D_2 и D_0 изображен в (d)

Выберем $l_i(\varepsilon)$ в качестве управляющих параметров $\mu_0, \dots, \mu_{k-1}$. В этом случае любое семейство, трансверсальное к $\mathcal{M}'$, можно представить в виде

$$\bar{x} = -x(1 + \mu_0 + \mu_1 x^2 + \dots + \mu_{k-1} x^{2(k-1)} + l_k x^{2k}) + \tilde{G}(x, \mu), \quad (11.4.16)$$

где $\tilde{G} = o(x^{2k+1})$ — $\mathbb{C}^r$ -гладкая функция от x и $\mathbb{C}^{r-2k}$ -гладкая функция от μ такая, что $\tilde{G}(0, \mu) = \tilde{G}'_x(0, \mu) = \dots = \tilde{G}^{(2k)}(0, \mu) = 0$ и $\tilde{G}^{(2k+1)}(0, 0) = 0$.

Плоскость $\mu_0 = 0$ соответствует потере устойчивости неподвижной точкой в начале координат. С неподвижной точкой при $\mu_0 \neq 0$ не происходит других бифуркаций. Для изучения траекторий периода два необходимо изучать вторую итерацию отображения

$$\begin{aligned} \bar{\bar{x}} &= x \left(1 + \sum_{i=0}^{k-1} \mu_i x^{2i} + l_k x^{2k} \right) \left(1 + \sum_{i=0}^{k-1} \mu_i \bar{x}^{2i} + l_k \bar{x}^{2k} \right) = \\ &= x(1 + 2\hat{\mu}_0 + 2\hat{\mu}_1 x^2 + \dots + 2\hat{\mu}_{k-1} x^{2(k-1)} + 2l_k x^{2k}) + o(x^{2k+1}), \end{aligned} \quad (11.4.17)$$

где каждый $\hat{\mu}_i$ однозначно выражается через $\mu_0, \dots, \mu_i$:

$$\hat{\mu}_i = \mu_i + \varphi_i(\mu_0, \dots, \mu_i). \quad (11.4.18)$$

Нам не требуется конкретный вид функций φ_i . Достаточно отметить, что

$$\varphi_i = o(\mu_j) \quad (j = 0, \dots, i). \quad (11.4.19)$$

Отличные от нуля неподвижные точки отображения (11.4.17) находятся как корни уравнения

$$\hat{\mu}_0 + \hat{\mu}_1 x^2 + \dots + \hat{\mu}_{k-1} x^{2(k-1)} + l_k x^{2k} + o(x^{2k}) = 0. \quad (11.4.20)$$

Они соответствуют орбитам периода два отображения (11.4.16). Более того, каждая орбита состоит из одного положительного и одного отрицательного корня. Таким образом, можно далее рассматривать только положительные корни: т. е. если мы положим, что $u = x^2$, то наша задача сведется к анализу бифуркаций положительных корней уравнения

$$\hat{\mu}_0 + \hat{\mu}_1 u + \dots + \hat{\mu}_{k-1} u^{k-1} + l_k u^k + o(u^k) = 0. \quad (11.4.21)$$

Подобная задача изучалась в параграфе 11.2 (различие состоит в том, что множитель при u^{k-1} не равен нулю; кроме того, мы не рассматривали отдельно поведение положительных корней). Как и в параграфе 11.2, заметив, что k -я производная левой части уравнения на обращается в нуль, мы можем показать, что уравнение (11.4.21) имеет не более k корней при малых x и μ .

Таким образом, бифуркация неподвижной точки с одним мультипликатором, равным -1 и с $(k-1)$ нулевыми ляпуновскими числами, порождает не более k орбит периода два. Более того, можно легко найти значения параметра, при которых уравнение (11.4.21) имеет заданное число положительных корней в пределах от 0 до k . Это означает, что в пространстве параметров отображения (11.4.16) есть области, где семейство имеет любое заданное число (от 0 до k) орбит периода два.

Чтобы понять структуру бифуркационной поверхности для орбит периода два, мы должны построить поверхность $\mathcal{M}$ кратных корней уравнения (11.4.21) и затем выбрать часть $\mathcal{M}^+$, которая отвечает положительным кратным корням. Поверхность $\mathcal{M}$ задается системой

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_0 + \hat{\mu}_1 u + \dots + \hat{\mu}_{k-1} u^{k-1} + l_k u^k + o(u^k) &= 0, \\ \hat{\mu}_1 + 2\hat{\mu}_2 u + \dots + (k-1)\hat{\mu}_{k-1} u^{k-2} + k l_k u^{k-1} + o(u^{k-1}) &= 0.\end{aligned}\quad (11.4.22)$$

Из (11.4.22) следует, что наличие кратного корня $u = 0$ отвечает равенству нулю значений $\hat{\mu}_0$ и $\hat{\mu}_1$. Таким образом, линия $\hat{\mu}_0 = \hat{\mu}_1 = 0$ образует границу $\mathcal{M}^+$ в $\mathcal{M}$. Бифуркационная диаграмма для орбит периода два отображения (11.4.16) совпадает с $\mathcal{M}^+$.

Соответственно объединение поверхности $\mathcal{M}^+$ и плоскости $\mu_0 = 0$, на которой неподвижная точка теряет устойчивость, дает полную бифуркационную диаграмму для отображения (11.4.16).

Рассмотрим более подробно задачу о построении множества $\mathcal{M}^+$ (см. рис. 11.4.9 с примером бифуркационной диаграммы для отображения (11.4.16) в случае $k = 3$, $l_k < 0$). Отметим, что поверхность $\mathcal{M}$ включает линию L , отвечающую существованию корня кратности k . Эта линия определяется из следующей системы уравнений (они означают, что в некоторой точке u левая часть уравнения (11.4.21) и ее первые $(k-1)$ производных должны обращаться в нуль):

$$\begin{aligned}0 &= \hat{\mu}_0 + \hat{\mu}_1 u + \dots + \hat{\mu}_{k-1} u^{k-1} + l_k u^k + o(u^k), \\ 0 &= \hat{\mu}_1 + 2\hat{\mu}_2 u + \dots + (k-1)\hat{\mu}_{k-1} u^{k-2} + k l_k u^{k-1} + o(u^{k-1}), \\ &\vdots \\ 0 &= \hat{\mu}_i + \sum_{j=i+1}^{k-1} C_j^i \hat{\mu}_j u^{j-i} + C_k^i l_k u^{k-i} + o(u^{k-1}), \\ &\vdots \\ 0 &= \hat{\mu}_{k-1} + k l_k u + o(u),\end{aligned}$$

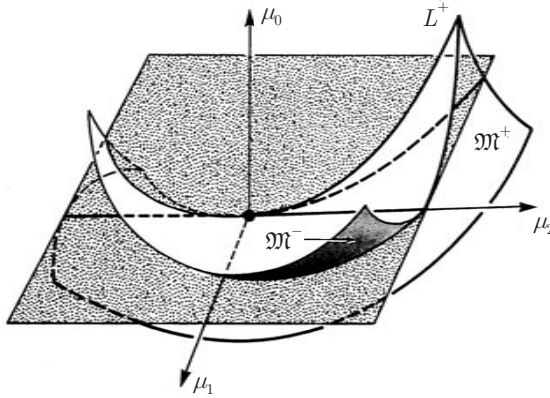


Рис. 11.4.9. Структура бифуркационного множества в семействе с тремя параметрами. См. комментарий в тексте

где C_j^i — биномиальные коэффициенты. Решая систему последовательно снизу вверх, мы находим, что L можно асимптотически представить в виде

$$\hat{\mu}_i \sim (\hat{\mu}_{k-1})^{k-i} \alpha_i, \quad (11.4.23)$$

где α_i — некоторые ненулевые коэффициенты. Более того, k -кратные корни расположены в точке

$$u^* \sim -\hat{\mu}_{k-1}/kl_k. \quad (11.4.24)$$

Точка $\mu = 0$ делит кривую L на две части: $L^+ : \hat{\mu}_{k-1}l_k < 0$ и $L^- : \hat{\mu}_{k-1}l_k > 0$. Из уравнения (11.4.24) следует, что $u^* > 0$ на L^+ , т. е. только эта ветвь L соответствует k -кратным орбитам периода два.

Сдвигом начала координат в точку $u = u^*$ уравнение (11.4.21) сводится к виду

$$\nu_0 + \nu_1 u + \dots + \nu_{k-2} u^{k-2} + l_k u^k + o(u^k) = 0,$$

где ν_i — некоторые функции от $\hat{\mu}$. Таким образом, из параграфа 11.2 следует, что в каждом сечении $\hat{\mu}_{k-1} = \text{const}$ поверхность $\mathfrak{M}$ имеет одинаковую структуру (с точностью до диффеоморфизма); это поверхность кратных корней полинома $\nu_0 + \nu_1 u + \dots + \nu_{k-2} u^{k-2} + u^k$, восстановленная в точке пересечения секущей поверхности и кривой L (координаты этой точки находятся из (11.4.23)).

Эта поверхность, как было объяснено в параграфе 11.2, состоит из гладких листов коразмерности один, отвечающих двукратным корням. Линия $\hat{\mu}_0 = \hat{\mu}_1 = 0$ разбивает эту поверхность на две компоненты, отвечающие отрицательным и положительным кратным корням (только последняя

компонента отвечает $\mathfrak{M}^+$): кратный корень положителен только в той части, которая примыкает к L^+ при $\hat{\mu}_{k-1}l_k < 0$ и не примыкает к L^- при $\hat{\mu}_{k-1}l_k > 0$.

Можно также вывести асимптотические соотношения, схожие с (11.2.31)–(11.2.33), т. е. поверхность кратных корней расслаивается на кривые асимптотического вида

$$\hat{\mu}_i \sim M_i^* \delta^{k-i}, \quad (11.4.25)$$

и все бифуркационные множества коразмерности s состоят из кусков (соединяющихся при $\mu = 0$) поверхностей вида

$$\hat{\mu}_j = \psi_j(\hat{\mu}_s, \dots, \hat{\mu}_{k-1}) \quad (j = 0, \dots, s-1), \quad (11.4.26)$$

где ψ_j удовлетворяет соотношению

$$|\psi_j|^{1/(k-j)} \leq C \sum_{i=s}^{k-1} |\hat{\mu}_i|^{1/(k-i)} \quad (11.4.27)$$

(здесь C — константа, не зависящая от s и j).

Из (11.4.18) и (11.4.19) следует, что если мы вернемся к начальным параметрам $\mu_0, \dots, \mu_{k-1}$, то каждая кривая (11.4.26) будет иметь такое же асимптотическое представление с тем же набором констант M_i^* . Таким образом, при вычислении асимптотик первого порядка нет необходимости выражать $\hat{\mu}_i$ через μ_i , и можно просто положить $\hat{\mu}_i = \mu_i$.

11.5. Бифуркация Андронова–Хопфа

В этом параграфе мы рассмотрим, что происходит, когда пара комплексно-сопряженных характеристических показателей состояния равновесия переходит через мнимую ось. При этом потеря устойчивости связана с появлением или, наоборот, исчезновением периодической орбиты. Эта бифуркация — простейший механизм перехода от стационарного режима к колебаниям, и она позволяет правильно интерпретировать множество физических явлений. По этой причине она традиционно играет особую роль в теории бифуркаций.

Рассмотрим семейство систем дифференциальных уравнений, $\mathbb{C}^r$ -гладких ($r \geq 3$) по переменным $x \in \mathbb{R}^2$, $y \in \mathbb{R}^m$ ($m \geq 0$) и параметрам $\varepsilon \in \mathbb{R}^p$ ($p \geq 1$). Пусть при $\varepsilon = 0$ система имеет состояние равновесия O с двумя чисто мнимыми характеристическими показателями, а остальные лежат слева от мнимой оси. Поскольку состояние равновесия не имеет нулевых характеристических чисел, оно сохраняется в малой окрестности

$\varepsilon = 0$. Без потери общности мы можем предположить, что оно расположено в начале координат для всех малых ε . Допустим, что пара характеристических показателей, ближайших к мнимой оси:

$$\lambda_{1,2} = \lambda(\varepsilon) \pm i\omega(\varepsilon),$$

где $\lambda(\varepsilon)$ и $\omega(\varepsilon)$ зависят $\mathbb{C}^{r-1}$ -гладко от ε и

$$\lambda(0) = 0, \quad \omega(0) > 0.$$

В силу теоремы редукции систему вблизи состояния равновесия можно свести к виду

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda(\varepsilon)x_1 - \omega(\varepsilon)x_2 + G_1(x_1, x_2, \varepsilon), \\ \dot{x}_2 &= \omega(\varepsilon)x_1 + \lambda(\varepsilon)x_2 + G_2(x_1, x_2, \varepsilon), \\ \dot{y} &= [A + F(x, y, \varepsilon)]y, \end{aligned} \quad (11.5.1)$$

где F — $\mathbb{C}^{r-1}$ -функция, $G_{1,2}$ — $\mathbb{C}^r$ -функции и

$$\begin{aligned} F(0, 0, 0) &= 0, \\ G(0, 0, 0) &= 0, \\ G'_x(0, 0, 0) &= 0. \end{aligned} \quad (11.5.2)$$

Как и в параграфе 9.3, можно проверить, что при $\varepsilon = 0$ члены разложения Тейлора для функции G , отличные от $x_1(x_1^2 + x_2^2)$ и $x_2(x_1^2 + x_2^2)$ (например, члены любой четной степени), являются нерезонансными и их можно убить посредством полиномиального преобразования переменных x .

Граница $\mathcal{M}$ области устойчивости в пространстве параметров задана уравнением $\lambda(\varepsilon) = 0$: состояние равновесия O устойчиво, если $\lambda(\varepsilon) < 0$, и неустойчиво, если $\lambda(\varepsilon) > 0$. Если по крайней мере одна составляющая вектора $(\frac{\partial \lambda}{\partial \varepsilon_1}, \dots, \frac{\partial \lambda}{\partial \varepsilon_p})_{\varepsilon=0}$ ненулевая, то при всех малых ε граница $\mathcal{M}$ является $\mathbb{C}^{r-1}$ -гладкой поверхностью коразмерности один. Выберем $\lambda(\varepsilon)$ в качестве управляющего параметра μ и рассмотрим однопараметрическое семейство, трансверсальное к $\mathcal{M}$. На центральном многообразии $y = 0$ это семейство принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \mu x_1 - \omega(\mu)x_2 + (L_1 x_1 - \Omega_1 x_2)(x_1^2 + x_2^2) + \tilde{G}_1(x_1, x_2, \mu), \\ \dot{x}_2 &= \omega(\mu)x_1 + \mu x_2 + (\Omega_1 x_1 + L_1 x_2)(x_1^2 + x_2^2) + \tilde{G}_2(x_1, x_2, \mu), \end{aligned} \quad (11.5.3)$$

где для всех малых μ все квадратичные по x члены, а при $\mu = 0$ — и все члены третьей степени, отличные от $x_1(x_1^2 + x_2^2)$ и $x_2(x_1^2 + x_2^2)$, исключены.

Это означает, что в (11.5.3) функции $\tilde{G}_{1,2}$ (которые являются $\mathbb{C}^r$ -гладкими по x и $\mathbb{C}^{r-2}$ -гладкими по μ) удовлетворяют

$$\begin{aligned}\tilde{G}(0, 0, \mu) &= 0, & \tilde{G}'_x(0, 0, \mu) &= 0, \\ \tilde{G}''_{xx}(0, 0, \mu) &= 0, & \tilde{G}'''_{xxx}(0, 0, \mu) &= 0.\end{aligned}$$

Теорема 11.1. Если первая ляпуновская величина L_1 в (11.5.3) меньше нуля, то для малых $\mu \leq 0$ состояние равновесия O устойчиво и все траектории в некоторой окрестности U начала координат стремятся к O . Когда $\mu > 0$, состояние равновесия становится неустойчивым и возникает устойчивая периодическая орбита диаметра $\sim \sqrt{\mu}$ (см. рис. 11.5.1) такая, что все траектории из U , за исключением O , стремятся к ней.

Если первая ляпуновская величина L_1 больше нуля, то для малых $\mu \geq 0$ состояние равновесия O неустойчиво и все остальные траектории покидают малую окрестность U начала координат. Когда $\mu < 0$, состояние равновесия становится устойчивым. Его область притяжения ограничена неустойчивой периодической орбитой диаметра $\sim \sqrt{-\mu}$, которая стягивается к O при $\mu = 0$ (см. рис. 11.5.2).

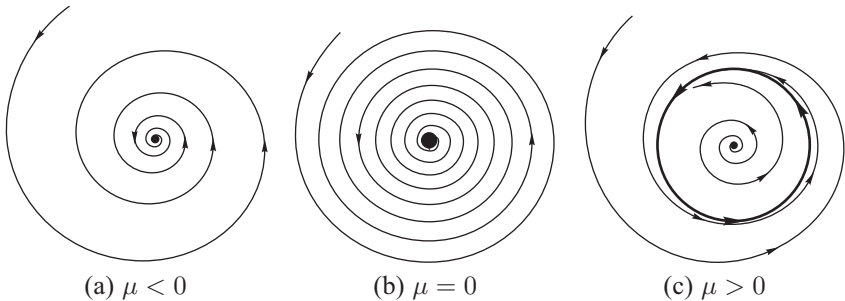


Рис. 11.5.1. Мягкая потеря устойчивости устойчивым фокусом в начале координат при надкритической ($L_1 < 0$) бифуркации Андронова–Хопфа

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем систему (11.5.3) в полярных координатах

$$\begin{aligned}\dot{R} &= R(\mu + L_1 R^2) + \Phi_1(R, \varphi, \mu), \\ \dot{\varphi} &= \omega(\mu) + \Omega_1(\mu) R^2 + \Phi_2(R, \varphi, \mu),\end{aligned}\tag{11.5.4}$$

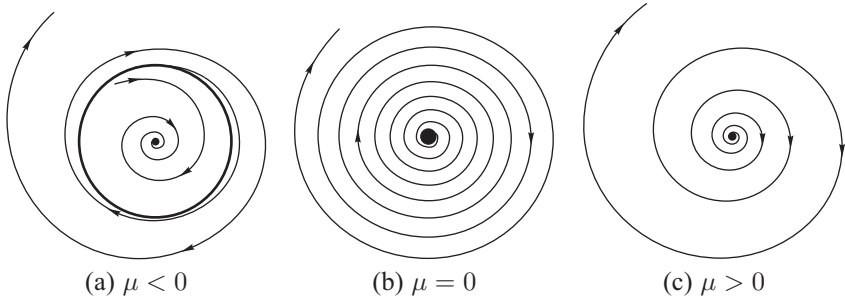


Рис. 11.5.2. Жесткая потеря устойчивости устойчивым фокусом в начале координат при субкритической ($L_1 > 0$) бифуркации Андронова–Хопфа

где $\Phi_1 = o(R^3)$, $\Phi_2 = o(R^2)$. Утверждение теоремы легко проверяется для укороченной системы

$$\begin{aligned}\dot{R} &= R(\mu + L_1 R^2), \\ \dot{\varphi} &= \omega(\mu) + \Omega_1(\mu)R^2.\end{aligned}\tag{11.5.5}$$

Действительно, поведение траекторий полностью определяется первым уравнением

$$\dot{R} = R(\mu + L_1 R^2).\tag{11.5.6}$$

В частности, состояния равновесия уравнения (11.5.6) с положительными R отвечают периодическим орбитам системы (11.5.5). Состояния равновесия (11.5.6) находятся легко; а именно это $R = 0$ и $R = \pm\sqrt{-\mu/L_1}$ при $\mu L_1 < 0$. Состояние равновесия $R = \sqrt{-\mu/L_1}$ является устойчивым, если $L_1 < 0$, и неустойчивым, если $L_1 > 0$.

Чтобы рассмотреть общий случай, напомним, что $\omega(\mu) > 0$. Отсюда $\dot{\varphi}$ в (11.5.4) при малых R не обращается в нуль. Таким образом, любая траектория, отличная от точки O , должна пересекать луч $\mathfrak{R} : \varphi = 0, R > 0$. После одного оборота по φ она должна пересекать луч $\mathfrak{R}$ снова и так далее, пока она не покинет окрестность начала координат. Таким образом, достаточно рассмотреть отображение луча $\mathfrak{R}$ в себя по траекториям системы, см. рис. 11.5.3.

Для вычисления этого отображения разделим первое уравнение (11.5.4) на второе и получим

$$\frac{dR}{d\varphi} = \frac{R(\mu + L_1 R^2) + \Phi_1(R, \varphi, \mu)}{\omega(\mu) + \Omega_1(\mu)R^2 + \Phi_2(R, \varphi, \mu)} = \frac{R(\mu + L_1 R^2)}{\omega(\mu)} + o(R^3).\tag{11.5.7}$$

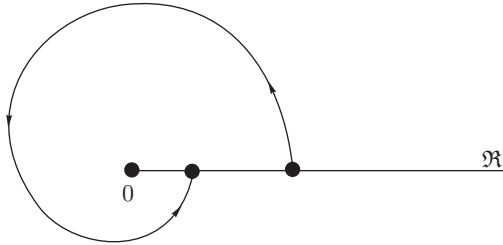


Рис. 11.5.3. Отображение луча, выходящего из начала координат

Найдем решение, которое начинается в точке $R = R_0$ при $\varphi = 0$. Разложим его в ряд Тейлора по R_0 :

$$R(\varphi) = \alpha_1(\varphi)R_0 + \alpha_2(\varphi)R_0^2 + \alpha_3(\varphi)R_0^3 + \dots \quad (11.5.8)$$

(разложение начинается с линейного члена, т.к. $R(\varphi) \equiv 0$ при $R_0 = 0$). Поскольку $R(0) = R_0$, то

$$\alpha_1(0) = 1, \quad \alpha_2(0) = 0, \quad \alpha_3(0) = 0. \quad (11.5.9)$$

Подставляя (11.5.8) в (11.5.7) и приравнявая коэффициенты, мы получаем

$$\begin{aligned} d\alpha_1/d\varphi &= \mu\alpha_1/\omega(\mu), \\ d\alpha_2/d\varphi &= \mu\alpha_2/\omega(\mu), \\ d\alpha_3/d\varphi &= (\mu\alpha_3 + L_1\alpha_1^3)/\omega. \end{aligned} \quad (11.5.10)$$

Интегрируя эту систему с начальными условиями (11.5.9), мы получаем

$$\begin{aligned} \alpha_1(\varphi) &= e^{\mu\varphi/\omega(\mu)}, \\ \alpha_2(\varphi) &= 0, \\ \alpha_3(\varphi) &= L_1 e^{\mu\varphi/\omega(\mu)} (e^{2\mu\varphi/\omega(\mu)} - 1)/2\mu \end{aligned}$$

и

$$R(\varphi) = e^{\mu\varphi/\omega(\mu)} R_0 + L_1 e^{\mu\varphi/\omega(\mu)} \frac{e^{2\mu\varphi/\omega(\mu)} - 1}{2\mu} R_0^3 + \dots$$

Подставляя $\varphi = 2\pi$, мы получаем выражение для отображения луча $\Re$ на себя самого: $R \equiv R(0) \mapsto R(2\pi) \equiv \bar{R}$:

$$\bar{R} = e^{2\pi\mu/\omega(\mu)} R + \frac{2\pi}{\omega(0)} L_1 R^3 + o(R^3). \quad (11.5.11)$$

Соответствующее уравнение

$$(e^{2\pi\mu/\omega(\mu)} - 1)\omega(0)/2\pi + L_1 R^2 + o(R^2) = 0 \quad (11.5.12)$$

для нетривиальной неподвижной точки отображения (11.5.11) легко решается (отметим, что оно вплоть до ведущих членов совпадает с уравнением нетривиальных состояний равновесия уравнения (11.5.6)). Получаем, что при $L_1\mu \geq 0$ отображение (11.5.11) имеет одну неподвижную точку $R = 0$ и при $L_1\mu < 0$ возникает еще одна точка $R = \sqrt{-\mu/L_1} + o(\sqrt{|\mu|})$, которая отрывается от исходной неподвижной точки (напомним, что отображение определено только для $R \geq 0$, его отрицательные корни не учитываются). Из (11.5.11) мы получаем следующее выражение для мультипликатора нетривиальной неподвижной точки:

$$\rho(\mu) = 1 - 4\pi\mu/\omega(0) + o(\mu).$$

Как мы видим, эта неподвижная точка устойчива, если $L_1 < 0$, и неустойчива в противном случае. Это доказывает теорему 11.1. ■

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 11.1 была доказана Андроновым и Леонтовичем путем построения и изучения отображения, без явного использования теоремы о нормальной форме. Рис. 11.5.1 и 11.5.2 взяты из книги «Теория колебаний» Андронова, Витта и Хайкина, где они иллюстрировали явления мягкой и жесткой генерации автоколебаний (см. главу 14).

Исследуем бифуркации системы (11.5.1) в многомерном случае. Если $L_1 < 0$ (рис. 11.5.4), то при $\mu \leq 0$ состояние равновесия O устойчиво (при $\mu < 0$ — грубый фокус, а при $\mu = 0$ — слабый фокус) и оно притягивает все траектории из малой окрестности начала координат. Когда $\mu > 0$, точка O становится седло-фокусом с двумерным неустойчивым многообразием и m -мерным устойчивым многообразием. Границей неустойчивого многообразия является устойчивая периодическая орбита, которая теперь притягивает все траектории за исключением находящихся в устойчивом многообразии O . Один мультипликатор периодической орбиты вычислен в теореме 11.1, это $\rho_0(\mu) = 1 - 4\pi\mu/\omega(0) + o(\mu)$. Чтобы найти другие, заметим, что поскольку периодическая орбита лежит на центральном многообразии $y = 0$, то уравнением в вариациях по переменной y (см. (11.5.1)) является

$$\frac{\partial \dot{y}}{\partial y_0} = (A + F(x, 0, \varepsilon)) \frac{\partial y}{\partial y_0}.$$

Абсолютное значение F мало, следовательно, отображение сдвига на время τ для этого уравнения близко к $e^{A\tau}$ (где τ — период предельного

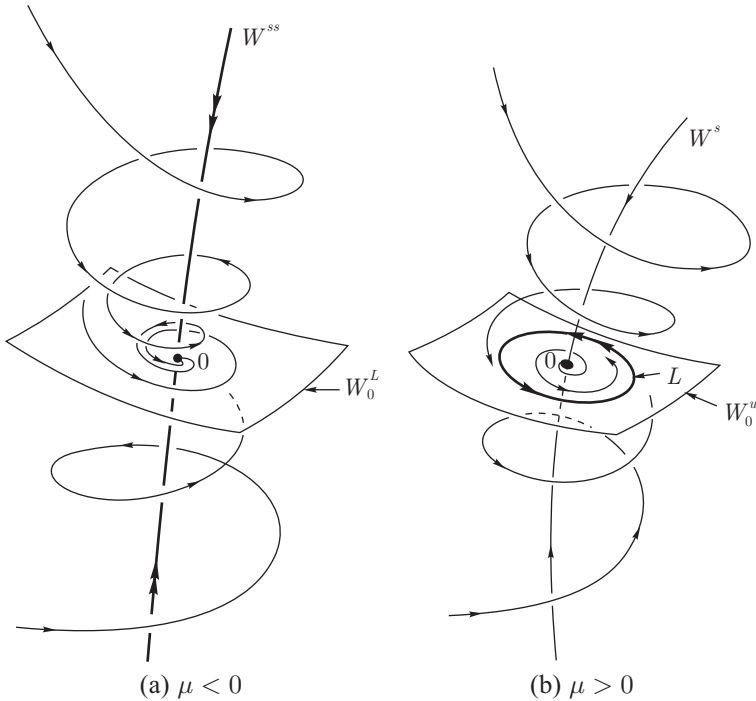


Рис. 11.5.4. Надкритическая бифуркация Андронова–Хопфа в $\mathbb{R}^3$. Устойчивый фокус (ведущее многообразие W^L двумерно) в (a) становится седло-фокусом в (b). Устойчивая периодическая орбита является границей неустойчивого многообразия W_0^u

цикла). Отсюда мультипликаторы, соответствующие переменной y , близки к $e^{\lambda_j \tau}$ ($j = 1, \dots, m$), где λ_j — характеристические числа матрицы A . Поскольку $\tau = 2\pi/\omega(0) + \dots$, мы имеем следующую формулу для мультипликаторов:

$$\rho_j(\mu) = e^{2\pi\lambda_j/\omega(0)}(1 + \dots), \quad j = 1, \dots, m.$$

Мультипликатор ρ_0 , ближайший к единичной окружности, действителен, значит для всех достаточно малых μ периодическая орбита является узлом (т. е. соответствующая неподвижная точка отображения Пуанкаре является устойчивым узлом).

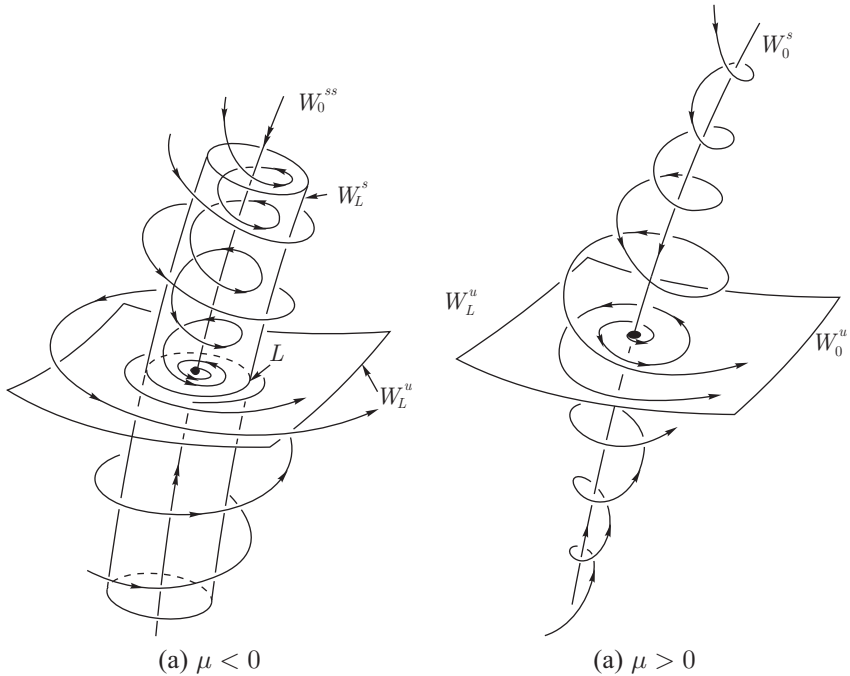


Рис. 11.5.5. Субкритическая бифуркация Андронова–Хопфа. (а) Область притяжения устойчивого фокуса ограничена устойчивым многообразием седловой периодической орбиты. (б) Периодическая орбита садится на устойчивый фокус при $\mu = 0$, который затем становится седло-фокусом (1, 2)

Фазовые портреты при $L_1 > 0$ изображены на рис. 11.5.5. При этом, когда $\mu < 0$, существует устойчивое состояние равновесия O (фокус) и седловая периодическая орбита, m -мерное устойчивое многообразие которой является границей области притяжения точки O . Когда μ возрастает, цикл приближается к O и вливается в него при $\mu = 0$. Состояние равновесия O становится седло-фокусом, как только μ переходит через нуль.

Как мы видим, бифуркации в однопараметрическом семействе, трансверсальном границе устойчивости $\mathcal{M}$, могут развиваться совершенно по-разному в зависимости от знака первой ляпуновской величины. Если L_1 обращается в нуль при $\varepsilon = 0$, мы должны изучать по крайней мере двухпараметрические семейства. Для исследования такой ситуации приведем систему на центральном многообразии к нормальной форме вплоть до членов

пятого порядка⁵:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \lambda(\varepsilon)x_1 - \omega(\varepsilon)x_2 + (L_1(\varepsilon)x_1 - \Omega_1(\varepsilon)x_2)(x_1^2 + x_2^2) + \\ &\quad + (L_2x_1 - \Omega_2x_2)(x_1^2 + x_2^2)^2 + o(x^5), \\ \dot{x}_2 &= \omega(\varepsilon)x_1 + \lambda(\varepsilon)x_2 + (\Omega_1(\varepsilon)x_1 + L_1(\varepsilon)x_2)(x_1^2 + x_2^2) + \\ &\quad + (\Omega_2x_1 + L_2x_2)(x_1^2 + x_2^2)^2 + o(x^5),\end{aligned}$$

где $L_1(\varepsilon)$, $\Omega_1(\varepsilon)$ — функции класса $\mathbb{C}^{r-3}$, $L_1(0) = 0$. Рассмотрим поверхность $\mathcal{M}'$, заданную условиями

$$\lambda(\varepsilon) = 0, \quad L_1(\varepsilon) = 0.$$

Если

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \frac{\partial \lambda_0}{\partial \varepsilon_1} & \cdots & \frac{\partial \lambda_0}{\partial \varepsilon_p} \\ \frac{\partial L_1}{\partial \varepsilon_1} & \cdots & \frac{\partial L_1}{\partial \varepsilon_p} \end{pmatrix}_{\varepsilon=0} = 2,$$

то $\mathcal{M}'$ — $\mathbb{C}^{r-3}$ -гладкая поверхность коразмерности два.

Выберем $\lambda(\varepsilon)$ и $L_1(\varepsilon)$ в качестве управляющих параметров μ_0 и μ_1 и приведем дупараметрическое семейство, трансверсальное $\mathcal{M}'$, к виду

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \mu_0x_1 - \omega(\mu)x_2 + (\mu_1x_1 - \Omega_1(\mu)x_2)(x_1^2 + x_2^2) + \\ &\quad + (L_2x_1 - \Omega_2x_2)(x_1^2 + x_2^2)^2 + o(x^5), \\ \dot{x}_2 &= \omega(\mu)x_1 + \mu_0x_2 + (\Omega_1(\mu)x_1 + \mu_1x_2)(x_1^2 + x_2^2) + \\ &\quad + (\Omega_2x_1 + L_2x_2)(x_1^2 + x_2^2)^2 + o(x^5)\end{aligned}$$

или, в полярных координатах:

$$\begin{aligned}\dot{R} &= R(\mu_0 + \mu_1R^2 + L_2R^4) + \Phi_1(R, \varphi, \mu), \\ \dot{\varphi} &= \omega(\mu) + \Omega_1(\mu)R^2 + \Omega_2R^4 + \Phi_2(R, \varphi, \mu),\end{aligned}\tag{11.5.13}$$

где $\Phi_1 = o(R^5)$ и $\Phi_2 = o(R^4)$.

Отметим, что $\dot{\varphi}$ не обращается в нуль при малых R . Следовательно, динамика вблизи начала координат определяется отображением луча $\mathfrak{R} : \varphi = 0, R \geq 0$ на себя по траекториям системы. Отображение вычисляется так же, как и в доказательстве теоремы 11.1, а именно посредством разложения решений $R(\varphi)$ системы (11.5.13) в ряд Тейлора по начальным условиям:

$$R(\varphi) = \alpha_1(\varphi)R_0 + \alpha_2(\varphi)R_0^2 + \alpha_3(\varphi)R_0^3 + \alpha_4(\varphi)R_0^4 + \alpha_5(\varphi)R_0^5 + \dots$$

⁵Мы полагаем, что система достаточно гладкая, например, $r \geq 5$.

Опуская детали, получаем следующий результат:

$$\overline{R} = R + \frac{2\pi}{\omega(\mu)} R(\hat{\mu}_0 + \hat{\mu}_1 R^2 + L_2 R^4) + o(R^5), \quad (11.5.14)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_0 &= (e^{2\pi\mu_0/\omega(\mu)} - 1) \frac{\omega(\mu)}{2\pi} = \mu_0 + o(\mu_0), \\ \hat{\mu}_1 &= \left(\mu_1 - \frac{\Omega_1(\mu)}{\omega(\mu)} \mu_0 \right) e^{2\pi\mu_0/\omega(\mu)} (e^{4\pi\mu_0/\omega(\mu)} - 1) \frac{\omega(\mu)}{4\pi\mu_0} = \\ &= \mu_1 - \frac{\Omega_1(0)}{\omega(0)} \mu_0 + o(\mu_0) + o(\mu_1). \end{aligned}$$

Поскольку правая часть отображения (11.5.14) монотонно возрастает, изучение отображения сводится к изучению его неподвижных точек. Они называются как корни уравнения

$$R(\hat{\mu}_0 + \hat{\mu}_1 R^2 + L_2 R^4) + o(R^5) = 0.$$

Отметим, что, поскольку отображение задано при $R \geq 0$, нам надо найти только неотрицательные корни: $R = 0$ отвечает состоянию равновесия, а положительные корни отвечают периодическим орбитам системы (11.5.13). Поскольку мы уже исследовали уравнение такого типа в предыдущем параграфе (уравнение (11.4.12)), когда анализировали точки периода два, возникающие при бифуркации удвоения периода в случае нулевой первой ляпуновской величины, мы можем просто переформулировать основные результаты.

Может родиться не более двух предельных циклов. Если $L_2 < 0$ (см. рис. 11.5.6), то при $\mu_0 > 0$ существует единственный предельный цикл; внутри области D_2 , ограниченной лучом $\mu_0 = 0$, $\mu_1 > 0$ и кривой $\mathcal{L} : \mu_0 = \mu_1^2/4|L_2| + o(\mu_1^2)$, существует 2 предельных цикла: один устойчивый, а другой неустойчивый; они сливаются на кривой $\mathcal{L}$, образуя один полуустойчивый цикл; в области D_0 между $\mathcal{L}$ и лучом $\mu_1 = 0$, $\mu_1 < 0$ нет периодических орбит. Аналогичные бифуркации для случая $L_2 > 0$ показаны на рис. 11.5.7.

Пусть теперь первые $(k - 1)$ ляпуновских величин будут равны нулю при $\varepsilon = 0$ (предполагается, что гладкость рассматриваемой системы не меньше, чем $2k + 1$). В случае общего положения поверхность $\mathcal{M}'$ (которая соответствует состояниям равновесия с парой чисто мнимых характеристических чисел и с нулевыми первыми $(k - 1)$ ляпуновскими величинами)

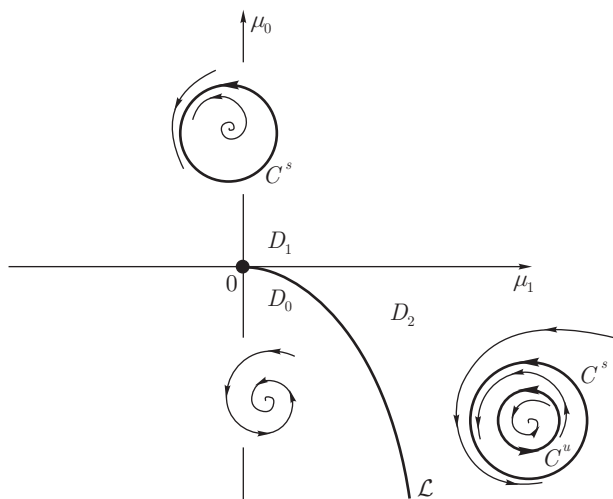


Рис. 11.5.6. Бифуркационная диаграмма для случая $L_1 = 0$, $L_2 < 0$. Кривая $\mathcal{L}$ отвечает существованию двойного цикла

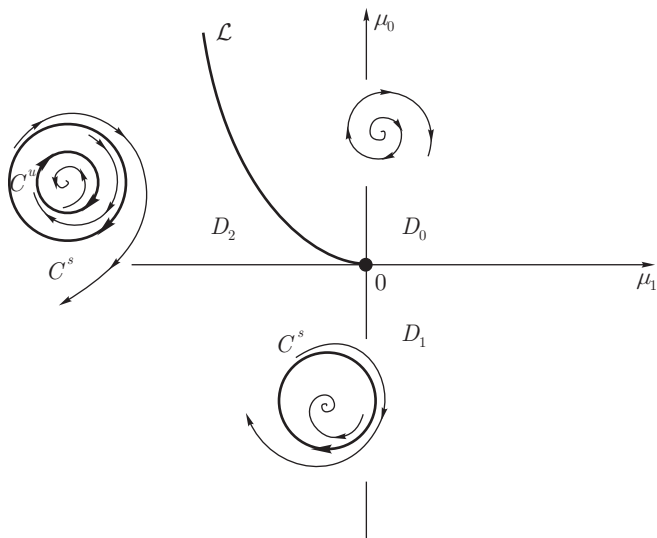


Рис. 11.5.7. Бифуркационная диаграмма для случая $L_1 = 0$, $L_2 > 0$. Кривая $\mathcal{L}$ отвечает существованию двойного цикла

является $\mathbb{C}^{2k-1}$ -гладкой поверхностью коразмерности k , проходящей через точку $\varepsilon = 0$ в пространстве параметров. Все трансверсальные семейства в этом случае зависят от k управляющих параметров $\mu_0, \dots, \mu_{k-1}$, и их можно записать в полярных координатах следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{R} &= R(\mu_0 + \dots + \mu_{k-1}R^{2k-2} + L_k R^{2k}) + o(R^{2k+1}), \\ \dot{\varphi} &= \omega(\mu) + \Omega_1(\mu)R^2 + \dots + \Omega_k(\mu)R^{2k} + o(R^{2k}).\end{aligned}\quad (11.5.15)$$

Анализ этого семейства также можно свести к исследованию отображения луча $\varphi = 0$, $R \geq 0$ на себя. Можно показать, что это отображение имеет вид

$$\bar{R} = R + \frac{2\pi}{\omega(\mu)} R(\hat{\mu}_0 + \hat{\mu}_1 R^2 + \dots + \hat{\mu}_{k-1} R^{2k-2} + L_k R^{2k}) + o(R^{2k+1}), \quad (11.5.16)$$

где

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_0 &= \mu_0 + o(\mu_0), \\ \hat{\mu}_1 &= \mu_1 - \hat{\Omega}_1 \mu_0 + o(\mu_0) + o(\mu_1), \\ &\vdots \quad \vdots \\ \hat{\mu}_i &= \mu_i - \hat{\Omega}_1 \mu_{i-1} - \dots - \hat{\Omega}_i \mu_0 + o(\mu_0) + \dots + o(\mu_i), \\ &\vdots \quad \vdots \\ \hat{\mu}_{k-1} &= \mu_{k-1} - \hat{\Omega}_1 \mu_{k-2} - \dots - \hat{\Omega}_{k-1} \mu_0 + o(\mu_0) + \dots + o(\mu_i)\end{aligned}$$

и величины $\hat{\Omega}_i$ — функции от $\Omega_1(0), \dots, \Omega_i(0)$ и $\omega(0)$:

$$\begin{aligned}\hat{\Omega}_1 &= \Omega_1(0)/\omega(0), \\ \hat{\Omega}_2 &= \Omega_2(0)/\omega(0) - \Omega_1^2(0)/\omega^2(0), \\ &\vdots \quad \vdots\end{aligned}$$

В предыдущем параграфе мы свели задачу о рождении точек периода два из неподвижной точки с мультипликатором -1 к изучению отображения (11.4.17), аналогичного отображению (11.5.16). Следовательно, бифуркационная диаграмма в этом случае такая же, что и для бифуркации удвоения периода с $(k-1)$ нулевой ляпуновской величиной: она состоит из объединения плоскости $\mu_0 = 0$, на которой состояние равновесия в начале координат теряет устойчивость, и той половины поверхности кратных

корней многочлена $\hat{\mu}_0 + \dots + \hat{\mu}_{k-1}u^{k-1} + L_k u^k$, которая отвечает положительным u (положительные корни кратности s отвечают s -кратному предельному циклу).

Заметим, что отображение (11.5.16) может иметь не более k положительных неподвижных точек (считая с кратностями), значит состояние равновесия с парой чисто мнимых характеристических показателей и с нулевыми первыми $(k-1)$ ляпуновскими величинами может породить не более чем k предельных циклов. Кроме того, в пространстве параметров можно найти области, где система имеет любое заданное число (от 0 до k) предельных циклов. Они все окружают начало координат таким образом, что неустойчивый цикл заключен между любыми двумя соседними устойчивыми. Устойчивость крайнего предельного цикла определяется знаком k -й ляпуновской величины, он устойчив, если $L_k < 0$, и неустойчив в противном случае.

Эта теория восходит к Андронову и Леонтович, проанализировавших двумерный случай. Немного позже семейства, имеющие состояние равновесия с чисто мнимой парой характеристических показателей, изучались Хопфом с другой точки зрения. Его результат можно переформулировать следующим образом: рассмотрим однопараметрическое семейство двумерных систем⁶

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \lambda(\mu)x_1 - \omega(\mu)x_2 + G_1(x_1, x_2, \mu), \\ \dot{x}_2 &= \omega(\mu)x_1 + \lambda(\mu)x_2 + G_2(x_1, x_2, \mu),\end{aligned}\tag{11.5.17}$$

где $G_{1,2}$ — такие функции класса $\mathbb{C}^r$ ($r \geq 1$), что $G = o(R)$ и $G'_\mu = o(R)$, где $R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Теорема 11.2. Пусть

$$\lambda(0) = 0, \quad \lambda'(0) \neq 0, \quad \omega(0) \neq 0.$$

Тогда в расширенном фазовом пространстве (прямом произведении фазового пространства и пространства параметров) вблизи начала координат существует однозначно определенная $\mathbb{C}^r$ -гладкая инвариантная поверхность вида $\mu = \psi(x)$, $\psi(0) = 0$ такая, что каждое ее пересечение с плоскостью $\mu = \text{const}$ состоит из множества замкнутых орбит системы (11.4.17), лежащих в окрестности начала координат при данном μ .

⁶На самом деле Хопф рассмотрел многомерный случай. Однако, применяя теорему о центральном многообразии, мы можем ограничить наше рассмотрение двумерными системами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем систему (11.5.17) в полярных координатах:

$$\begin{aligned}\dot{R} &= \lambda(\mu)R + \Phi_1(R, \varphi, \mu), \\ \dot{\varphi} &= \omega(\mu) + \Phi_2(R, \varphi, \mu),\end{aligned}$$

где $\Phi_1 = o(R)$, $\partial\Phi_1/\partial\mu = o(R)$ и $\Phi_2 = o(1)$. Отображение луча $\varphi = 0$, $R \geq 0$ по траекториям системы имеет вид

$$\overline{R} = e^{2\pi\lambda(\mu)/\omega(\mu)} R + o(R). \quad (11.5.18)$$

Неподвижные точки этого отображения находятся как нули функции

$$\Psi(R, \mu) \equiv e^{2\pi\lambda(\mu)/\omega(\mu)} - 1 + o(R)/R. \quad (11.5.19)$$

Пара $(R = 0, \mu = 0)$ удовлетворяет этому уравнению. Поскольку

$$\frac{\partial\Psi(0, 0)}{\partial\mu} = \frac{2\pi\lambda'(0)}{\omega(0)} \neq 0,$$

мы можем применить к (11.5.19) теорему о неявной функции, из которой следует, что в полуплоскости $(\mu, R \geq 0)$ имеется заданная единственным образом гладкая кривая вида $\mu = \Psi(R)$, которая состоит из неподвижных точек отображения (11.5.18) при каждом заданном μ . Поскольку периодические орбиты системы (11.5.17) соответствуют неподвижным точкам отображения (11.5.18), то в расширенном пространстве $\mu = \psi(x)$ существует поверхность вида (μ, x_1, x_2) , которая выполнена замкнутыми траекториями системы. Это совпадает с утверждениями теоремы (проверка гладкости поверхности при $x = 0$ требует дополнительных вычислений, которые мы здесь опускаем). ■

Отметим, что вышеприведенная теорема сама по себе дает не много информации о динамике системы (11.5.17). Единственное, что мы можем сразу извлечь из теоремы, — это то, что система имеет периодические орбиты в малой окрестности $\mu = 0$ или при $\mu = 0$. Но теорема ничего не говорит о количестве периодических орбит при любом данном μ .

Например, может случиться, что инвариантная поверхность задается уравнением $\mu = 0$. Это означает, что все траектории вблизи начала координат замкнуты, т. е. состояние равновесия в начале координат является центром, в то время как при $\mu \neq 0$ система не имеет малых замкнутых орбит, окружающих начало координат. Таким образом, состояние равновесия может просто потерять устойчивость, не породив предельный цикл, как, например, это происходит в уравнении $\ddot{x} + \mu\dot{x} + x + x^3 = 0$.

11.6. Рождение инвариантного тора

Рассмотрим семейство отображений класса $\mathbb{C}^r$ ($r \geq 3$) по переменным $x \in \mathbb{R}^2$, $y \in \mathbb{R}^m$ ($m \geq 0$) и параметрам $\varepsilon \in \mathbb{R}^p$ ($p \geq 1$). Пусть отображение при $\varepsilon = 0$ имеет неподвижную точку O с двумя комплексно-сопряженными мультипликаторами, абсолютные значения которых равны 1:

$$\rho_{1,2} = e^{\pm i\omega_0},$$

где $0 < \omega_0 < \pi$ (предполагается, что другие мультипликаторы лежат вне единичной окружности). Такая неподвижная точка сохраняется также и при $\varepsilon \neq 0$. Мы будем полагать, что для всех ε неподвижная точка находится в начале координат. Пара мультипликаторов, ближайшая к единичной окружности, — это

$$\rho_{1,2}(\varepsilon) = \rho(\varepsilon)e^{\pm i\omega(\varepsilon)}, \quad (11.6.1)$$

где $\rho(\varepsilon)$ и $\omega(\varepsilon)$ — такие $\mathbb{C}^{r-1}$ -функции от ε , что

$$\rho(0) = 1, \quad 0 < \omega(0) < \pi.$$

Поскольку мы не планируем рассматривать более сложную задачу о сильных резонансах, допустим, что $\omega(0) \neq 2\pi/3, \pi/2$.

В силу теоремы о редукции отображение вблизи неподвижной точки можно привести к виду

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \rho(\varepsilon)(x_1 \cos \omega(\varepsilon) - x_2 \sin \omega(\varepsilon)) + G_1(x_1, x_2, \varepsilon), \\ \bar{x}_2 &= \rho(\varepsilon)(x_1 \sin \omega(\varepsilon) + x_2 \cos \omega(\varepsilon)) + G_2(x_1, x_2, \varepsilon), \\ \bar{y} &= [A + F(x, y, \varepsilon)]y, \end{aligned} \quad (11.6.2)$$

где F — $\mathbb{C}^{r-1}$ -гладкая функция, $G_{1,2}$ относятся к классу $\mathbb{C}^r$,

$$\begin{aligned} F(0, 0, 0) &= 0, \\ G(0, 0, 0) &= 0, \\ G'_x(0, 0, 0) &= 0, \end{aligned}$$

где мы вместо G_i пишем G , чтобы избежать путаницы.

При $\varepsilon = 0$ отображение приводится к нормальной форме вплоть до членов третьего порядка (см. параграф 10.6). Более того, можно проверить, что квадратичные члены являются нерезонансными при всех малых ε , и,

следовательно, их можно убить посредством преобразования, полиномиального по x и $\mathbb{C}^{r-2}$ -гладкого по ε . Таким образом, отображение на центральном многообразии можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= \rho(\varepsilon)(x_1 \cos \omega(\varepsilon) - x_2 \sin \omega(\varepsilon)) + (\alpha x_1 - \beta x_2)(x_1^2 + x_2^2) + \tilde{G}_1(x_1, x_2, \varepsilon), \\ \bar{x}_2 &= \rho(\varepsilon)(x_1 \sin \omega(\varepsilon) + x_2 \cos \omega(\varepsilon)) + (\beta x_1 + \alpha x_2)(x_1^2 + x_2^2) + \tilde{G}_2(x_1, x_2, \varepsilon),\end{aligned}$$

где $\tilde{G}_{1,2} - \mathbb{C}^r$ -гладкие функции от x и $\mathbb{C}^{r-2}$ -гладкие функции от ε такие, что

$$\begin{aligned}\tilde{G}(0, 0, \varepsilon) &= 0, & \tilde{G}''_{xx}(0, 0, \varepsilon) &= 0, \\ \tilde{G}'_x(0, 0, \varepsilon) &= 0, & \tilde{G}'''_{xxx}(0, 0, 0) &= 0.\end{aligned}$$

Поскольку $\tilde{G}'''_{xxx}$ мало при малых ε и $R(R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2})$, получаем, что

$$\tilde{G}''_{xx} = o(R), \quad \tilde{G}'_x = o(R^2), \quad \tilde{G} = o(R^3). \quad (11.6.3)$$

Чтобы записать отображение в полярных координатах, мы используем формулы $\bar{R} = \sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2}$ и $\bar{\varphi} = \text{Im} \ln(\bar{x}_1 + i\bar{x}_2)$, что дает

$$\begin{aligned}\bar{R}^2 &= \rho^2(x_1^2 + x_2^2)[1 + 2(\alpha \cos \omega + \beta \sin \omega)(x_1^2 + x_2^2)/\rho + \\ &\quad + 2\rho^{-1}(x_1(\tilde{F}_1 \cos \omega + \tilde{F}_2 \sin \omega) + \\ &\quad + x_2(\tilde{F}_2 \cos \omega - \tilde{F}_1 \sin \omega))/(x_1^2 + x_2^2) + \dots], \\ \bar{\varphi} &= \text{Im} \ln(x_1 + ix_2) + \omega + \text{Im} \ln[1 + \rho^{-1}e^{-i\omega}(\alpha + i\beta)(x_1^2 + x_2^2) + \\ &\quad + \rho^{-1}e^{-i\omega}(\tilde{F}_1 + i\tilde{F}_2)/(x_1 + ix_2)],\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}\bar{R} &= \rho(\varepsilon)R + L_1R^3 + \tilde{\Phi}_1(R, \varphi, \varepsilon), \\ \bar{\varphi} &= \varphi + \omega(\varepsilon) + \Omega_1R^2 + \tilde{\Phi}_2(R, \varphi, \varepsilon),\end{aligned} \quad (11.6.4)$$

где $L_1 = (\alpha \cos \omega + \beta \sin \omega) - \text{первая ляпуновская величина}$, $\Omega_1 = (\beta \cos \omega - \alpha \sin \omega)/\rho$ и

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_1(R, \varphi, \varepsilon) &= \tilde{F}_1 \cos(\omega + \varphi) + \tilde{F}_2 \sin(\omega + \varphi) + \dots = o(R^3), \\ \tilde{\Phi}_2(R, \varphi, \varepsilon) &= \rho^{-1}(\tilde{F}_2 \cos(\omega + \varphi) - \tilde{F}_1 \sin(\omega + \varphi))/R + \dots = o(R^2),\end{aligned} \quad (11.6.5)$$

где многоточия обозначают члены более высокого порядка.

Граница $\mathfrak{M}$ области устойчивости неподвижной точки в пространстве параметров задана уравнением $\rho(\varepsilon) = 0$: неподвижная точка O устойчива, если $\rho(\varepsilon) < 0$, и неустойчива, если $\rho(\varepsilon) > 0$. Если по крайней мере одна составляющая вектора $(\partial\rho/\partial\varepsilon_1, \dots, \partial\rho/\partial\varepsilon_p)_{\varepsilon=0}$ отличается от нуля, то при малых ε граница $\mathfrak{M}$ является $\mathbb{C}^{r-1}$ -гладкой поверхностью коразмерности один. Выберем разность $\rho(\varepsilon) - 1$ в качестве управляющего параметра μ . Тогда однопараметрические семейства, трансверсальные к $\mathfrak{M}$, можно представить в виде

$$\begin{aligned}\bar{R} &= R + R(\mu + L_1 R^2) + \tilde{\Phi}_1(R, \varphi, \mu), \\ \bar{\varphi} &= \varphi + \omega(\mu) + \Omega_1 R^2 + \tilde{\Phi}_2(R, \varphi, \mu).\end{aligned}\tag{11.6.6}$$

Теорема 11.3. Пусть $L_1 < 0$. Тогда при всех малых $\mu \leq 0$ неподвижная точка O отображения (11.6.6) устойчива и притягивает все траектории из малой окрестности O .

При $\mu > 0$ из O рождается гладкая, инвариантная замкнутая кривая

$$R = \sqrt{\left| \frac{\mu}{L_1} \right|} \psi(\varphi, \mu), \quad \psi_{\mu \rightarrow 0} \rightarrow 1,\tag{11.6.7}$$

которая притягивает все (кроме O) траектории (см. рис. 11.6.1).

Если первая ляпуновская величина $L_1 > 0$, то неподвижная точка отображения (11.6.6) при достаточно малых $\mu \geq 0$ неустойчива. Когда $\mu < 0$, неподвижная точка устойчива; ее областью притяжения служит внутренняя область неустойчивой гладкой инвариантной кривой вида (11.6.7). При $\mu \rightarrow -0$ кривая стягивается в неподвижную точку (см. рис. 11.6.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для начала отметим, что случай $L_1 > 0$ можно свести к $L_1 < 0$, если вместо исходного отображения (11.6.6) рассмотреть обратное к нему. Значит, нам достаточно ограничиться только случаем $L_1 < 0$. Устойчивость неподвижной точки при $\mu \leq 0$ прямо следует из того факта, что $\bar{R} < R$ при $\mu \leq 0$, т. е. $V \equiv R$ является функцией Ляпунова. Таким образом, случай, который остается рассмотреть, — это $\mu > 0$.

Рассмотрим кольцо $\mathcal{A}$ вида

$$\frac{2}{3} \sqrt{|\mu/L_1|} \equiv R_1 \leq R \leq R_2 \equiv \frac{3}{2} \sqrt{|\mu/L_1|}.$$

Отметим, что при всех достаточно малых μ траектория, начинающаяся вне кольца (в достаточно малой окрестности начала координат), должна войти в него после конечного числа итераций: из (11.6.6) следует, что $\bar{R} < R$

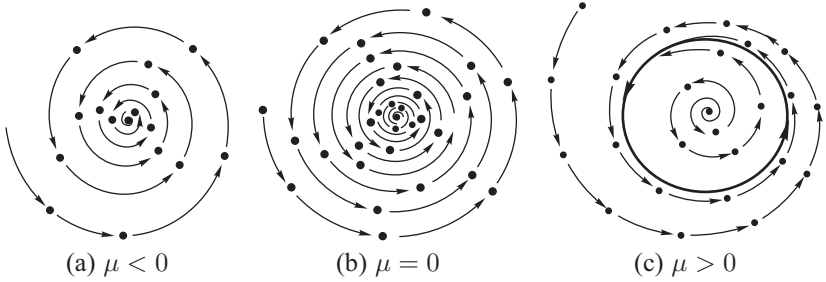


Рис. 11.6.1. Мягкое рождение инвариантной кривой

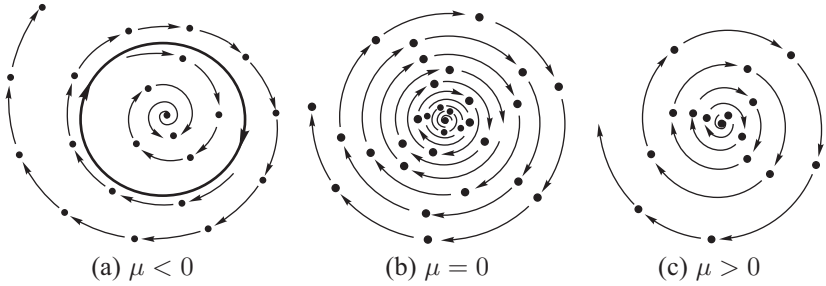


Рис. 11.6.2. Жесткая потеря устойчивости неподвижной точкой

при $R > R_2$ и $\bar{R} > R$ при $0 < R < R_1$. Для окончания доказательства достаточно применить принцип кольца из параграфа 4.2 к ограничению отображения (11.6.6) на кольцо $\mathcal{A}$.

Для этого проведем перенормировку $R \rightarrow R\sqrt{|\mu/L_1|}$. В нормализованных переменных кольцо задается неравенствами

$$\frac{2}{3} \leq R \leq \frac{3}{2}, \quad (11.6.8)$$

и отображение принимает вид

$$\begin{aligned} \bar{R} &= R + \mu R(1 - R^2) + \Phi_1(R, \varphi, \mu), \\ \bar{\varphi} &= \varphi + \omega(\mu) - \mu\Omega_1 R^2/L_1 + \Phi_2(R, \varphi, \mu), \end{aligned} \quad (11.6.9)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \tilde{\Phi}_1(R\sqrt{|\mu/L_1|}, \varphi, \mu)/\sqrt{|\mu/L_1|}, \\ \Phi_2 &= \tilde{\Phi}_2(R\sqrt{|\mu/L_1|}, \varphi, \mu). \end{aligned} \quad (11.6.10)$$

Из (11.6.10), (11.6.5) и (11.6.3) можно найти, что

$$\Phi_{1,2} = o(\mu). \quad (11.6.11)$$

Если мы обозначим, как в параграфе 4.2:

$$\bar{R} = f(R, \varphi),$$

$$\bar{\varphi} = g(R, \varphi),$$

то отображение (11.6.9) в кольце будет удовлетворять соотношениям

$$\begin{aligned} \|(g'_\varphi)^{-1}\|_o &= 1 + o(\mu), \\ \|g'_R\|_o &= O(\mu), \\ \|f'_R\|_o &= 1 - \mu/3 + o(\mu), \\ \|f'_\varphi\|_o &= o(\mu), \end{aligned}$$

где $\|\cdot\|_o \equiv \sup \|\cdot\|$. Отметим, что при всех достаточно малых μ выполнено следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & \sqrt[r+1]{(\|f'_R\|_o + \|g'_R\|_o \|f'_\varphi (g'_\varphi)^{-1}\|_o) \cdot \|(g'_\varphi)^{-1}\|_o^r +} \\ & + \sqrt{\|(g'_\varphi)^{-1}\|_o \|g'_R\|_o \|f'_\varphi (g'_\varphi)^{-1}\|_o} < 1. \end{aligned} \quad (11.6.12)$$

Поэтому из принципа кольца (теоремы 4.2 и 4.5) следует, что существует гладкая инвариантная кривая C вида

$$R = \psi(\varphi, \mu),$$

к которой стремятся все траектории $\mathcal{A}$.

Из доказательства принципа кольца следует, что кривая C является пределом последовательности кривых, полученных итерациями произвольной исходной кривой $R = \text{const}$, например, $R = 1$. Из (11.6.9) видно, что для любого малого $\delta > 0$ все итерации кривой лежат внутри кольца $|R - 1| \leq \delta$ при условии, что μ достаточно мало. Действительно, если μ достаточно мало, то при $R = 1 + \delta$ мы имеем

$$\bar{R} = 1 + \delta - \mu\delta(1 + \delta)(2 + \delta) + o(\mu) < 1 + \delta;$$

а при $R = 1 - \delta$ мы имеем

$$\bar{R} = 1 - \delta + \mu\delta(1 - \delta)(2 - \delta) + o(\mu) < 1 - \delta.$$

Отсюда, предельная кривая C также лежит внутри этого кольца. Поскольку δ становится сколь угодно малым при $\mu \rightarrow 0$, мы получаем, что $\psi(\varphi, \mu) \rightarrow 1$ при $\mu \rightarrow 0$. ■

ЗАМЕЧАНИЕ. Поскольку гладкость инвариантной кривой, вообще говоря, не превышает гладкость самого отображения, функция ψ в (11.6.7) $\mathbb{C}^r$ -гладкая по φ и только C^{r-2} -гладкая по μ . На самом деле потеря гладкости по параметрам вызывается только потерей гладкости при приведении исходного отображения к виду (11.6.6). При помощи более аккуратной редукции к нормальной форме можно восстановить $\mathbb{C}^r$ -гладкость по параметрам. Такие свойства гладкости относятся только к отличным от нуля значениям μ (к отображению (11.6.9) при $\mu = 0$ принцип кольца неприменим). Однако мы можем доказать, что правая часть формулы (11.6.7), которая определяет инвариантную кривую, является достаточно гладкой по φ и $\sqrt{\mu}$ при всех $L_1\mu \leq 0$. Например, проверим, что все производные от ψ по φ стремятся к нулю при $\mu \rightarrow 0$. Действительно, заметим, что из инвариантности кривой C следует, что если $R = \psi(\varphi, \mu)$, то $\bar{R} = \psi(\bar{\varphi}, \mu)$. Дифференцируя это равенство и используя (11.6.9), мы получаем

$$\bar{u} = \frac{(1 + \mu(1 - 3R^2) + \Phi'_{1R})u + \Phi'_{1\varphi}}{1 + \Phi'_{\varphi} - (2\mu\Omega_1 R/L_1 - \Phi'_{2R})u}, \quad (11.6.13)$$

где $u \equiv \partial\psi/\partial\varphi$ и $\bar{u} = u(\bar{\varphi})$. Правая часть в (11.6.13) вычисляется при $R = \psi(\varphi, \mu)$. Уравнение (11.6.13) вместе со вторым уравнением в (11.6.9) может рассматриваться как отображение цилиндра $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^1$ на себя: $(u, \varphi) \mapsto (\bar{u}, \bar{\varphi})$. Учитывая, что $R = \psi(\varphi, \mu) \rightarrow 1$ при $\mu \rightarrow 0$, мы можем записать (11.6.13) в виде

$$\bar{u} = (1 - 2\mu)u + o(\mu). \quad (11.6.14)$$

Отметим, что (11.6.14) отображает кольцо

$$|u| \leq \delta$$

в себя, где δ может быть выбрано сколь угодно малым за счет малости μ . Производная $u = \partial\psi/\partial\varphi$ находится как инвариантная кривая этого отображения. Из доказательства принципа кольца следует, что эта кривая является пределом итераций любой кривой $u = \text{const}$. Поскольку все итерации окружности $u = 0$ лежат внутри кольца $|u| \leq \delta$, предельная кривая должна также лежать внутри кольца. Итак, следовательно, $\partial\psi/\partial\varphi \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow 0$, т.е. ψ является гладкой функцией от φ при $\mu = 0$.

Дифференцируя (11.5.13) мы находим, что, как и в (11.6.14), вторая производная $\bar{u}^{(2)} = \partial u/\partial\varphi$ удовлетворяет отношению

$$\bar{u}^{(2)} = (1 - 2\mu)u^{(2)} + o(\mu),$$

аналогичному (11.6.14). Повторяя приведенные выше рассуждения, мы находим, что вторая производная существует и непрерывна при всех $\mu \geq 0$. Мы можем повторить эту процедуру для всех производных по φ .

Вышеприведенная теорема относится к отображению на центральном многообразии. Переход к поведению траекторий исходного отображения (11.6.2) достаточно прост. При этом если $L_1 < 0$, то неподвижная точка является устойчивой при $\mu \leq 0$. Когда $\mu > 0$, она становится седло-фокусом с m -мерным устойчивым многообразием (данным уравнением $x = 0$) и с двумерным неустойчивым многообразием, которое состоит из части плоскости $y = 0$, ограниченной устойчивой инвариантной кривой C .

Если $L_1 > 0$, то при $\mu \geq 0$ неподвижная точка является седло-фокусом того же типа, что и выше, но его неустойчивым многообразием будет вся плоскость $y = 0$. При переходе в область $\mu < 0$ неподвижная точка становится устойчивой. При этом, от неподвижной точки отражается седловая инвариантная кривая C ; ее неустойчивое многообразие W_C^u является $(m+1)$ -мерным и состоит из слоев $x = \text{const}$, восстановленных в точках инвариантной кривой. Устойчивое многообразие W_C^s ограничивает область притяжения точки O : все траектории из внутренней области стремятся к O , а все, расположенные вне W_C^s , покидают окрестность начала координат.

Если отображение (11.6.2) является отображением Пуанкаре для автономной системы дифференциальных уравнений, то инвариантная кривая отвечает двумерному гладкому инвариантному тору (см. рис. 11.6.3). Он устойчивый, если $L_1 < 0$, или седловой с трехмерным неустойчивым многообразием и $(m+2)$ -мерным устойчивым многообразием, если $L_1 > 0$. Из параграфа 3.4 вспомним, что движение на торе определяется числом вращения Пуанкаре: если число вращения ν иррациональное, тогда траектории на торе являются квазипериодическими с частотой ν ; в противном случае, если число вращения рациональное, на торе имеются резонансные периодические орбиты.

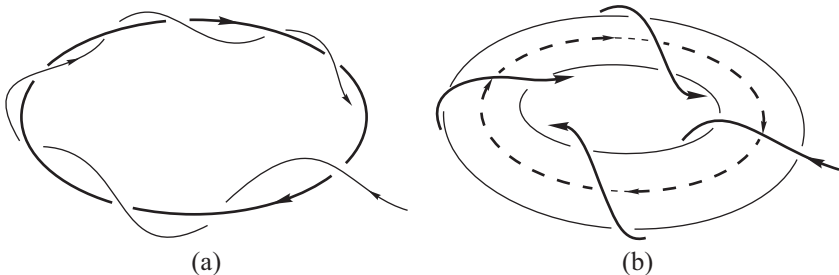


Рис. 11.6.3. (а) Рождение инвариантного тора в $\mathbb{R}^3$. (б) Неустойчивый цикл обозначен штриховой линией внутри тора

Мы отложим изучение бифуркации на торе до следующего параграфа и сначала рассмотрим, что происходит, если первая ляпуновская величина L_1 обращается в нуль. Пусть в (11.6.1) $\omega(0)$ отлично от $2\pi/3$, $\pi/2$, $2\pi/5$, $4\pi/5$ или $\pi/3$. Тогда, после редукции к нормальной форме до членов пятого порядка, отображение в полярных координатах записывается в виде

$$\begin{aligned}\bar{R} &= R + R(\mu_0 + \mu_1 R^2 + L_2 R^4) + \tilde{\Phi}_1(R, \varphi, \mu), \\ \bar{\varphi} &= \varphi + \omega(\mu) + \Omega_1(\mu) R^2 + \Omega_2 R^4 + \tilde{\Phi}_2(R, \varphi, \mu).\end{aligned}\quad (11.6.15)$$

При этом $\tilde{\Phi}_1 = o(R^5)$, $\tilde{\Phi}_2 = o(R^4)$; $L_2 \neq 0$ — вторая ляпуновская величина, а управляющими параметрами служат $\mu_0 = \rho(\varepsilon) - 1$ и $\mu_1 = L_1(\varepsilon)$.

Теорема 11.4. Пусть $L_2 < 0$. Тогда в плоскости параметров μ можно выделить пару кривых $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ вида

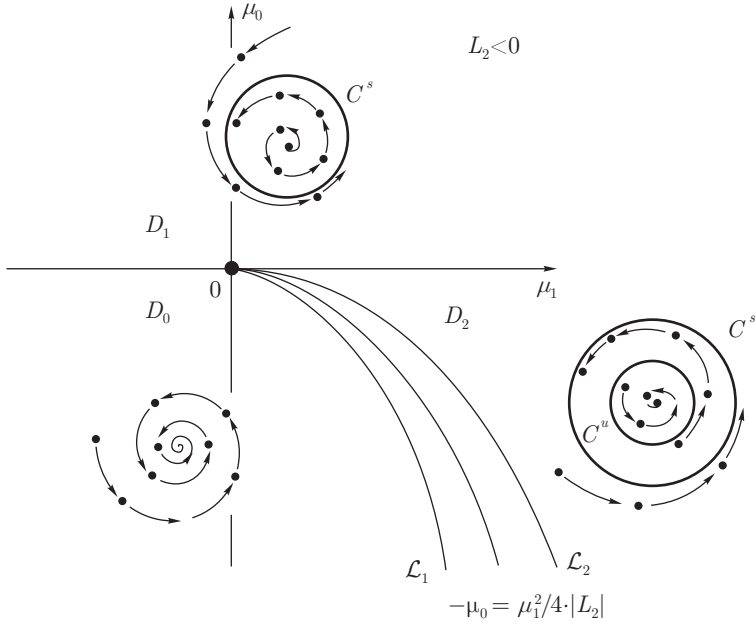
$$\mu_0 = -\mu_1^2/4|L_2| \pm o(\mu_1^2), \quad \mu_1 \geq 0$$

таких, что в области D_0 между кривой $\mathcal{L}_1$ и лучом $\mu_0 = 0$, $\mu_1 \leq 0$ (см. рис. 11.6.4) неподвижная точка O в начале координат устойчива и притягивает все траектории из некоторой ее окрестности; в области $D_1 : \mu_0 > 0$ неподвижная точка неустойчива и все траектории стремятся к $\mathbb{C}^r$ -гладкой инвариантной замкнутой кривой C^s , окружающей начало координат; в области D_2 между кривой $\mathcal{L}_2$ и лучом $\mu_0 = 0$, $\mu_1 \geq 0$ неподвижная точка становится устойчивой и, помимо C^s , возникает неустойчивая $\mathbb{C}^r$ -гладкая инвариантная замкнутая кривая C^u , которая отделяет область притяжения точки O от области притяжения кривой C^s .

В случае $L_2 > 0$ в плоскости параметров лежат кривые $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ вида соответственно

$$\mu_0 = \mu_1^2/4|L_2| \pm o(\mu_1^2), \quad \mu_1 \leq 0,$$

такие что в области D_0 между кривой $\mathcal{L}_1$ и лучом $\mu_0 = 0$, $\mu_1 \geq 0$ (см. рис. 11.6.5) неподвижная точка неустойчива и отталкивает все траектории из малой окрестности начала координат; в области $D_1 : \mu_0 < 0$ неподвижная точка устойчива, но ее область притяжения ограничена неустойчивой $\mathbb{C}^r$ -гладкой инвариантной замкнутой кривой C^u ; в области D_2 , ограниченной $\mathcal{L}_2$ и лучом $\mu_0 = 0$, $\mu_1 \leq 0$, неподвижная точка теряет устойчивость и становится неустойчивой; из нее рождается устойчивая $\mathbb{C}^r$ -гладкая инвариантная кривая, которая теперь притягивает все траектории во внутренней области, ограниченной C^u .

Рис. 11.6.4. Бифуркационная диаграмма при $L_2 < 0$

Чтобы избежать длинных вычислений, мы ограничимся схемой доказательства. Будем рассматривать только случай $L_2 < 0$ (потому что случай $L_2 > 0$ сводится к вышеприведенному, если вместо отображения (11.6.15) берется обратное). Прежде всего отметим, что теорема легко проверяется для укороченного отображения

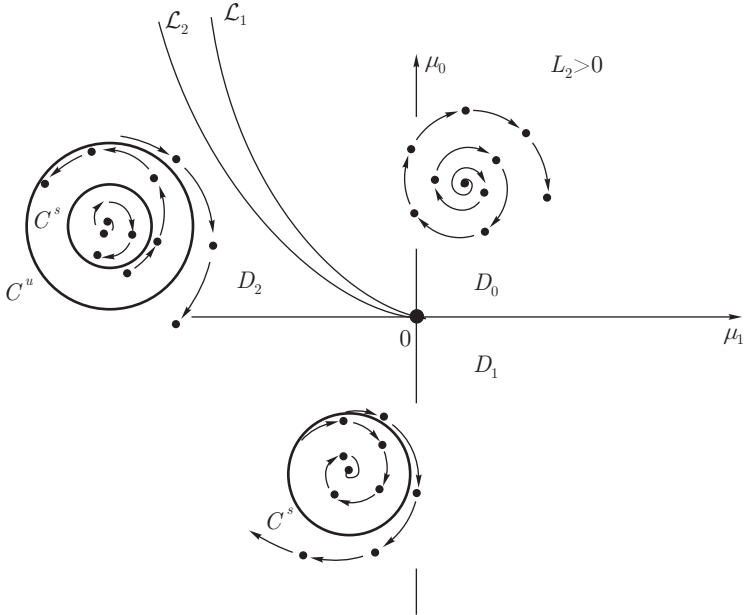
$$\begin{aligned}\bar{R} &= R + R(\mu_0 + \mu_1 R^2 + L_2 R^4), \\ \bar{\varphi} &= \varphi + \omega(\mu) + \Omega_1(\mu) R^2 + \Omega_2 R^4.\end{aligned}\tag{11.6.16}$$

При этом инвариантными кривыми являются окружности $R = \text{const}$, и задача сводится к нахождению положительных корней уравнения

$$\mu_0 + \mu_1 R^2 + L_2 R^4 = 0.$$

Это уравнение имеет один положительный корень

$$R_s^2 = (\mu_1 + \sqrt{\mu_1^2 + 4|L_2|\mu_0})/2|L_2|,$$

Рис. 11.6.5. Бифуркационная диаграмма при $L_2 > 0$

если $\mu_0 > 0$, ни одного положительного корня, если $\mu_0 < 0$ и $\mu_1 < 2\sqrt{L_2\mu_0}$, и два положительных корня

$$R_s^2 = (\mu_1 + \sqrt{\mu_1^2 + 4|L_2|\mu_0})/2|L_2|,$$

$$R_u^2 = (\mu_1 - \sqrt{\mu_1^2 + 4|L_2|\mu_0})/2|L_2|,$$

если $0 > \mu_0 > -\mu_1^2/4|L_2|$ и $\mu_1 > 0$.

Для отображения (11.6.15) кривые $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ совпадают ($\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}$) и задаются уравнением

$$\mu_0 = -\mu_1^2/4|L_2|, \quad \mu_1 \geq 0.$$

Для значений параметра ниже $\mathcal{L}$ отображение не имеет инвариантных кривых. Выше $\mu_0 = 0$ оно имеет только одну инвариантную кривую $R = R_s$, а между $\mathcal{L}$ и лучом $\mu_0 = 0$, $\mu_1 \geq 0$ отображение имеет две инвариантные кривые $R = R_s$ и $R = R_u$. Легко видеть, что

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial R} = 1 - 2R_s^2 \sqrt{\mu_1^2 + 4|L_2|\mu_0} < 1$$

при $R = R_s$, и

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial R} = 1 + 2R_u^2 \sqrt{\mu_1^2 + 4|L_2|\mu_0} > 1$$

при $R = R_u$; т. е. инвариантная окружность $R = R_s$ устойчива, а инвариантная кривая $R = R_u$ неустойчива. На кривой $\mathcal{L}$ укороченное отображение (11.6.16) имеет полуустойчивую инвариантную окружность $R^2 = \mu_1/2|L_2|$.

Что касается исходного отображения (11.6.15), то можно расположить кривые $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ в плоскости параметров таким образом ($\mathcal{L}_1$ проходит немного выше, а $\mathcal{L}_2$ проходит немного ниже $\mathcal{L}$), что для всех достаточно малых μ , взятых вне области между этими кривыми, поведение траекторий вблизи начала координат повторяет поведение траекторий укороченного отображения (11.6.16). Кривая $\mathcal{L}_1$ выбирается так, что значение $\bar{R}$ в (11.6.15) строго меньше R для всех достаточно малых $\mu \in D_0$ и малых R . Это означает, что R является функцией Ляпунова для отображения в окрестности начала координат, так что каждая траектория стремится к устойчивой неподвижной точке. Таким же образом, как и в доказательстве теоремы 11.6.1, для области D_1 : $\mu_0 > 0$ мы можем проверить, что если мы заключим окружность $R = R_s$ в малое кольцо $\mathcal{A}$, то при всех малых μ траектории из малой окрестности начала координат будут входить в $\mathcal{A}$; затем принцип кольца применяется к ограничению отображения на $\mathcal{A}$ и дает существование в $\mathcal{A}$ гладкой инвариантной кривой, которая притягивает все траектории из окрестности начала координат. Что касается кривой $\mathcal{L}_2$, ее можно выбрать таким образом, что если в области D_2 мы окружим окружности $R = R_s$ и $R = R_u$ двумя узкими кольцами, которые мы обозначим как $\mathcal{A}_s$ и $\mathcal{A}_u$ соответственно, то все траектории из части фазовой плоскости, которая лежит вне $\mathcal{A}_u$, будут входить в $\mathcal{A}_s$. Те траектории, которые начинаются во внутренней части фазовой плоскости, будут стремиться к неподвижной точке (см. рис. 11.6.6). Так как здесь также применим принцип кольца к ограничению отображения на $\mathcal{A}_s$, это означает, что внутри $\mathcal{A}_s$ существует устойчивая инвариантная замкнутая кривая. Аналогичные вычисления для обратного отображения доказывают существование неустойчивой замкнутой инвариантной кривой внутри $\mathcal{A}_u$, которая отделяет области притяжения устойчивой инвариантной кривой и неподвижной точки.

Теорема 11.4, по существу, доказывает, что вне узкой области, ограниченной кривыми $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$, бифуркации не отличаются от бифуркаций состояний равновесия (см. параграф 11.5): неподвижные точки соответствуют состояниям равновесия, а инвариантные кривые соответствуют периодическим орбитам. Однако переход из области D_2 в область D_0 происходит

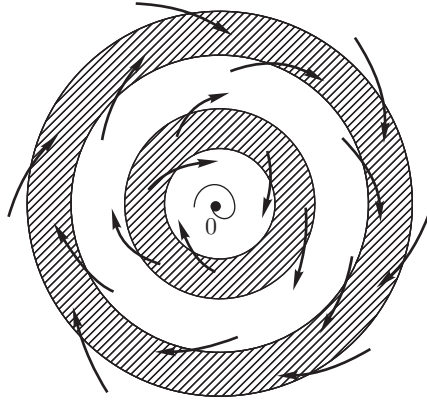


Рис. 11.6.6. При $\mu \in D_2$ внутреннее кольцо неустойчиво, а внешнее — устойчиво

сложнее. В случае состояний равновесия области D_2 и D_0 разделены линией, на которой сливаются устойчивые и неустойчивые периодические орбиты, образуя при этом полуустойчивый цикл. В случае инвариантных замкнутых кривых существование линии, отвечающей полуустойчивой инвариантной замкнутой кривой, возможно только в крайне вырожденном случае (например, когда $\bar{R}$ не зависит от φ , как в укороченном отображении (11.6.16)). В общем случае инвариантные замкнутые кривые не сливаются в полуустойчивую инвариантную замкнутую кривую, а вместо этого разрушаются. Их исчезновение может сопровождаться появлением нетривиального множества, содержащего бесконечное множество неустойчивых (седловых) периодических орбит с различными периодами; более подробно см. [37].

11.7. Бифуркации резонансных периодических орбит, сопровождающие рождение инвариантного тора

В этом параграфе мы продолжим изучение бифуркаций при пересечении единичной окружности парой комплексно-сопряженных мультипликаторов периодической орбиты:

$$\rho_{1,2} = \rho(\varepsilon) e^{\pm i\omega(\varepsilon)}, \quad (11.7.1)$$

где $\rho(0) = 1$ и $0 < \omega(0) < \pi$. Мы не рассматриваем сильные резонансы, т. е. $\omega(0) \neq 2\pi/3, \pi/2$.

В предыдущем параграфе мы уже установили, что, когда первая ляпуновская величина не обращается в нуль, переход через границу устойчивости $\mathfrak{M} : \rho(\varepsilon) = 0$ сопровождается рождением инвариантного двумерного

тора (в соответствующем отображении Пуанкаре это отвечает рождению замкнутой инвариантной кривой). Если мы не интересуемся поведением траекторий на торе, мы можем ограничить наше исследование изучением однопараметрических семейств, трансверсальных к $\mathcal{M}$. В этом случае теорема 11.4 из параграфа 11.6 полностью описывает бифуркацию. Чтобы исследовать бифуркации на самом торе, нам необходимо, однако, рассмотреть двухпараметрические семейства. Первым управляющим параметром, как и прежде, является $\mu = \rho(\varepsilon) - 1$. Что касается второго независимого управляющего параметра, то мы выбираем $\omega(\varepsilon)$ — аргумент мультипликатора (11.7.1). Отображение Пуанкаре на центральном многообразии принимает следующий вид в полярных координатах:

$$\begin{aligned}\bar{R} &= R + R(\mu + L_1 R^2) + \tilde{\Phi}_1(R, \varphi, \mu, \omega), \\ \bar{\varphi} &= \varphi + \omega + \Omega_1 R^2 + \tilde{\Phi}_1(R, \varphi, \mu, \omega)\end{aligned}\quad (11.7.2)$$

[см. (11.6.4); с формальной точки зрения мы получили семейство коразмерности два, трансверсальное поверхности $\mathcal{M}' : \rho(\varepsilon) = 1, \omega(\varepsilon) = \omega(0)$]. Отображение на инвариантной кривой $R = \sqrt{\mu}\psi(\varphi, \mu, \omega)$ имеет вид

$$\bar{\varphi} = \varphi + \omega + \Omega_1 \mu \psi^2(\varphi, \mu, \omega) + \tilde{\Phi}_2(\sqrt{\mu}\psi(\varphi, \mu, \omega), \varphi, \mu, \omega). \quad (11.7.3)$$

Из принципа кольца (см. доказательство теоремы 11.4) следует, что функция ψ гладко зависит от ω при $\mu > 0$. Более того, как и для производных от ψ по φ , мы можем проверить, что производные от ψ по ω стремятся к нулю при $\mu \rightarrow 0$. Это означает, что ψ — гладкая функция от ω для всех $\mu \geq 0$.

Отображение (11.7.3) при $\mu = 0$ превращается в поворот на постоянный угол ω , т.е. число вращения равно $\omega/2\pi$. Следовательно, если мы выберем два различных значения $\omega = \omega_1$ и $\omega = \omega_2$, то в силу непрерывной зависимости числа вращения от параметров, когда μ мало, число вращения ν отображения (11.7.3) близко к $\omega_1/2\pi$ при $\omega = \omega_1$ и близко к $\omega_2/2\pi$ при $\omega = \omega_2$.

Поскольку производная $\partial\bar{\varphi}/\partial\omega$ равна $1 + O(\mu) > 0$, то $\bar{\varphi}$ монотонно возрастает при увеличении ω . Следовательно, при каждом фиксированном малом μ число вращения ν меняется монотонно при изменении ω от ω_1 до ω_2 , принимая все значения от близких к $\omega_1/2\pi$ до близких к $\omega_2/2\pi$. Следовательно, как и в задаче о периодической орбите, вынуждаемой малыми периодическими возмущениями (параграф 4.4), для каждого рационального $\nu = M/N$ на отрезке $[\omega_1/2\pi; \omega_2/2\pi]$ мы имеем (см. рис. 11.7.1) резонансную зону, выходящую из точки ($\mu = 0, \omega = 2\pi M/N$). Каждая резонансная зона отвечает существованию на торе периодических траекторий с частотой

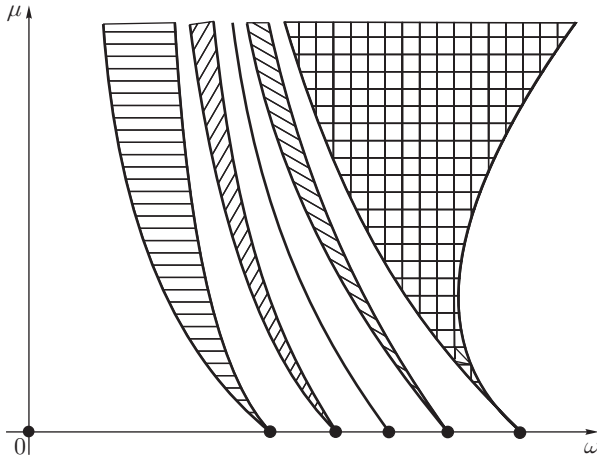


Рис. 11.7.1. График зависимости μ от частоты ω , иллюстрирующий резонансные зоны, растущие от рациональных значениях ω

$M : N$. Если ν — иррациональное число в пределах данного интервала, то существует липшицева кривая вида $\omega = h(\mu)$, выходящая из точки $(\mu = 0, \omega = 2\pi\nu)$, которая отвечает квазипериодическому режиму с отношением частот ν .

Рассмотрим подробнее, что происходит внутри резонансной зоны при достаточно малых μ . Выберем некоторое $\omega_0 = 2\pi M/N$ и приведем отображение к нормальной форме вплоть до членов порядка $N - 1$. Полагая, что значения μ малы, а ω близко к ω_0 , мы можем получить выражение, аналогичное формуле (10.4.19):

$$\bar{w} = (1 + \mu)e^{i\omega} \left(w \left(1 + \sum_{p \geq 1}^{2p \leq N-2} C'_{p+1,p} |w|^{2p} \right) + C'_{0,N-1} (w^*)^{N-1} \right) + o(|w|^{N-1}), \quad (11.7.4)$$

где $w = x_1 + ix_2$. В полярных координатах это отображение принимает вид

$$\begin{aligned} \bar{R} &= (1 + \mu)(R + L_1 R^3 + \dots + L_P R^{2P+1} + \\ &\quad + AR^{N-1} \cos(N\varphi + \alpha)) + o(R^{N-1}), \\ \bar{\varphi} &= \varphi + \omega + \Omega_1 R^2 + \dots + \Omega_P R^{2P} - \\ &\quad - AR^{N-2} \sin(N\varphi + \alpha) + o(R^{N-2}), \end{aligned} \quad (11.7.5)$$

где $C'_{0,N-1} = Ae^{i\alpha}$, P — наибольшее целое, не превышающее $[(N/2) - 1]$, L_i и Ω_i — гладкие функции от μ и ω .

Теорема 11.5. Пусть $L_1 \neq 0$ и $A \neq 0$. Тогда для малых μ резонансная зона, соответствующая числу вращения M/N , имеет вид клина шириной $\sim |\mu|^{(N-2)/2}$, касающегося прямой $\omega = \omega_0 + \mu\Omega_1/L_1$ в точке ($\mu = 0$, $\omega = \omega_0$). Если μ достаточно мало, то отображение внутри клина имеет ровно две орбиты периода N : одна орбита седлового типа, а другая устойчивая, если $L_1 < 0$, и неустойчивая, если $L_1 > 0$ (см. рис. 11.7.2 (а), 11.7.3 (а) для $N = 5$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для определенности предположим, что первая ляпуновская величина L_1 отрицательна. Тогда инвариантная кривая существует при $\mu > 0$. Резонансная зона, примыкающая к точке ($\mu = 0$, $\omega = \omega_0$), отвечает периодической орбите периода N . Чтобы найти эти орбиты, запишем N -ю итерацию отображения (11.7.5):

$$\begin{aligned}\bar{R} &= (1 + \mu)^N (R + \tilde{L}_1 R^3 + \dots + \tilde{L}_P R^{2P+1} + \\ &\quad + NAR^{N-1} \cos(N\varphi + \alpha)) + o(R^{N-1}), \\ \bar{\varphi} &= \varphi + N\omega + \tilde{\Omega}_1 R^2 + \dots + \tilde{\Omega}_P R^{2P} - \\ &\quad - NAR^{N-2} \sin(N\varphi + \alpha) + o(R^{N-2}),\end{aligned}\tag{11.7.6}$$

где $o(R^{N-1})$ и $o(R^{N-2})$ обозначают члены, которые при $\mu \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow \omega_0$ и $R \rightarrow 0$ стремятся к нулю быстрее, чем R^{N-1} и R^{N-2} соответственно; $\tilde{L}_i$ и $\tilde{\Omega}_i$ — некоторые функции от $\{L_1, \dots, L_i\}$ и $\{\Omega_1, \dots, \Omega_i\}$ соответственно. В частности,

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}_1 &= \Omega_1(1 + (1 + \mu)^2 + \dots + (1 + \mu)^{2(N-1)}) = N\Omega_1(1 + O(\mu)), \\ \tilde{L}_1 &= L_1(1 + (1 + \mu)^2 + \dots + (1 + \mu)^{2(N-1)}) = NL_1(1 + O(\mu)) < 0.\end{aligned}$$

Неподвижные точки отображения (11.7.6) находятся из условия

$$\bar{R} = R,\tag{11.7.7}$$

$$\bar{\varphi} = \varphi \bmod 2\pi.\tag{11.7.8}$$

Из (11.7.6) мы получаем следующее уравнение на координаты неподвижных точек:

$$R = \Psi(\mu, \omega) + \frac{A}{2|L_1|} (\sqrt{\mu/|L_1|})^{N-3} \cos(N\varphi + \alpha) + o(\mu^{(N-3)/2}),$$

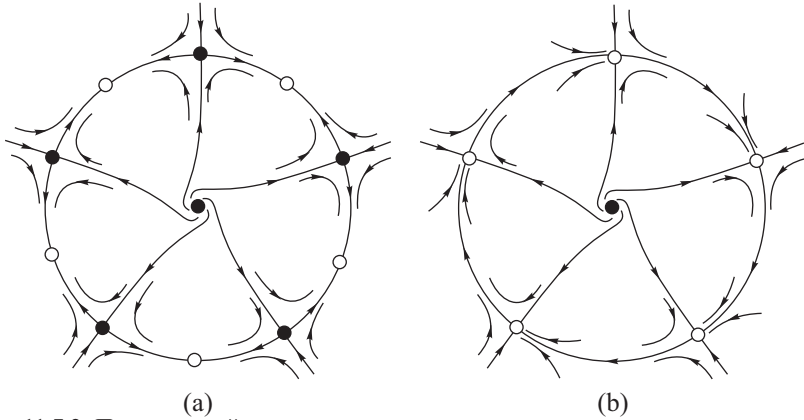


Рис. 11.7.2. Пример устойчивого резонансного тора с пятью парами периодических орбит на нем. Тор становится нерезонансным, когда периодические орбиты попарно сливаются и исчезают

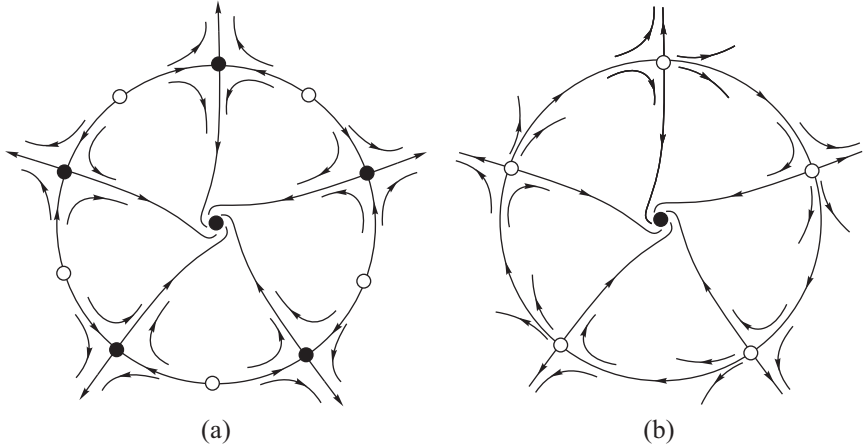


Рис. 11.7.3. Пример неустойчивого тора с пятью парами периодических орбит в резонансной зоне (a) и на ее границе (b)

где $\Psi = \sqrt{\mu/|L_1|} + o(\sqrt{\mu})$ не зависит от φ . Подставляя это выражение в (11.7.8), получаем

$$N\omega + \tilde{\Omega}_1 \Psi^2 + \dots + \tilde{\Omega}_P \Psi^{2P} = \frac{NA}{|L_1|} \left(\sqrt{\frac{\mu}{|L_1|}} \right)^{N-2} (\Omega_1 \cos(N\varphi + \alpha) + L_1 \sin(N\varphi + \alpha)) + o(\mu^{(N-2)/2}) \bmod 2\pi.$$

Так как ω близко к ω_0 , то $N\omega$ близко к $2\pi M$, и отсюда последнее уравнение можно записать в виде

$$\delta = D\mu^{(N-2)/2} \sin(N\varphi + \gamma) + o(\mu^{(N-2)/2}), \quad (11.7.9)$$

где

$$D = A\sqrt{L_1^2 + \Omega_1^2}/|L_1|^{N/2}, \quad \gamma = \alpha + \pi - \arctan|\Omega_1/L_1|, \quad (11.7.10)$$

$$\delta = \omega - 2\pi M/N + (\tilde{\Omega}_1\Psi^2 + \dots + \tilde{\Omega}_p\Psi^{2P})/N = \omega - \omega_0 + \mu\Omega_1/|L_1| + o(\mu).$$

Так как $A \neq 0$ по условию теоремы, значение D в (11.7.9) отлично от нуля. В этом случае уравнение (11.7.10) можно легко проанализировать, если μ достаточно мало. Действительно, правая часть уравнения при малых μ имеет ровно N максимумов и N минимумов на отрезке $\varphi \in [0, 2\pi]$. Отсюда, уравнение не может иметь более $2N$ корней. С другой стороны, это уравнение задает орбиты периода N отображения (11.7.5): каждая такая орбита соответствует N корням уравнения (11.7.9). Отсюда следует, что количество корней должно быть кратно N . Таким образом, либо уравнение вовсе не имеет корней (в этом случае значение δ больше, чем максимум, или меньше, чем минимум правой части), либо уравнение имеет $2N$ корней, если δ расположено между максимумом и минимумом; либо оно имеет N корней, если δ равно или максимуму, или минимуму (в этом критическом случае все максимальные (минимальные) значения правой части равны).

Приравнивая δ к максимуму, а затем к минимуму правой части (11.7.9), мы находим, что в критическом случае (μ, ω) принадлежит некоторым кривым K_1 и K_2 вида

$$\delta = \pm D\mu^{(N-2)/2} + o(\mu^{(N-2)/2}). \quad (11.7.11)$$

Из (11.7.10) следует, что эти кривые касаются прямой $\omega = \omega_0 - \mu\Omega_1/|L_1|$. Они ограничивают клин шириной $\sim 2D\mu^{(N-2)/2}$.

Уравнение (11.7.9) не имеет решений при значениях параметра вне этого клина, но оно имеет ровно $2N$ решений внутри него:

$$N\varphi + \gamma = 2\pi n + \arcsin(\delta/D\mu^{(N-2)/2}) + \dots \quad (11.7.12)$$

и

$$N\varphi + \gamma = 2\pi n + \pi - \arcsin(\delta/D\mu^{(N-2)/2}) + \dots \quad (11.7.13)$$

(при этом $n = 0, \dots, N-1$). Эти решения отвечают неподвижным точкам отображения (11.7.6). Поскольку N неподвижных точек отображения (11.7.6) отвечают одной орбите периода N , отображение внутри клина имеет ровно две орбиты периода N : одна орбита задана формулой (11.7.12), а вторая задана (11.7.13).

Дифференцируя (11.7.6) мы получаем мультипликаторы этих орбит:

$$\rho_1 = 1 - 2\mu N + o(\mu) < 1,$$

$$\rho_2 = 1 - \frac{AN^2}{|L_1|} \left(\sqrt{\frac{\mu}{|L_1|}} \right)^{N-2} \sqrt{L_1^2 + \Omega_1^2} \cos(N\varphi + \gamma) + o(\mu^{(N-2)/2}).$$

Таким образом, траектория (11.7.12) устойчива, в то время как траектория (11.7.13) имеет седловой тип.

Мы получили полное соответствие утверждениям теоремы 11.7.1. Случай $L_1 > 0$ рассматривается аналогично. ■

Отметим, что и седла и узлы, возникающие внутри резонансной зоны (иногда называемой «языком Арнольда»), лежат на инвариантной кривой (устойчивой, если $L_1 < 0$, и неустойчивой, если $L_1 > 0$). Поскольку единственной устойчивой инвариантной кривой, которая может проходить через седло, является его неустойчивое многообразие и поскольку единственной неустойчивой кривой, которая может проходить через седло, является его устойчивое многообразие, то внутри резонансной зоны инвариантной кривой служит объединение сепаратрис седел (неустойчивых сепаратрис, если $L_1 < 0$, или устойчивых сепаратрис, если $L_1 > 0$), которые оканчиваются в узлах⁷.

На кривых (11.7.11), которые ограничивают резонансную зону, седло и вторая периодическая орбита сливаются. В этом случае сепаратриса (притягивающая, если $L_1 > 0$, или отталкивающая, если $L_1 < 0$) каждой седловой точки стремится к соседней седловой точке, и вместе они составляют инвариантную кривую, как изображено на рис. 11.7.2 и 11.7.3. При выходе из резонанса все седловые точки исчезают; инвариантная кривая сохраняется, но число вращения больше не равно $2\pi M/N$.

Внутри резонансной зоны все траектории на инвариантном торе стремятся к устойчивой периодической орбите, и это означает, что здесь имеет место периодический режим. Вне клина на торе возникает либо квазипериодический режим, либо периодический с очень большим периодом. Оба «на практике» неотличимы. Таким образом, переход через границу резонансной зоны можно интерпретировать как переход от режима синхронизации к модуляциям. Объяснение этого явления впервые было дано Андроновым и Витом в рамках метода усреднения, когда они изучали задачу определе-

⁷Отметим, что возле каждой узловой точки инвариантная кривая совпадает с ее ведущим многообразием. Следовательно, инвариантная кривая, вообще говоря, имеет только конечную гладкость.

ния области синхронизации в уравнении Ван-дер-Поля с внешней силой:

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = \mu A \sin \omega t,$$

где $\mu \ll 1$ и $\omega_0 - \omega \sim \mu$ (более подробно см. параграф 12.1).

Когда μ возрастает, в резонансной зоне могут возникнуть другие периодические орбиты с таким же числом вращения M/N . В некоторых случаях граница резонансной области может в некоторых точках потерять гладкость, как в примере, показанном на рис. 11.7.4; здесь резонансная зона состоит из объединения двух областей D_1 и D_2 , отвечающих существованию одной или соответственно двух пар периодических орбит на торе. Точки C_1 и C_2 на рис. 11.7.4 отвечают бифуркации сборки. В точке S , отвечающей существованию пары седло-узловых периодических орбит, граница резонансной зоны негладкая.

Теорема 11.7.1 запрещает такое поведение, если μ мало. Однако величина надкритичности, после которой теорема уже не верна, различна для разных областей. Более того, она может стремиться к нулю, когда знаменатель N числа вращения увеличивается (т. е. когда число вращения становится иррациональным).

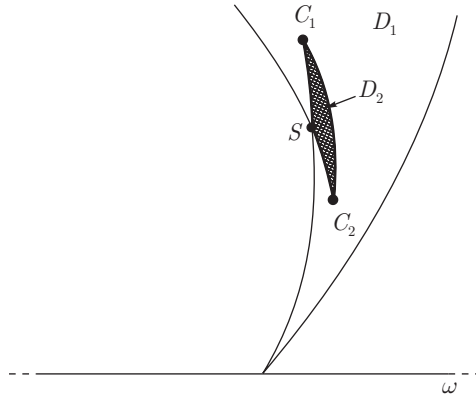


Рис. 11.7.4. Схема локальной структуры областей устойчивости периодических орбит вблизи границы резонансной зоны выше критического порога

На самом деле для числа периодических орбит, которые могут родиться из неподвижной точки гладкого отображения при данной бифуркации, не существует общей оценки сверху. Если гладкость r отображения конечна, отсутствие этой верхней оценки очевидно, поскольку из доказательства последней теоремы следует, что для подсчета числа периодических орбит

внутри резонансной зоны $\nu = M/N$ нужно привести отображение к нормальной форме, содержащей члены до $(N - 1)$ -го порядка. Для этого гладкость отображения должна быть не меньше, чем $(N - 1)$. Отсюда, если гладкость конечна, мы можем изучить только конечное число резонансных зон.

Следующая теорема дает аналогичный результат для отображений бесконечной гладкости.

Теорема 11.6. *Пусть гладкое отображение кольца имеет гладкую инвариантную кривую, и пусть число вращения на инвариантной кривой иррационально. Тогда произвольно малым возмущением можно породить бесконечное множество периодических орбит.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем на кольце в качестве координат угловую переменную φ и радиальную переменную R . Мы всегда можем выбрать координаты таким образом, что инвариантная кривая станет окружностью $R = 1$, то есть отображение принимает вид

$$\begin{aligned}\bar{R} &= (1 - R)F(R, \varphi), \\ \bar{\varphi} &= \varphi + g(\varphi) + (1 - R)G(R, \varphi) \mod 2\pi.\end{aligned}\tag{11.7.14}$$

Вложим это отображение в семейство

$$\begin{aligned}\bar{R} &= (1 - R)F(R, \varphi), \\ \bar{\varphi} &= \delta + \varphi + g(\varphi) + (1 - R)G(R, \varphi) \mod 2\pi,\end{aligned}\tag{11.7.15}$$

где δ — малый параметр. Поскольку окружность $R = 1$ остается инвариантной для всех δ , отображение на ней имеет вид

$$\bar{\varphi} = \delta + \varphi + g(\varphi) \mod 2\pi.\tag{11.7.16}$$

Поскольку число вращения иррационально при $\delta = 0$ и поскольку $\partial\bar{\varphi}/\partial\varphi > 0$, то (см. параграф 4.4) при $\delta = 0$ число вращения ν отображения (11.7.16) является строго монотонной функцией от δ . Это означает, что при изменении δ величина $\nu(\delta)$ принимает все значения, близкие к $\nu(0)$.

Выберем такое достаточно малое δ , что число вращения $\nu(\delta)$ иррационально и не слишком хорошо приближается рациональными числами. Мы воспользуемся следующим результатом Эрмана [68].

Если число вращения отображения окружности иррациональное и не слишком хорошо приближается рациональными числами, тогда существует гладкое преобразование переменных, которое приводит отображение к повороту на постоянный угол

$$\bar{\varphi} = \varphi + 2\pi\nu \mod 2\pi.$$

Если мы выполним также преобразование отображения (11.7.15) по переменной φ (не затрагивая R), то отображение в новых переменных примет вид

$$\begin{aligned}\bar{R} &= (1 - R)\tilde{F}(R, \varphi), \\ \bar{\varphi} &= 2\pi\nu + \varphi + (1 - R)\tilde{G}(R, \varphi) \pmod{2\pi}.\end{aligned}\tag{11.7.17}$$

Таким образом, малым возмущением исходного отображения (11.7.14) мы можем преобразовать (в некоторых новых переменных) отображение на инвариантной окружности в поворот на постоянный угол. Если мы слегка изменим значение ν в (11.7.17) так, что оно станет рациональным, $\nu = M/N$, то отображение на окружности $R = 1$ примет вид

$$\bar{\varphi} = \varphi + 2\pi M/N \pmod{2\pi}$$

и N -й итерацией этого отображения является

$$\bar{\varphi} = \varphi + 2\pi M \pmod{2\pi}.$$

Последнее — просто тождественное отображение, все точки которого являются неподвижными; т. е. здесь мы имеем бесконечное множество периодических орбит. Напомним, что (11.7.14) является малым возмущением исходного отображения, следовательно, теорема доказана. ■

Отметим, что если N -я итерация отображения окружности является тождественным отображением, то все точки на окружности являются негрубыми с мультипликатором, равным нулю. Более того, все ляпуновские величины каждой точки равны нулю. Это бесконечно вырожденный случай. В параграфе 11.3 мы нашли, что для исследования бифуркаций структурно неустойчивых периодических орбит с первыми $k - 1$ ляпуновскими величинами, равными нулю, необходимо рассмотреть семейства с по крайней мере k параметрами. Ясно, таким образом, что для изучения бифуркаций в данном случае необходимо ввести бесконечное множество параметров. Более того, из доказательства теоремы 11.5 понятно, что такие отображения можно получить малым возмущением произвольного отображения окружности с иррациональным числом вращения. Следовательно, мы можем заключить, что полное описание бифуркаций периодических траекторий отображений, близких к отображению окружности с иррациональным числом вращения, невозможно ни в каком конечнопараметрическом семействе.

Следовательно, бифуркация рождения инвариантного тора значительно отличается от других бифуркаций, рассмотренных в предыдущих параграфах. Здесь произвольно малая модификация конечнопараметрического семейства, проходящего через точку бифуркации, всегда может изме-

нить структуру бифуркационного множества. Кроме того, возрастание числа управляющих параметров только сделает бифуркацию еще более вырожденной: в семействах с двумя параметрами такими вырожденными точками являются сборки и точки «излома» на границах резонансных зон (см. рис. 11.7.4). В семействах с тремя параметрами появляются «ласточкины хвосты» и т. д.

В заключение обратим внимание на очевидную аналогию между бифуркацией рождения цикла из состояния равновесия и инвариантного тора из периодической орбиты. Мы можем пойти еще дальше и представить себе бифуркацию трехмерного тора из двумерного, четырехмерного тора из трехмерного и так далее. В принципе динамика системы с устойчивым состоянием равновесия может перестраиваться следующим образом: состояние равновесия при изменении параметра теряет устойчивость в надкритической ($L_1 < 0$) бифуркации Андронова–Хопфа, так что из нее возникает устойчивая периодическая орбита, т. е. стационарный режим заменяется периодическим. Затем при дальнейшем изменении параметра периодическая орбита вновь теряет устойчивость и возникает двухчастотный режим (квазипериодическая траектория на двумерном торе), который в свою очередь передает устойчивость трехчастотному режиму и так далее. Некоторое время назад такой сценарий постепенного усложнения динамики (сценарий Ландау–Хопфа) предлагался в качестве возможного механизма развития турбулентности, когда развитый турбулентный режим рассматривается как квазипериодический с огромным множеством независимых частот. Однако такая последовательность бифуркаций далеко не типична. Редкость ее можно объяснить тем, что состояние равновесия и периодическая орбита, участвующие в этом бифуркационном сценарии, представляют собой изолированные траектории, но для инвариантного тора это уже не так. Например, в резонансной зоне на торе имеются по крайней мере две периодические орбиты: седлового типа и устойчивая орбита. Для рождения трехмерного тора эти две орбиты должны пробифурцировать одновременно, а для этого нужны какие-то дополнительные специальные условия.

На самом деле подобная бифуркационная цепочка, как правило, заканчивается на двух- (реже трех-) частотном режиме, который при изменении параметра переходит в хаотический с непрерывным частотным спектром. В фазовом пространстве рождение хаоса проходит следующие стадии [7]: инвариантная кривая отображения Пуанкаре сначала становится негладкой, а затем «разрушается» (см. рис. 11.7.5. Разрушение кривой сопровождается появлением гомоклинических траекторий, т. е. пересечением устойчивых и неустойчивых многообразий седловой периодической орбиты). Как только инвариантная кривая разрушается, ее место занимает нетривиаль-

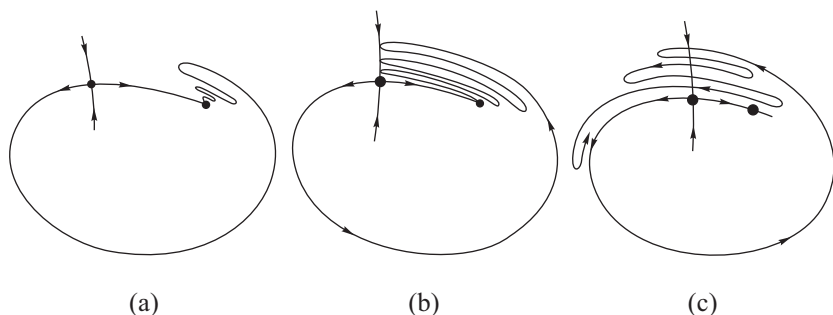


Рис. 11.7.5. Типичный сценарий разрушения двухмерного тора через потерю гладкости

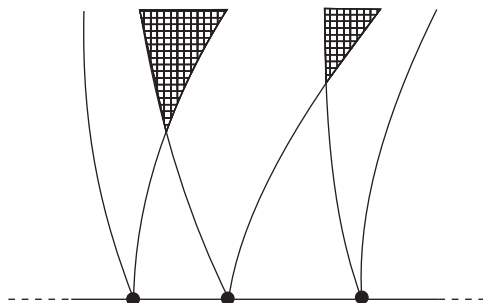


Рис. 11.7.6. Когда μ увеличивается до конечных значений, резонансные зоны могут пересекаться (рис. 11.7.1)

ное множество, содержащее счетное число периодических орбит с числами вращения в пределах некоторого интервала. На плоскости параметров это происходит внутри областей пересечения резонансных зон, как это показано на рис. 11.7.6. Заметим, что в нерезонансном случае или в случае слабого резонанса пересечение резонансных зон происходит при конечных значениях надкритичности, т. е. довольно далеко от первичной бифуркации тора. С другой стороны, пересечение резонансных зон может произойти вблизи сильных резонансов $\omega_0 = 2\pi/3$ и $\omega_0 = \pi/2$ сразу же после бифуркации тора, т. е. резонансные зоны могут пересекаться даже при произвольно малом μ .

ГЛАВА 12

Глобальные бифуркации при исчезновении седло-узловых состояний равновесия и периодических орбит

Мы уже упоминали, что задачи, касающиеся потери устойчивости периодических орбит в автономных системах, не всегда можно свести к изучению бифуркаций неподвижных точек отображения Пуанкаре. Может случиться, что периодическая орбита на границе устойчивости не существует и, следовательно, отображение Пуанкаре не определено при критическом значении параметра.

Чтобы изучить эти бифуркации, надо понять структуру предельного множества, в которое превращается периодическая орбита при приближении к границе устойчивости. В частности, таким предельным множеством может быть гомоклиническая петля к седлу или к состоянию равновесия типа седло-узел. При другом сценарии (называемом «катастрофа голубого неба») периодическая орбита стремится к множеству, состоящему из гомоклинических орбит к седло-узловой периодической орбите. Отметим, что мы не ограничиваемся задачами на границах устойчивости периодических орбит, но также рассматриваем рождение инвариантных двумерных торов и бутылок Клейна и кратко исследуем возникновение хаоса.

12.1. Бифуркации гомоклинической петли к состоянию равновесия типа седло-узел

Рассмотрим однопараметрическое семейство $\mathbb{C}^r$ -гладких ($r \geq 2$) динамических систем в $\mathbb{R}^{n+1}$ ($n \geq 1$). Предположим, что, когда параметр обращается в нуль, система обладает негрубым состоянием равновесия в начале координат с одним характеристическим показателем, равным нулю, и остальными n показателями слева от мнимой оси. Мы предполагаем также, что состояние равновесия является простым седло-узлом, а именно первая ляпуновская величина l_2 отлична от нуля (см. параграф 11.2). Без потери общности мы полагаем, что $l_2 > 0$.

Мы также полагаем, что семейство трансверсально к поверхности систем с простым седло-узлом. Следовательно, вблизи начала координат такая система записывается как

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu + l_2 x^2 + G(x, \mu), \\ \dot{y} &= [A + h(x, y, \mu)]y,\end{aligned}\tag{12.1.1}$$

(см. параграф 11.2, формулы (11.2.2) и (11.2.12)), где μ — скалярный параметр, $x \in \mathbb{R}^1$, $y \in \mathbb{R}^n$. При этом $G = o(x^2)$ — функция класса $\mathbb{C}^r$ по x и класса $\mathbb{C}^{r-1}$ по μ ; h — $\mathbb{C}^{r-1}$ -гладкая функция, обращающаяся в нуль при $(x = 0, y = 0, \mu = 0)$; характеристические числа матрицы A лежат строго слева от мнимой оси.

Из параграфа 11.2 вспомним, что при $\mu = 0$ окрестность начала координат системы (12.1.1) разбивается неведущим многообразием W^{ss} , которое локально определено уравнением $x = 0$, на две области (узловую и седловую). Все траектории в узловой области стремятся к точке O при $t \rightarrow +\infty$. Все траектории, за исключением одной, в седловой области покидают окрестность начала координат при $t \rightarrow \pm\infty$. Единственной траекторией, которая входит в O при $t \rightarrow -\infty$, является неустойчивая сепаратриса Γ . Когда t растет, Γ также покидает окрестность O .

Предположим, что с ростом t сепаратриса Γ возвращается в окрестность седло-узла O со стороны узловой области, как показано на рис. 12.1.1 (b).

Из этого следует, что Γ стремится к O двоякоасимптотически, т. е. при $t \rightarrow \pm\infty$. Другими словами, Γ является гомоклинической траекторией к O . Объединение $\Gamma \cup O$ есть замкнутая кривая, которая называется гомоклинической петлей седло-узла.

Нижe мы покажем, что можно выбрать такую малую окрестность V гомоклинической петли, что при всех малых μ траектории, начинающиеся в V , остаются в ней навсегда. Более того, при $\mu = 0$ все траектории из V входят в узловую область, когда t возрастает, а в пределе $t \rightarrow +\infty$ они стремятся к седло-узлу.

Когда $\mu < 0$, седло-узел распадается на седло $O_1(x = x^+(\mu), y = 0)$ и узел $O_2(x = x^-(\mu), y = 0)$, где $x^\pm \sim \pm\sqrt{|\mu|/l_2}$ (см. параграф 11.2). Устойчивое инвариантное многообразие $W_{O_1}^s$ седла локально задается уравнением $x = x^+$. Неустойчивое многообразие $W_{O_1}^u$ локально определено уравнением $y = 0$. Точка O_1 делит неустойчивое многообразие на две сепаратрисы, одна из которых целиком лежит в окрестности начала координат (она является сегментом оси $y = 0$, которая соединяет точки O_1 и O_2). Другая сепаратриса выходит из окрестности. В силу непрерывной зависимости

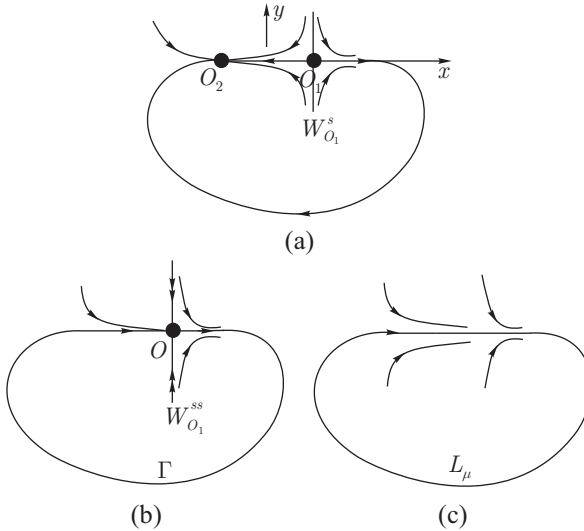


Рис. 12.1.1. Бифуркационная последовательность для седло-узловое состояние равновесия с гомоклинической траекторией: (а) до, (б) в момент и (с) после бифуркации

от параметров сепаратриса следует вдоль петли Γ и возвращается к началу координат со стороны узла O_2 . Ясно, что все траектории в V , отличные от находящихся в устойчивом многообразии $W_{O_1}^s$ седла O_1 , стремятся к O_2 , как показано на рис. 12.1.1 (а). Поведение траектории при $\mu > 0$ описывается следующей теоремой.

Теорема 12.1. *Исчезновение седло-узловое состояния равновесия с гомоклинической петлей приводит к появлению устойчивой периодической орбиты L_μ с периодом, равным $\sim \pi/\sqrt{\mu l_2}$, которая притягивает все траектории из V (см. рис. 12.1.1 (с)).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим две секущие (рис. 12.1.2), трансверсальные к траекториям системы

$$S_0 : x = -d, \quad \|y\| \leq d,$$

и

$$S_1 : x = d, \quad \|y\| \leq d,$$

где d выбирается произвольно малым так, чтобы при $\mu = 0$ сепаратриса Γ , возвращаясь к точке O , пересекала бы S_0 (этого всегда можно добиться, потому что Γ входит O , касаясь оси $y = 0$).

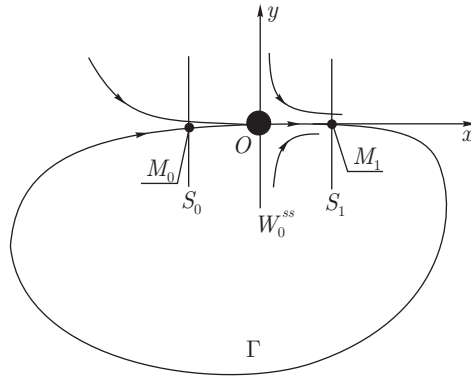


Рис. 12.1.2. Две секущие S_0 и S_1 к гомоклинической петле Γ выбираются близи седло-узла O

По непрерывности, все траектории, начинающиеся на S_1 достаточно близко к точке $M_1(x = d, y = 0)$, в которой Γ пересекает S_1 , возвращаются в окрестность начала координат и попадают в S_0 вблизи точки $M_0 = \Gamma \cap S_0$. Выберем малое $\delta > 0$ и построим трубку V_1 , состоящую из кусков траекторий, которые стартуют на S_1 при $|y| \leq \delta$ и оканчиваются в S_0 . Рассмотрим множество V , состоящее из V_1 и усеченного конуса V_0 , ограниченного поверхностями S_0 , $S_1 \cap \{\|y\| \leq \delta\}$ и $\{|x| \leq d, \|y\| = d - (x + d)(d - \delta)/2d\}$, как показано на рис. 12.1.3. Мы будем полагать, что координаты y введены таким образом, что матрица A в (12.1.1) имеет жорданову форму и, кроме того, недиагональные элементы, если они есть, достаточно малы. Если d мало, то функция h в (12.1.1) также достаточно мала всюду в V_0 . Отсюда для траекторий в V_0 верна следующая оценка:

$$\frac{d}{dt} \|y(t)\| \leq -\lambda \|y(t)\|, \quad (12.1.2)$$

где $0 < \lambda < \max |\operatorname{Re} \lambda_j|$, а $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — характеристические числа матрицы A (см. теорему 2.4). Используя (12.1.2), можно показать, что если δ достаточно мало, то для всех малых μ векторное поле системы (12.1.1) всюду на границе V_0 ориентировано либо внутрь V_0 , либо внутрь V_1 (на S_1). Поскольку V_1 состоит из целых траекторий, векторное поле системы всюду касательно к границе множества V_1 . Таким образом, в каждой точке на границе векторное поле либо касается границы, либо направлено внутрь V . Отсюда все траектории, начинающиеся вблизи V , должны входить в V и никогда не покидать ее.

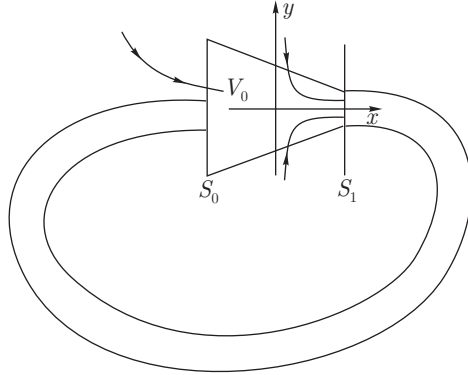


Рис. 12.1.3. В результате сильного сжатия вдоль W^{ss} (т.е. по y) при всех малых μ траектории вблизи седло-узла покидают усеченный конус V_0 через секущую S_1 . Поэтому положительные полутраектории не могут покинуть объединение V_0 и трубки V_1 (составленной из целых кусков орбит, начинающихся на S_1)

Производная $\dot{x}$ при $\mu > 0$ нигде в V_0 не обращается в нуль. Следовательно, любая траектория, которая начинается на S_0 , непременно достигает S_1 при увеличении времени. Затем она входит в трубку V_1 и возвращается к V_0 . Следовательно, при всех малых $\mu > 0$ определено отображение $T: S_0 \rightarrow S_0$; это отображение является суперпозицией двух отображений вдоль траекторий системы: $T_0: S_0 \rightarrow S_1$ и $T_1: S_1 \rightarrow S_0$. Мы будем называть T_0 *локальным отображением*, а T_1 — *глобальным отображением*.

Пусть y_0 обозначает координаты на S_0 , и y_1 обозначает координаты на S_1 . Очевидно, что глобальное отображение определено при всех (не обязательно положительных) малых μ . Поскольку время перехода из S_1 в S_0 ограничено, производная от $T_1 y_1$ по y_1 остается ограниченной при всех малых μ .

Докажем, что локальное отображение является сжимающим и что сжатие становится неограниченно сильным при $\mu \rightarrow 0$. Пусть $\{x(t; \mu), y(t; y_0, \mu)\}$ — траектории системы (12.1.1), проходящие через точку $(x = -d, y_0)$ на S_0 при $t = 0$. Отметим, что, поскольку $\dot{x}$ в (12.1.1) не зависит от y , следовательно, $x(t, \mu)$ также не зависит от y_0 . Поэтому время перехода t^* из S_0 в S_1 определено условием

$$x(t^*; \mu) = d, \quad (12.1.3)$$

т.е. является функцией только от μ . При $\mu = 0$ любая траектория, начинающаяся на S_0 , стремится к седло-узлу, т.е. она остается в V_0 бесконечно долго. Отсюда $t^*(\mu)$ при $\mu \rightarrow +0$ стремится к бесконечности.

Для получения более точной оценки на t^* отметим, что из (12.1.1) и (12.1.3) следует, что

$$t^* = \int_{-d}^{+d} \frac{dx}{\mu + l_2 x^2 + o(x^2)},$$

откуда

$$t^*(\mu) = \pi/\sqrt{\mu l_2} + o(1/\sqrt{\mu}). \quad (12.1.4)$$

Отображение T_0 задается формулой

$$T_0 : y \mapsto y(t^*(\mu); y_0, \mu). \quad (12.1.5)$$

Докажем, что

$$\left\| \frac{\partial y}{\partial y_0} \right\| \leq e^{-\lambda t^*}. \quad (12.1.6)$$

Действительно, дифференцируя (12.1.1), находим, что

$$\frac{\partial \dot{y}(t)}{\partial y_0} = [A + h(x(y), y(t), \mu) + h'_y(x(t), y(t), \mu)y(t)] \frac{\partial y(t)}{\partial y_0}.$$

Поскольку h и $h'_y y$ малы всюду в V_0 и поскольку A имеет жорданову форму с малыми диагональными членами, мы имеем оценку, аналогичную (12.1.2):

$$\frac{d}{dt} \left\| \frac{\partial y}{\partial y_0} \right\| \leq -\lambda \left\| \frac{\partial y}{\partial y_0} \right\|.$$

Проинтегрировав последнее неравенство, мы находим

$$\left\| \frac{\partial y}{\partial y_0} \right\| \leq e^{-\lambda t} \left\| \frac{\partial y}{\partial y_0} \right\|_{t=0}$$

или, поскольку $(\partial y / \partial y_0)|_{t=0}$ — единичная матрица:

$$\left\| \frac{\partial y}{\partial y_0} \right\| \leq e^{-\lambda t}.$$

Подставляя $t = t^*(\mu)$, мы получаем неравенство (12.1.6) для отображения (12.1.5). Так как $t^* \rightarrow \infty$ при $\mu \rightarrow 0$, это неравенство означает, что отображение T_0 является сильно сжимающим, если μ мало.

Поскольку сжатие в локальном отображении можно сделать произвольно сильным, а производная глобального отображения ограничена, суперпозиция $T = T_0 \circ T_1$ наследует сжатие локального отображения при всех малых μ . Из банахова принципа сжимающих отображений следует (параграф 3.15), что отображение T имеет единственную устойчивую неподвижную точку на S_0 . Так как это отображение задано траекториями системы, то система имеет устойчивую периодическую орбиту в V , которая притягивает все траектории в V . Период этой орбиты равен сумме двух времен: время t^* локального перехода от S_0 к S_1 плюс время перехода от S_1 к S_0 . Последнее всегда конечно при всех малых μ . Из (12.1.4) теперь следует, что период устойчивой периодической орбиты возрастает асимптотически как $\sim \pi/\sqrt{\mu l_2}$. ■

Доказательство теоремы 12.1 также применимо к случаю вырожденно-го седло-узла¹: действительно, нигде в доказательстве мы не использовали $l_2 \neq 0$. Единственным свойством, применяемым здесь, является то, что при приближении к границе устойчивости время перехода от одной секции к другой неограниченно возрастает; это следует из того, что на самой границе траектории, начинающиеся на S_0 , стремятся к седло-узлу и, следовательно, должны оставаться внутри V_0 бесконечно долго. Бифуркационная диаграмма для вырожденного седло-узла с гомоклинической петлей такая же, что и для локальных бифуркаций (например, в случае когда $l_4 \neq 0$, это *ласточкин хвост*, как показано на рис. 11.2.1), но в области D_0 возникает устойчивая периодическая орбита.

Бифуркация предельного цикла от гомоклинической петли к седло-узлу была впервые обнаружена Андроновым и Виттом при изучении уравнения Ван-дер-Поля с малой периодической силой при резонансе 1 : 1:

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = \mu A \sin \omega t, \quad (12.1.7)$$

где $\mu \ll 1$ и $|\omega_0 - \omega| \sim \mu$ (при $\mu = 0$ это уравнение описывает гармонические колебания с частотой ω_0 ; при нулевой расстройке частоты мы имеем точный резонанс 1 : 1). В полярных координатах ($R \cos \varphi = \omega_0 x$, $R \sin \varphi = \dot{x}$) уравнение (12.1.7) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{R} &= \mu \sin \varphi (A \sin \omega t - R(1 - R^2 \cos^2 \varphi / \omega_0^2) \sin \varphi), \\ \dot{\varphi} &= -\omega_0 + \mu \cos \varphi \left(\frac{A}{R} \sin \omega t - (1 - R^2 \cos^2 \varphi / \omega_0^2) \sin \varphi \right). \end{aligned}$$

¹Асимптотика для периода цикла будет в этом случае другой и будет включать зависимость не от одного, а от многих бифуркационных параметров.

Пусть $\Phi = \varphi + \omega t$. Тогда после замены переменной времени $t \rightarrow t/\mu$ мы получаем

$$\begin{aligned}\dot{R} &= \frac{A}{2} \cos(\Phi - 2\omega t/\mu) - \frac{A}{2} \cos \Phi - \\ &\quad - R \left(1 - \frac{R^2}{\omega_0^2} \cos^2(\Phi - \omega t/\mu) \right) \sin^2(\Phi - \omega t/\mu), \\ \dot{\Phi} &= -\delta + \frac{A}{2R} \sin \Phi - \frac{A}{2R} \sin(\Phi - 2\omega t/\mu) - \\ &\quad - \left(1 - \frac{R^2}{\omega_0^2} \cos^2(\Phi - \omega t/\mu) \right) \sin(\Phi - \omega t/\mu) \cos(\Phi - \omega t/\mu),\end{aligned}\tag{12.1.8}$$

где $\delta = (\omega_0 - \omega)/\mu$ — это расстройка частоты, отнормированная на малый параметр.

Андронов и Витт рассматривали усредненную систему

$$\begin{aligned}\dot{R} &= -\frac{A}{2} \cos \Phi - \frac{R}{2} \left(1 - \frac{R^2}{4\omega_0^2} \right), \\ \dot{\Phi} &= -\delta + \frac{A}{2R} \sin \Phi,\end{aligned}\tag{12.1.9}$$

которая получается из (12.1.8) при замещении быстрых колебательных членов (с частотой $\geq \omega/\mu$) их усредненными величинами. Когда $A = 0$, эта система анализируется легко: она имеет отталкивающее состояние равновесия в начале координат, и все траектории стремятся к устойчивому предельному циклу $R = 2\omega_0$; при $\delta = 0$ предельный цикл вырождается в единственную инвариантную окружность, плотно заполненную состояниями равновесия. При малых $A > 0$ отталкивающее состояние равновесия сохраняется, в то время как на окружности из всех точек равновесия остается только две: это седло и узел, обе существуют при $D: 4|\delta|\omega_0 < A$. Раскладывая в ряд по степеням A , можно доказать, что при малых A система по-прежнему имеет инвариантную кривую, окружающую начало координат; вне резонансной зоны D инвариантная кривая является предельным циклом; внутри D она состоит из сепаратрис седла, которые примыкают к устойчивому узлу. На границе зоны D система обладает седло-узлом с петлей сепаратрисы.

В исходных координатах $\varphi = \Phi - \omega t$ стационарное значение Φ (состояние равновесия системы (12.1.9)) соответствует колебательному режиму с той же частотой, что и у внешней силы. Периодические колебания Φ (предельный цикл в (12.1.9)) соответствуют двухчастотному режиму. Таким

образом, данный механизм бифуркации предельного цикла из гомоклинической петли к седло-узлу описывает соответствующий переход от синхронизации к пульсирующим модуляциям в уравнении (12.1.7).

Обобщение этой бифуркации для систем второго порядка было изучено Андроновым и Леонтович. Их доказательство существенно использует свойства систем на плоскости. Наше доказательство теоремы 12.1 близко к предложенному Шильниковым в [130] для многомерного случая с той разницей, что мы упростили вычисления при помощи редукции системы вблизи начала координат к виду (12.1.1).

Отметим, что теорема 12.1 остается верной и для случая, когда сепаратриса входит в край узловой области, т.е. $\Gamma \subset W^{ss}$. Однако полный анализ бифуркации в этом случае требует дополнительного бифуркационного параметра. Он вводится следующим образом. Построим секущую S_0 к гомоклинической петле Γ , т.е. определим $S_0 = \{\|y\| = d, |x| \leq d/2\}$, как изображено на рис. 12.1.4. В момент бифуркации сепаратриса Γ пересекает S_0 в некоторой точке $M_0 \in W^{ss}$. Таким образом, для любой близкой системы глобальное отображение T_1 задано траекториями, которые начинаются из $S_1 : \{x = d, \|y\| \leq \delta\}$ и пересекают S_0 вблизи M_0 . Пусть ε — x -координата точки $M_\varepsilon = T_1(y_1 = 0)$ на секущей S_0 . Мы будем рассматривать ε как дополнительный бифуркационный параметр. Очевидно, что при $\mu = 0$, когда все еще существует седло-узел, точка M_ε является пересечением сепаратрисы Γ с S_0 . Таким образом, $\varepsilon = 0$ соответствует входящей в край гомоклинической петле; при $\varepsilon < 0$ сепаратриса входит в узловую область и гомоклиническая петля сохраняется, как показано на рис. 12.1.5.

Как и ранее, параметр μ управляет локальными бифуркациями седло-узла O : при $\mu > 0$ он исчезает, в то время как при $\mu < 0$ он распадается на седло $O_1(\mu, \varepsilon)$ и узел $O_2(\mu, \varepsilon)$.

Как и в теореме 12.2, можно легко построить малую окрестность V гомоклинической петли $\Gamma \cup O$ такую, что для всех малых μ и ε положительные полутраектории любой точки из V остаются там навсегда.

Теорема 12.2 (Лукьянов [88]). *На (ε, μ) -плоскости в области $\mu < 0$ лежит кривая $\varepsilon = h_{hom}(\mu) \sim \sqrt{|\mu|/l_2}$, которая отвечает существованию гомоклинической петли к седлу O_1 . В области $\{\mu > 0\} \cup \{\varepsilon > h_{hom}(\mu)\}$ система имеет единственную устойчивую периодическую орбиту L . При $t \rightarrow +\infty$ траектории в V , которые не стремятся к точкам равновесия, стремятся к L (см. бифуркационную диаграмму на рис. 12.1.6).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в теореме 12.2, задача сводится к изучению отображения $T = T_1 \circ T_0$, где $T_1 : S_1 \rightarrow S_0$ — глобальное отображение, а T_0 — локальное отображение. Отображение T_0 при $\mu > 0$ задано во всех

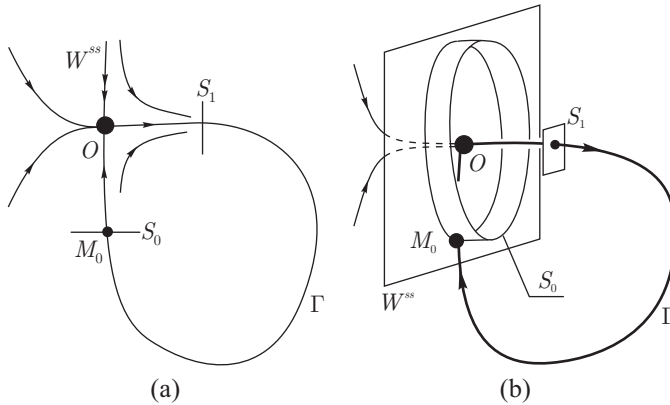


Рис. 12.1.4. Выбор секущей к нетрансверсальной гомоклинической петле Γ в двумерном (а) и многомерном (б) случаях

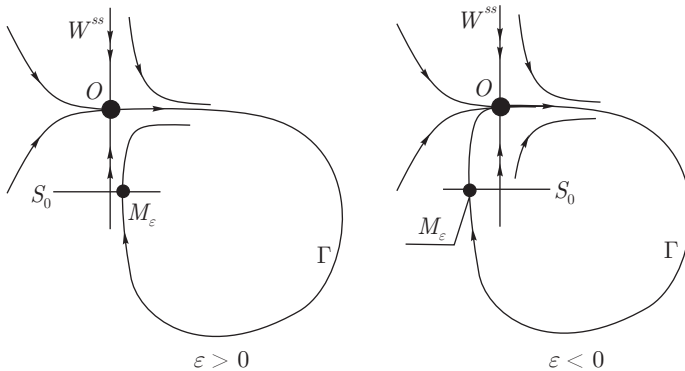


Рис. 12.1.5. Поведение неустойчивой сепаратрисы до ($\varepsilon < 0$) и после ($\varepsilon > 0$) бифуркации сепаратрис, входящей в край

точках S_0 ; легко видеть, что при $\mu \leq 0$ локальное отображение задано при $x > x^+(\mu, \varepsilon)$ (траектории, начинающиеся при $x = x^+$, лежат в устойчивом многообразии O_1 , а начинающиеся при $x < x^+$ стремятся к O_2 ; напомним, что $x^+(\mu, \varepsilon)$ — координата седла O_1).

Докажем, что отображение T_0 является сильно сжимающим. Действительно, представим систему (12.1.1) в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A + h(x, y, \mu, \varepsilon)}{g(x, \mu, \varepsilon)} y, \quad (12.1.10)$$

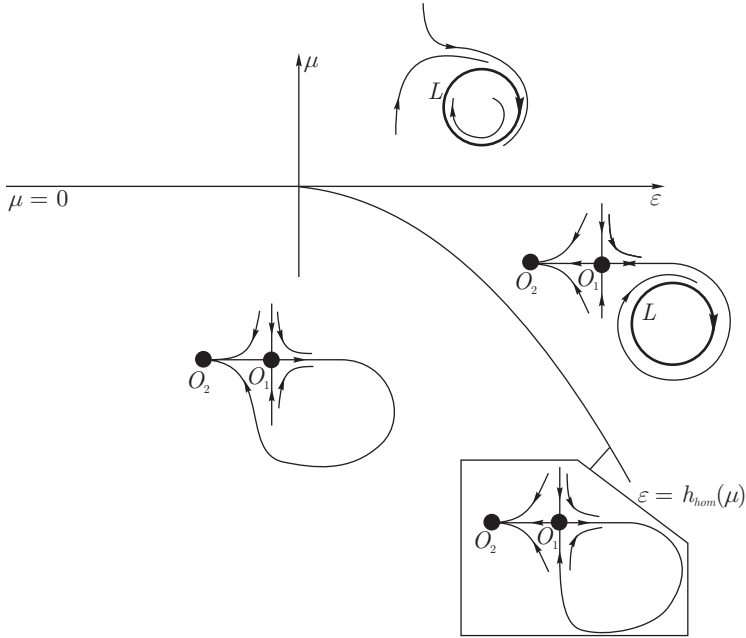


Рис. 12.1.6. Бифуркационная диаграмма для входящей в край гомоклинической петли к седло-узловому состоянию равновесия

где мы обозначаем

$$\dot{x} = g(x, \mu, \varepsilon). \quad (12.1.11)$$

Очевидно, что $g > 0$ при $\mu > 0$ или при $x > x^+$, следовательно, (12.1.10) определена в нужной нам области. Пусть $y(x; x_0, y_0, \mu, \varepsilon)$ — траектория (12.1.10), которая начинается с $y = y_0$ при $x = x_0$. Мы должны доказать, что $\frac{\partial y}{\partial(x_0, y_0)}$ мало при $x = d$, при условии, что μ и x_0 малы.

Обозначим $u = \frac{\partial y}{\partial(x_0, y_0)}$. Дифференцируя (12.1.10), мы имеем

$$\frac{du}{dx} = \frac{A + h + h'_y y}{g} u$$

ИЛИ

$$\frac{d}{dx} \|u\| \leq -\frac{\lambda}{g} \|u\|$$

(мы используем тот факт, что спектр A лежит слева от мнимой оси и что h и y малы). В итоге

$$\|u\| \leq e^{-\lambda \int_{x_0}^x \frac{ds}{g(s, \mu, \varepsilon)}} = e^{-\lambda t^*(x_0, x; \mu, \varepsilon)},$$

где t^* — время перехода от x_0 к x в (12.1.11). Для фиксированного $x = d$ это время, очевидно, стремится к бесконечности при $\mu \rightarrow 0$, $x_0 \rightarrow 0$. Таким образом, $\frac{\partial y}{\partial(x_0, y_0)} \rightarrow 0$. Это означает, что T_0 действительно является сильно сжимающим.

Как и ранее, так как T_0 является сильно сжимающим, то отображение $T = T_1 \circ T_0$ также сильно сжимающее. Когда $\mu > 0$, отображение T определено всюду на S_0 . Таким образом, из принципа сжимающих отображений следует, что у отображения T есть единственная неподвижная точка. Неподвижная точка отображения T соответствует периодической орбите системы, что дает утверждение теоремы при $\mu > 0$. В случае $\mu \geq 0$ заметим, что, когда точка $M \in S_0$ приближается к Σ со стороны $x > x^+$, образ TM стремится к точке M_ε (точке пересечения сепаратрисы O_1 с S_0). Соответственно, по непрерывности, мы можем считать, что образом поверхности Σ под действием отображения T является единственная точка M_ε .

Эта ситуация полностью аналогична той, которая возникает при изучении гомоклинической петли к седлу, которая подробно рассматривается в параграфе 13.4. В нем (лемма 13.4.1) мы доказываем, что сжимающее отображение рассматриваемого типа имеет устойчивую неподвижную точку, тогда и только тогда, когда единственная точка образа границы области определения лежит внутри этой области. Следовательно, наша система имеет устойчивую периодическую орбиту тогда и только тогда, когда точка M_ε лежит в области $x > x^+$.

Мы нашли, что область существования устойчивой периодической орбиты задается условием $\varepsilon > x^+(\mu, \varepsilon)$, которое, очевидно, можно записать в виде $\varepsilon > h_{hom}(\mu)$, где гладкая функция h_{hom} ведет себя асимптотически как $\sqrt{|\mu|/l_2}$. Граница области отвечает точке M_ε на Σ , т. е. гомоклинической петле к O_1 . ■

ЗАМЕЧАНИЕ. Эта теорема остается верна (с очевидными модификациями) также и в случае вырожденного седло-узла. В этом случае μ является вектором параметров (размерности, равной количеству нулевых ляпуновских величин, плюс один), и, как и ранее, вводится дополнительный бифуркационный параметр ε . Устойчивая периодическая орбита существует, когда исчезает седло-узел (в области $\mu \in D_0$, согласно нашим обозначениям) или когда $\varepsilon > h_{hom}(\mu)$ при $\mu \notin D_0$. В этом случае поверхность $\varepsilon = h_{hom}(\mu)$ отвечает гомоклинической петле крайнего седлового состояния равновесия O_1 , как показано на рис. 12.1.7.

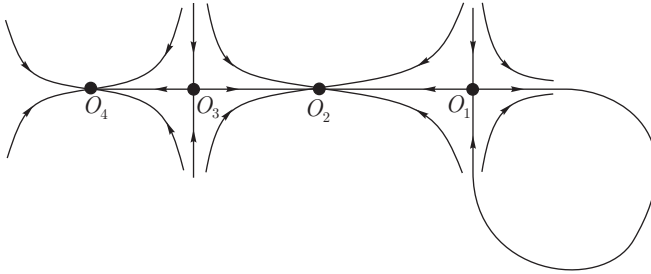


Рис. 12.1.7. Граница области устойчивости периодической орбиты, рождающейся при бифуркации входящей в край гомоклинической петли к вырожденному седло-узлу, отвечает гомоклинической петле крайнего седлового состояния равновесия O_1

12.2. Рождение инвариантного тора

Рассмотрим однопараметрическое семейство n -мерных C^r -гладких ($r \geq 2$) систем, имеющих седло-узловую периодическую орбиту L при $\mu = 0$. Мы предполагаем, что μ является управляющим параметром локальной бифуркации. Таким образом (см. рис. 11.3.7), при $\mu < 0$ существует устойчивая и седловая периодические орбиты, которые сливаются в одну орбиту L при $\mu = 0$. Локальное неустойчивое многообразие $W_{L,loc}^u$ гомеоморфно полуцилиндру $\mathbb{R}^+ \times S^1$. Орбита L также имеет сильно устойчивое многообразие W_L^{ss} , которое разделяет окрестность L на седловую и узловую области. Когда $\mu > 0$, седло-узел исчезает и все орбиты покидают его малую окрестность. Отметим, что время, необходимое для прохождения через окрестность, стремится к бесконечности при $\mu \rightarrow +0$.

Нашим постоянным предположением является то, что *при $\mu = 0$ все траектории в W_L^u возвращаются в узловую область² и стремятся к L при $t \rightarrow +\infty$* . Таким образом, W_L^u компактно (оно, по определению, содержит L). Пусть U — малая окрестность W_L^u . Очевидно, что при $\mu = 0$ все траектории в U стремятся к L при $t \rightarrow +\infty$. Когда $\mu < 0$, все траектории в U стремятся к одной из устойчивых периодических орбит, появляющихся при распаде L . Нас интересует, что происходит в U , когда $\mu > 0$.

Как уже упоминалось, задачи такой природы возникли в 20-х годах в связи с явлением перехода от синхронизации к режимам амплитудной модуляции. Строгое изучение этой бифуркации было начато в [3] в предположении, что динамическая система с седло-узлом либо неавтономна и периодически зависит от времени, либо автономна, но обладает глобальной

²В частности, $W_L^u \cap W_L^{ss} = \emptyset$.

секущей (по крайней мере в рассматриваемой части фазового пространства). Таким образом, задача была сведена к исследованию однопараметрического семейства $\mathbb{C}^r$ -диффеоморфизмов ($r \geq 2$) секущей, которое имеет при $\mu = 0$ неподвижную точку O типа седло-узел, такую что все орбиты неустойчивого многообразия седло-узла возвращаются к нему, когда число итераций стремится к $+\infty$ (см. рис. 12.2.1 (a) и (b)).

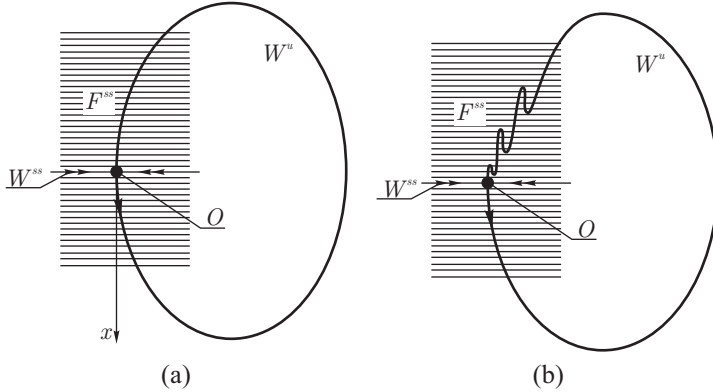


Рис. 12.2.1. Неустойчивое множество W^u седло-узловой неподвижной точки может быть гладкой кривой (a) или негладкой кривой (b). В последнем случае касательный вектор осциллирует, когда точка на W^u приближается к O со стороны узловой области

Напомним, что неподвижная точка или периодическая орбита типа седло-узел имеет один мультипликатор, равный $+1$, а другие мультипликаторы лежат внутри единичной окружности. Диффеоморфизм (отображение Пуанкаре) вблизи неподвижной точки может быть представлен в стандартном виде:

$$\begin{aligned}\bar{y} &= [A + h(x, y, \mu)]y, \\ \bar{x} &= x + g(x, \mu),\end{aligned}\tag{12.2.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^1$, $y \in \mathbb{R}^{n-2}$, A — матрица, характеристические числа которой лежат строго внутри единичной окружности, и

$$h(0, 0, 0) = 0, \quad g(0, 0) = 0, \quad g'_x(0, \mu) = 0.$$

При этом центральное многообразие W^C задается уравнением $y = 0$. Поверхности $\{x = \text{const}\}$ являются слоями сильно устойчивого инвариантного слоя $\mathcal{F}^{ss}$. В частности, $x = 0$ есть уравнение сильно устойчивого

многообразия O . При $\mu = 0$ функция g (нелинейная часть отображения на W^C) имеет строгий экстремум при $x = 0$. Для большей определенности мы полагаем, что это минимум, т. е. $g(x, 0) > 0$, когда $x \neq 0$. Таким образом, седловая область на секущей соответствует $x > 0$, а узловая область соответствует $x < 0$. Так как седло-узел исчезает, когда $\mu > 0$, то $g(x, \mu) > 0$ при всех достаточно малых x и всех малых положительных μ .

Седло-узел является простым, если $g''_{xx}(0, 0) \neq 0$. В этом случае второе уравнение (12.2.1) можно записать в виде

$$\bar{x} = x + \mu + l_2 x^2 + \dots, \quad (12.2.2)$$

где $l_2 = g''(0)/2 \neq 0 > 0$.

По условию, глобальное неустойчивое многообразие возвращается в узловую область, т. е. оно образует замкнутую инвариантную кривую. Эта кривая гладкая везде, кроме, возможно, точки O . Действительно, поскольку скорость сжатия по направлению x в узловой области меньше экспоненциальной, оно гораздо слабее, чем сжатие в y -направлении. Следовательно, любая часть кривой, трансверсальная к сильно устойчивому слоению, при итерациях вперед становится касательной к $y = 0$, когда она входит в точку O . В то же время, если инвариантная кривая касается слоя сильно устойчивого слоения в некоторой точке, она останется касательной к слоению при всех итерациях этой точки (потому что слоение инвариантное). В этом случае произвольно близко к O инвариантная кривая будет иметь точки, где угол между касательной к кривой и направлением $y = 0$ останется отделенным от нуля. Таким образом, *глобальное неустойчивое многообразие W^u_O является гладким всюду (включая O), если оно трансверсально сильно устойчивому слоению в узловой области, как изображено на рис. 12.2.1(a), но оно будет не гладким в точке O , если оно касается сильно устойчивого слоения в точках некоторой орбиты, как изображено на рис. 12.2.1(b).*

Гладкий случай соответствует, в частности, малым периодическим по времени возмущениям автономной системы, имеющей гомоклиническую петлю к состоянию равновесия типа седло-узел (см. предыдущий параграф). Действительно, для отображения сдвига на постоянное время по орбитам автономной системы состояние равновесия становится неподвижной точкой типа седло-узел, а гомоклиническая петля становится гладкой замкнутой инвариантной кривой, но, очевидно, трансверсальность W^u к F^{ss}_{loc} сохраняется при малых гладких возмущениях.

Негладкий случай возникает, например, когда W^u_O касается сильно устойчивого многообразия W^{ss}_O , как показано на рис. 12.2.2. Последнее, в свою очередь, может случиться при малом периодическом по времени

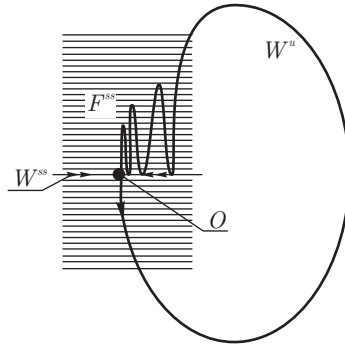


Рис. 12.2.2. Касание неустойчивого и сильно устойчивого многообразий седло-узла может быть получено малым периодическим по времени возмущением системы с входящей в край гомоклинической петлей, показанной на рис. 12.1.4

возмущении системы с входящей в край гомоклинической петлей к седло-узлу (см. предыдущий параграф). В общем случае нетрансверсальность W^u к $\mathcal{F}_{\text{loc}}^{ss}$ также сохраняется при малых гладких возмущениях (скажем, если касание W^u и соответствующего слоя $\mathcal{F}_{\text{loc}}^{ss}$ является квадратичным).

Замкнутая инвариантная кривая W_O^u отображения Пуанкаре на секущей является геометрическим местом пересечения инвариантного двумерного тора W_L^u с секущей. Тор является гладким, если инвариантная кривая гладкая, и негладким в противном случае. Если исходная неавтономная система не имеет глобальной секущей, то, как мы увидим ниже, также возможны и другие конфигурации W_L^u . Например, оно может быть бутылкой Клейна, гладкой или негладкой [6].

Теорема 12.3 (Афраймович–Шильников [3, 6]). *Если глобальное неустойчивое множество седло-узла L является при $\mu = 0$ гладким компактным многообразием (тором или бутылкой Клейна), то при всех малых μ существует гладкое замкнутое притягивающее многообразие T_μ (тор или бутылка Клейна соответственно).*

Это инвариантное многообразие непрерывно зависит от μ . При $\mu = 0$ оно совпадает с W_L^u . Когда $\mu < 0$, это объединение неустойчивого многообразия седловой периодической орбиты $L^-(\mu)$ с устойчивой периодической орбитой $L^+(\mu)$ (где $L^\pm(\mu)$ — периодические орбиты, на которые при бифуркации разваливается седло-узел³). В случае тора, при $\mu > 0$, число

³Если седло-узел не простой, тогда при $\mu < 0$ может возникнуть больше седел и устой-

вращения Пуанкаре на $\mathcal{T}_\mu$ стремится к нулю при $\mu \rightarrow +0$. Таким образом, на оси μ существует бесконечное множество (практически невидимых при $\mu \rightarrow +0$) резонансных зон, которые отвечают периодическим орбитам на $\mathcal{T}_\mu$ с рациональными числами вращения, а также бесконечное множество (типично канторово множество) значений μ , при которых движение на $\mathcal{T}_\mu$ является квазипериодическим.

Перед тем как мы приступим к доказательству теоремы 12.3, изучим глобальную структуру W_L^u более подробно. Введем такие нормальные координаты (см. параграф 3.10) в малой окрестности L , что вблизи L система принимает вид

$$\dot{y} = \mathcal{A}(\mu)y + H(x, y, \varphi; \mu), \quad (12.2.3)$$

$$\dot{x} = G(x, y, \varphi; \mu), \quad \dot{\varphi} = 1, \quad (12.2.4)$$

где H и G обращаются в нуль при $(y = 0, x = 0, \mu = 0)$ вместе с их первыми производными по (x, y) ; характеристические числа матрицы $\mathcal{A}$ лежат строго слева от мнимой оси. При этом $\varphi \in [0, 1]$ — угловая переменная; предполагается, что поверхности $\varphi = 0, \varphi = 1$ склеены при помощи некоторой инволюции, а именно смены знака у части компонент вектора y (подходящий выбор такой инволюции позволяет сделать линейную часть системы не зависящей от φ без потери гладкости; более подробно см. параграф 3.11).

Мы также полагаем, что центральное многообразие W^C локально выпрямлено так, что оно имеет вид $\{y = 0\}$. Соответственно

$$H|_{y=0} \equiv 0. \quad (12.2.5)$$

Далее, выпрямим сильно устойчивое инвариантное слоение. Слои слоения задаются как $\{x = Q(y; \varphi, x', \mu), \varphi = \text{const}\}$, где x' — это координата пересечения слоя с центральным многообразием; Q является $\mathbb{C}^{r-1}$ -функцией ($\mathbb{C}^r$ -гладкой по y). Выпрямление достигается преобразованием координат $x \mapsto x'$, что приводит инвариантное слоение к виду $\{x = \text{const}, \varphi = \text{const}\}$. Таким образом, уравнение (12.2.4) становится не зависящим от y , и систему можно записать в следующем виде:

$$\dot{y} = \mathcal{A}(\mu)y + H(x, y, \varphi; \mu), \quad (12.2.6)$$

$$\dot{x} = G(x, \varphi; \mu), \quad \dot{\varphi} = 1. \quad (12.2.7)$$

По построению, новая функция G , которая совпадает с исходной при $\{y = 0\}$, также принадлежит к классу $\mathbb{C}^r$.

чивых периодических орбит; в этом случае $\mathcal{T}_\mu$ является объединением их всех и всех их неустойчивых многообразий.

В новых переменных сильно устойчивым инвариантным многообразием W_L^{ss} служит поверхность $\{x = 0\}$, узловая область U_- соответствует малым отрицательным x , а седловая область U_+ соответствует малым положительным x .

Мы уже отмечали, что инвариантное слоение является $\mathbb{C}^{r-1}$ -гладким; более того, для случая седло-узла можно доказать, что слоение на самом деле является $\mathbb{C}^r$ -гладким всюду, исключая W_L^{ss} при $\mu = 0$ [140]. Преобразование координат, которое приводит (12.2.4) к (12.2.7), имеет такую же гладкость.

Выберем малые положительные d^+ и d^- . Рассмотрим две секущих для потока (обе $-(n-1)$ -мерные полнотории) $S_0 : \{x = -d^-\}$ и $S_1 : \{x = d^+\}$. По условию, при $\mu = 0$ (и отсюда при всех малых μ) траектории из W_L^u возвращаются в узловую область $U_- = \{x < 0\}$ за конечный отрезок времени. Следовательно, поток задает диффеоморфизм T_1 (глобальное отображение), который отображает малую окрестность линии $l^- : \{y = 0\} = W_L^u \cap S_1$ в S_0 . Это отображение имеет вид

$$\begin{aligned} y_0 &= p(\varphi_1, y_1; \mu), \\ \varphi_0 &= q(\varphi_1, y_1; \mu) \pmod{1}, \end{aligned} \quad (12.2.8)$$

здесь координаты на S_0 и S_1 обозначаются как (φ_0, y_0) и (φ_1, y_1) соответственно; две $\mathbb{C}^r$ -гладкие функции p и $q \pmod{1}$ имеют период 1 по φ .

Замкнутая кривая

$$l^+ = T_1 l^- : \{y_0 = p(\varphi_1, 0; 0), \quad \varphi_0 = q(\varphi_1, 0; 0) \pmod{1}\}$$

является пересечением W_L^u и S_0 . Отметим, что функцию q можно записать в виде

$$q(\varphi, y; \mu) = m\varphi + q_0(\varphi, y; \mu), \quad (12.2.9)$$

где q_0 является периодической по φ . Целое число m определяет гомотопический класс l^+ в S_0 (знак m задает направление l^+ относительно l^-). Если размерность n фазового пространства больше 3, то S_0 по крайней мере трехмерно и m может быть произвольным целым числом. В $\mathbb{R}^3$ секущая S_0 является двумерным кольцом. Поскольку у l^+ не может быть самопересечений, то в этом случае допустимы только $m = 1$ и $m = 0$ (если $m = -1$, то W_L^u должно быть бутылкой Клейна, но в $\mathbb{R}^3$ это невозможно).

Отметим, что структура множества W_L^u полностью определяется тем, каким образом W_L^u примыкает к L со стороны узловой области. Поскольку пересечение $l^+ = W_L^u \cap S_0$ является $|m|$ -обходной кривой в S_0 , пересечение $W_L^u \cap U_-$ с любой секущей вида $\{\varphi = \text{const}\}$ состоит при $m \neq 0$ из $|m|$

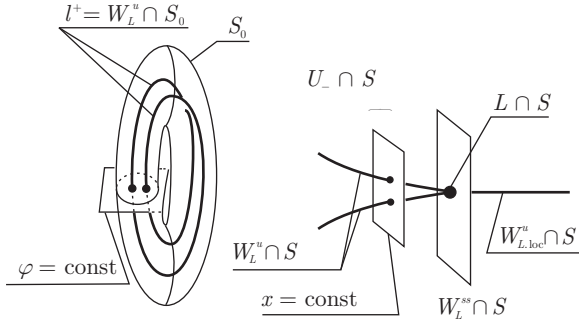


Рис. 12.2.3. Структура пересечения неустойчивого многообразия W_L^u седло-узла L с секущей S_0 в случае $m = 2$. Пересечение является двухобходной кривой l^+ . Соответственно оно пересекает как минимум дважды каждый уровень $\varphi = \text{const}$ в S_0 и каждый уровень $x = \text{const}$ на секущей $S : \{\varphi = 0\}$

кусков, соединяющихся в точке $\{x = 0, y = 0\} = L_0 \cap \{\varphi = \text{const}\}$, как показано на рис. 12.2.3. При $m = 0$ это пересечение является последовательностью окружностей, накапливающих к $\{x = 0, y = 0\}$, см. рис. 12.4.1. Таким образом, множества W_L^u , отвечающие различным значениям m , попарно не гомеоморфны друг другу. Более того, при $|m| \neq 1$ для любой точки на L ее малая окрестность в W_L^u не гомеоморфна диску, т. е. W_L^u в этом случае не многообразие.

Мы изучим случай $m = 0$ в параграфе 12.4 в связи с задачей о «катастрофе голубого неба». В случае $|m| \geq 2$ при исчезновении седло-узла возникает бесконечное множество периодических орбит (см. теорему 12.5), при этом могут также появиться и гиперболические аттракторы (см. [139]). Мы не рассматриваем такие бифуркации в этой книге.

Если $m = \pm 1$, тогда W_L^u — многообразие. Оно гомеоморфно тору, если $m = 1$, и бутылке Клейна, если $m = -1$. Как уже упоминалось, это многообразие может быть гладким или не гладким, в зависимости от того, пересекает W_L^u сильно устойчивое слоение F^{ss} трансверсально всюду или нет. Когда $\dot{x}$ и $\dot{\varphi}$ не зависят от y (см. (12.2.7)), слои F^{ss} на секущей S_0 являются (гипер)плоскостями $\varphi_0 = \text{const}$. Пересечение $l^+ = W_L^u \cap S_0$ записывается как $\{y_0 = p(\varphi_1, 0, 0), \varphi_0 = q(\varphi_1, 0, 0)\}$, где (p, q) — правая часть глобального отображения $T_1 : S_1 \rightarrow S_0$ (см. (12.2.8)). Таким образом, трансверсальность W_L^u к F^{ss} имеет место тогда и только тогда, когда

$$\left. \frac{\partial q}{\partial \varphi} \right|_{y=0, \mu=0} \neq 0. \quad (12.2.10)$$

Это неравенство, вместе с условием $|m| = 1$, представляет собой аналитическую форму условий теоремы 12.3.

Доказательство теоремы основано на сведении задачи к изучению некоторого отображения (ниже, «существенного отображения») окружности. Фактически эта редукция производится независимо от значения m или от гладкости W_L^u , и два следующих наших параграфа основаны на ней.

Как объяснено в параграфе 12.5, мы можем считать, что в (12.2.7)

$$\left. \frac{\partial G}{\partial \varphi} \right|_{\mu=0} \equiv 0. \quad (12.2.11)$$

Другими словами, при $\mu = 0$ правую часть уравнения (12.2.7) можно сделать не зависящей от φ (посредством соответствующей замены координат), так что она примет следующий автономный вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \tilde{g}(x), \\ \dot{\varphi} &= 1, \end{aligned} \quad (12.2.12)$$

где $\tilde{g}(0) = 0$, $\tilde{g}'(0) = 0$. Если $x \neq 0$, то $\tilde{g}(x) > 0$. Отметим, что функция $\tilde{g}(x)$ однозначно определяется по нелинейной части $g(x, 0)$ отображения Пуанкаре на центральном многообразии (см. (12.2.1)). В [140] доказано, что преобразование, которое приводит систему (12.2.7) к автономному виду (12.2.12) при $\mu = 0$, имеет гладкость $\mathbb{C}^r$ при $x \neq 0$. Таким образом, после преобразования система (12.2.6) и (12.2.7) будет $\mathbb{C}^{r-1}$ -гладкой при $x \neq 0$, в то время как соответствующее отображение между любыми двумя секущими, которые не пересекают $\{x = 0\}$, остается $\mathbb{C}^r$ -гладким.

Как только координаты введены так, что система на центральном многообразии имеет автономный вид (12.2.12) при $\mu = 0$, мы можем определить существенное отображение

$$\varphi \mapsto f(\varphi) \equiv m\varphi + q_0(\varphi, 0; 0). \quad (12.2.13)$$

По построению оно получается следующим образом: применим отображение T_1 к линии пересечения локального неустойчивого многообразия $W_{\text{loc}}^u = W^C \cap U_+$ с секущей S_1 , а затем спроектируем образ на центральное многообразие вдоль слоев сильно устойчивого слоения. Проекция выполняется в S_0 , которая лежит в узловой области, где слоение задано однозначно (см. главу 5). Таким образом, пока секущие S_0 и S_1 фиксированы, существенное отображение определено однозначно, по модулю замен координат на центральном многообразии, которые сохраняют автономность

системы (центральное многообразие в узловой области определено не однозначно, но системы на различных центральных многообразиях гладко сопряжены посредством проекции вдоль сильно устойчивого инвариантного слоения, следовательно, выбор другого центрального многообразия эквивалентен преобразованию координат на заданном).

Заметим, что множество преобразований координат, которые при $\mu = 0$ сохраняют систему в виде (12.2.12), довольно мало. Действительно, новая координата φ должна удовлетворять $\frac{d}{dt}(\varphi_{\text{new}} - \varphi) = 0$, откуда разность $\varphi_{\text{new}} - \varphi$ должна быть постоянной вдоль траекторий системы. В частности, она постоянна на L . Теперь, поскольку любая орбита на центральном многообразии стремится к L либо при $t \rightarrow +\infty$, либо при $t \rightarrow -\infty$, то $\varphi_{\text{new}} - \varphi = \text{const}$ всюду на W^c . Кроме того, поскольку уравнение для x в (12.2.12) должно оставаться автономным, можно доказать, что разрешены только автономные (не зависящие от φ) преобразования переменной x . Действительно, рассмотрим сначала преобразования, тождественные при $\varphi = 0$. По определению, они не изменяют отображение Пуанкаре на локальной секущей $S : \{\varphi = 0\}$. Таким образом, в силу единственности вложения в поток (лемма 12.4), если такое преобразование сохраняет автономность системы, оно не может изменить ее правую часть $\tilde{g}$. Следовательно, если $x_{\text{new}} \equiv x$ при $\varphi = 0$, то временная эволюция x_{new} и временная эволюция x управляются одним и тем же уравнением, и это немедленно влечет, что в таком случае $x_{\text{new}} \equiv x$ для всех φ . Поскольку произвольная замена координат является суперпозицией автономной замены и трансформации того типа, который мы только что рассмотрели, это доказывает утверждение.

Таким образом, единственным возможным преобразованием координат является

$$\varphi \mapsto \varphi + \text{const}, \quad x \mapsto X(x). \quad (12.2.14)$$

Влияние такого преобразования x на существенное отображение равносильно сдвигу секущих S_0 и S_1 в $x = X^{-1}(-d^-)$ и $x = X^{-1}(d^+)$ соответственно. Поскольку эволюция x автономна, время перехода с секущей $\{x = \text{const}\}$ на любую другую секущую этого вида зависит только от положения секущей, но не от начальной точки на секущей. Таким образом, любой сдвиг S_0 или S_1 равносильен повороту φ_0 или φ_1 соответственно. Таким образом, мы доказали следующий результат:

Лемма 12.1. *Существенное отображение определяется однозначно по системе при $\mu = 0$, по модулю произвольной аддитивной постоянной и сдвига начала координат:*

$$f(\varphi) \rightarrow c_0 + f(\varphi + c_1).$$

Существенное отображение содержит большую часть информации о глобальных бифуркациях седлового узла. Как уже упоминалось, его степень m определяет топологический тип W_L^u . Если $|m| = 1$, то W_L^u является гладким тогда и только тогда, когда $f(\varphi)$ не имеет критических точек (см. (12.2.10) и (12.2.13)). Ниже (теорема 12.4) мы даем точную формулировку принципа редукции: бифуркации в $U(W_L^u)$ при $\mu \rightarrow +0$ повторяют бифуркации в семействе одномерных отображений

$$\bar{\varphi} = \omega(\mu) + f(\varphi), \quad (12.2.15)$$

где $\omega(\mu) \rightarrow +\infty$ при $\mu \rightarrow +0$.

Данный принцип редукции неявно был использован в [151] для случая $|m| = 1$. Более раннее исследование в [97], по сути, основывалось на той же идее.

Рассмотрим отображение Пуанкаре $T = T_0 \circ T_1$ секущей S_1 , которое задается траекториями системы при всех малых $\mu > 0$. При этом T_1 является глобальным отображением, заданным (12.2.8), а $T_0 : S_0 \rightarrow S_1$ — это локальное отображение, определенное вблизи L при $\mu > 0$. Как и в предыдущем параграфе, поведение траекторий в U при $\mu > 0$ полностью определяется поведением отображения T .

Поскольку уравнение (12.2.7) для $\dot{x}$ и $\dot{\varphi}$ не зависит от y , локальное отображение $T_0 : (y_0, \varphi_0) \mapsto (y_1, \varphi_1)$ записывается в виде (для некоторой $\mathbb{C}^r$ -функции Y)

$$\begin{aligned} y_1 &= Y(\varphi_0, y_0, \mu), \\ \varphi_1 &= \varphi_0 + \tau(\varphi_0, \mu) \pmod{1}. \end{aligned} \quad (12.2.16)$$

Функция τ — это время перехода из S_0 в S_1 . Это гладкая функция, периодическая по φ_0 . Ясно, что $\tau(\varphi_0, \mu) \rightarrow \infty$ при $\mu \rightarrow +0$.

Лемма 12.2. Если (12.2.11) выполнено при $\mu = 0$, то $\partial\tau/\partial\varphi$ равномерно стремится к нулю при $\mu \rightarrow +0$ в $\mathbb{C}^{r-1}$ -топологии.

Эта лемма в полной общности доказана в [140] и почти немедленно влечет основную теорему 12.4. Доказательство основано на длинных вычислениях, и мы их здесь опускаем. Простое доказательство аналогичного утверждения дано в параграфе 12.5 при некоторых дополнительных допущениях. А именно предполагается, что система достаточно гладкая по всем переменным и μ и что седло-узел L простой. Кроме того, вместо доказательства того, что все производные стремятся к нулю, устанавливается только обращение в нуль достаточно большого количества производных. Конечно, все это не слишком сильное ограничение.

Обозначив $\omega(\mu) = \tau(0, \mu)$, из леммы 12.2 мы получаем, что

$$\tau(\varphi_0, \mu) = \omega(\mu) + o(1). \quad (12.2.17)$$

Если седло-узел простой, то

$$\omega(\mu) \sim \frac{\pi}{\sqrt{\mu l_2}}. \quad (12.2.18)$$

Отметим также, что, поскольку характеристические числа матрицы $A(\mu)$ в (12.2.3) лежат строго слева от мнимой оси и поскольку, в силу (12.2.5), $\dot{y} = (A + \tilde{h})y$ для некоторой $\mathbb{C}^{r-1}$ -гладкой функции $\tilde{h}$, легко убедиться, что

$$\|Y\|_{\mathbb{C}^{r-1}} \leq O(e^{-\lambda\omega}) \quad (12.2.19)$$

для некоторого положительного λ . Кроме того, можно доказать [140], что

$$\|Y\|_{\mathbb{C}^r} \rightarrow 0 \text{ as } \mu \rightarrow 0. \quad (12.2.20)$$

Собирая вместе формулы (12.2.8), (12.2.9), (12.2.10), (12.2.16), (12.2.17) и (12.2.20), получаем следующий результат [140].

Теорема 12.4 (принцип редукции). *Отображение Пуанкаре $T = T_0 \circ T_1$ записывается в виде*

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \psi(\varphi, y; \mu), \\ \bar{\varphi} &= \omega + f(\varphi) + \xi(\varphi, y; \mu) \pmod{1}, \end{aligned} \quad (12.2.21)$$

где $\omega(\mu) \rightarrow \infty$ и ψ, ξ стремятся к нулю (вместе со всеми производными) при $\mu \rightarrow +0$.

Из этой теоремы немедленно следует, что если существенное отображение (12.2.15) при ω^* имеет грубую устойчивую (неустойчивую) периодическую орбиту, то существует последовательность промежутков δ_k значений μ , которые накапливаются к $+0$ так, что разность $(\omega(\mu) - k)$ остается близкой к ω^* при $\mu \in \delta_k$, и система имеет грубую устойчивую или соответственно седловую периодическую орбиту при $\mu \in \delta_k$ для всех достаточно больших k .

Теорема 12.4 также верна, когда система гладко зависит от μ : в этом случае мы полагаем, что *первые производные правых частей* (12.2.3) и (12.2.4) *по фазовым переменным* (y, z, φ) *являются $\mathbb{C}^{r-1}$ -гладкими по всем переменным и μ .*

Предположим также, что локальное отображение Пуанкаре вблизи L монотонно зависит от μ , т. е.

$$g'_\mu(0; 0) > 0 \quad (12.2.22)$$

в (12.2.1)⁴. В этом случае можно доказать, что

$$\partial\omega/\partial\mu \neq 0, \quad (12.2.23)$$

т. е. ω можно рассматривать как новый параметр, а μ — как функцию от ω , которая стремится к нулю при $\omega \rightarrow \infty$. Можно показать, что все производные от μ по ω также стремятся к нулю. Лемма 12.2, сформулированная для производных от τ'_φ и по ω , и по φ_0 , остается верна. Теорема 12.4 не изменяется; а именно «все производные» включают теперь и производные по ω (см. [140]).

Отметим, что вышеприведенный прием, вводящий время перехода в качестве нового параметра, необходим только в случае малой гладкости: доказывая лемму 12.3, которая соответствует случаю высокой гладкости (и простому седло-узлу), мы доказываем обращение в нуль достаточно большого числа производных непосредственно по μ .

Теперь теорема 12.3 прямо следует из формулы (12.2.21): по условиям теоремы мы имеем $|m| = 1$ и $f'(\varphi) \neq 0$, значит отображение $\varphi \mapsto \omega + f(\varphi) + \xi(\varphi, 0; \mu)$ является диффеоморфизмом, и можно легко видеть, что здесь применим принцип кольца (параграф 4.2). Таким образом, существование единственной $\mathbb{C}^r$ -гладкой замкнутой инвариантной кривой

$$y = \eta(\varphi; \mu), \quad (12.2.24)$$

которая притягивает все орбиты в S_1 , устанавливается для отображения T при любых $\mu > 0$. Поскольку это отображение задается орбитами рассматриваемой системы, это доказывает теорему.

В силу принципа кольца инвариантная кривая непрерывно зависит от μ (или гладко, когда система является гладкой по μ). Для любого фиксированного значения ν , если $\omega = \nu + k$, где $k \in \mathbb{Z}$ и $k \rightarrow \infty$ при $\mu \rightarrow +0$, отображение (12.2.21) при $k \rightarrow \infty$ имеет предел (в гладкой топологии)

$$\begin{aligned} \bar{y} &= 0, \\ \bar{\varphi} &= \nu + f(\varphi) \pmod{1}. \end{aligned} \quad (12.2.25)$$

⁴Когда седло-узел простой, (12.2.22) является просто условием трансверсальности рассматриваемого однопараметрического семейства к бифуркационной поверхности систем с седло-узлом, которое позволяет записать отображение Пуанкаре на W_{loc}^C в виде (12.2.2).

Следовательно, инвариантная кривая отображения T имеет в качестве предела инвариантную кривую $\{y = 0\}$ отображения (12.2.25), т. е. функция η в (12.2.24) обращается в нуль (вместе со всеми производными) при $\mu \rightarrow +0$.

На инвариантной кривой отображение T имеет вид

$$\bar{\varphi} = \omega(\mu) \pm \varphi + f_0(\varphi) + f_1(\varphi; \mu) \pmod{1}, \quad (12.2.26)$$

где «+» (ориентируемый случай) соответствует тору, а «-» (неориентируемый случай) — бутылке Клейна; f_0 и f_1 являются периодическими функциями от φ , и $f_1 \rightarrow 0$ вместе со всеми производными при $\mu \rightarrow +0$. Если система гладко зависит от μ (и выполняется условие монотонности (12.2.22)), то из (12.2.23) следует, что это отображение (в поднятии на $\mathbb{R}^1$) является строго монотонным по μ .

Поэтому в ориентируемом случае число вращения Пуанкаре на торе монотонно зависит от μ (см. параграф 4.4). В типичном случае каждое рациональное число вращения соответствует интервалу значений μ (резонансной зоне). В простейшем случае на торе в резонансной зоне существуют только две периодические орбиты: одна устойчивая, а другая — неустойчивая (например, при $f_0(\varphi) = \sin \varphi$ могут существовать только две неподвижные точки). Неустойчивая периодическая орбита на инвариантной кривой является для отображения T кольца (полнотория) S_1 седловой орбитой; инвариантная кривая является замыканием неустойчивого многообразия этой седловой периодической орбиты. В общем случае для различных функций f_0 в резонансной зоне может существовать произвольное множество периодических орбит (с одинаковым числом устойчивых и седловых орбит на торе). В этом случае инвариантная кривая является замыканием неустойчивых многообразий всех седловых периодических орбит.

Граница резонансной зоны отвечает слиянию устойчивых и неустойчивых периодических орбит на инвариантной окружности, т. е. бифуркации седло-узла того же типа, который мы здесь рассматриваем. Кроме того, если есть больше двух периодических орбит, бифуркации седло-узла могут происходить и при значениях параметров внутри резонансной зоны. По структуре отображения Пуанкаре (12.2.25) на инвариантной кривой, *если некоторое значение ν^* отвечает бифуркации коразмерности один (простому седло-узлу) в существенном отображении*

$$\bar{\varphi} = \nu + \varphi + f_0(\varphi),$$

то существует такая последовательность значений $\mu_k \rightarrow +0$, что $\omega(\mu_k) - k \rightarrow \nu^$ и отображение (12.2.26) претерпевает ту же самую бифуркацию при $\mu = \mu_k$ для всех достаточно больших k .*

Теперь рассмотрим вопрос о том, что происходит, когда W_L^u не гладкое. Впервые этот вопрос изучался в [3], где было обнаружено, что разрушение инвариантного многообразия при таких бифуркациях может вызывать возникновение хаоса. В частности, в [3] были даны достаточные условия (так называемые условия «большой петли» и «малой петли») для рождения бесконечного множества седловых периодических орбит при исчезновении седло-узла в негладком случае. Позже выяснилось, что эти условия можно уточнить следующим образом.

Напомним, что в гладком случае многообразие W_L^u пересекает сильно устойчивое слоение $\mathcal{F}^{ss}$ трансверсально, и каждый слой имеет только одну точку пересечения с W_L^u . В общем негладком случае некоторые слои имеют односторонние касания с W_L^u . Следовательно, в узловой области должны быть слои, где каждый слой имеет несколько пересечений с W_L^u .

Определение 12.1. Множество W_L^u удовлетворяет (уточненному) условию большой петли, если каждый слой $\mathcal{F}^{ss}$ пересекает W_L^u в узловой области по крайней мере дважды (рис. 12.2.4).

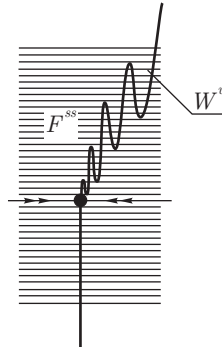


Рис. 12.2.4. Геометрическая интерпретация условия большой петли — каждый слой сильно устойчивого слоения $\mathcal{F}^{ss}$ должен пересекать W^u не менее чем в двух точках

В терминах существенного отображения это условие означает существование по крайней мере двух прообразов относительно отображения $\bar{\varphi} = f(\varphi)$ для любого значения $\bar{\varphi}$.

Следующий результат представляет собой усиленную версию соответствующей теоремы в [3].

Теорема 12.5. Если условие большой петли выполнено, то система имеет бесконечное множество седловых периодических орбит при всех малых $\mu > 0$.

Отметим, что эта теорема верна независимо от топологического типа W_L^u (т.е. независимо от степени m существенного отображения). Очевидно, условие большой петли всегда выполнено, когда $|m| > 2$, т.е. в этом случае исчезновение седло-узла всегда ведет к хаосу. Соответственно до конца этой главы мы сосредоточимся на случаях $m = 1, 0, -1$.

Условие малой петли было первоначально введено для случая, когда W_L^u является тором ($m = 1$), но оно также имеет смысл при $m = 0$ и при $m = -1$. В терминах существенного отображения условие малой петли формулируется так: *существуют φ_1 и φ_2 такие, что*

$$f(\varphi_1) = f(\varphi_2)$$

и

$$\max_{\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]} |f(\varphi) - f(\varphi_1)| > |\varphi_2 - \varphi_1|$$

(см. рис. 12.2.5).

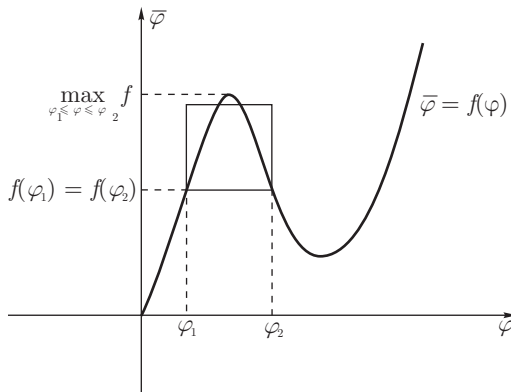


Рис. 12.2.5. Вид $f(\varphi)$, удовлетворяющего условию малой петли

Теорема 12.6. *Если условие малой петли выполнено, то на оси μ существует накапливающаяся к $\mu = +0$ последовательность интервалов Δ_i такая, что система имеет бесконечное множество седловых орбит при $\mu \in \Delta_i$.*

Отметим отличие от перехода к хаосу в случае большой петли: когда условие большой петли не выполнено, интервалы Δ_i хаотической динамики в принципе могут чередоваться с интервалами, где система имеет только конечное множество седловых и устойчивых периодических орбит [151].

В соответствии с принципом редукции (теорема 12.4), это происходит, если внутри некоторого интервала значений ω существенное отображение

$$\bar{\varphi} = \omega + f(\varphi)$$

имеет только конечное число периодических орбит.

Например, если $f(\varphi) = \varphi + \frac{C}{2\pi} \sin 2\pi\varphi$, то многообразие W_L^u является негладким при $C \geq 1$, в то время как условие большой петли выполнено, если

$$\sqrt{C^2 - 1} > \pi + \arccos \frac{1}{C},$$

а условие малой петли выполнено с $\varphi_2 = 1/2$, если

$$\sqrt{C^2 - 1} > \pi + \arccos \frac{1}{C} - u,$$

где $u \in (0, \pi)$ — корень уравнения $\pi = u + C \sin u$. Очевидно, что когда $(C - 1)$ достаточно мало, существенное отображение имеет только одну устойчивую и одну неустойчивую неподвижную точку на отрезке $|2\pi\omega| < 1$ и ни одной другой периодической орбиты. Следовательно, если $(C - 1)$ достаточно мало, на оси μ существуют интервалы простой динамики; существование таких интервалов можно легко проверить, например, когда

$$\sqrt{C^2 - 1} < \frac{3\pi}{4} + \arccos \frac{1}{C}.$$

Отметим, что обе вышеприведенные теоремы дают только достаточные условия для возникновения хаотической динамики после исчезновения седло-узла. Эти условия можно еще более ослабить. Наиболее важное улучшение (по сути, введенное Ньюхаузом, Пэлисом и Такенсом [97]) можно произвести в случае $m = 1$, где неустойчивое многообразие W_L^u седло-узла является тором.

Теорема 12.7. *В общем случае, если W_L^u является негладким тором, то на оси μ имеется накапливающаяся к $\mu = +0$ последовательность интервалов Δ_i таких, что система имеет бесконечное множество периодических орбит при $\mu \in \Delta_i$.*

Условие общности в этой теореме можно сформулировать в явном виде: для каждого $\varphi_0 \in \mathbb{S}^1$ проверяем, что либо имеется другое φ , такое что $f(\varphi) = f(\varphi_0)$, либо по крайней мере одна из производных $f'(\varphi_0), f''(\varphi_0), \dots, f^{(r)}(\varphi_0)$ отлична от нуля. Не ясно, существенно ли это

условие, или это просто техническое ограничение. В любом случае одновременное обращение в нуль всех производных существенного отображения в некоторой точке — это крайне редкое явление.

Таким образом, теоремы 12.3, 12.5 и 12.7 можно объединить следующим образом. Если W_L^u является гладким тором, то гладкий притягивающий инвариантный тор сохраняется после исчезновения седло-узла L . Если W_L^u гомеоморфно тору, но не гладко, то после исчезновения L возникает хаотическая динамика. При этом либо тор разрушается и хаос существует при всех малых $\mu > 0$ (для этого достаточным является условие большой петли), либо хаотические зоны на оси параметра перемежаются с областями простой динамики.

В теореме 12.7 существенно используется утверждение, что степень m существенного отображения равна 1. Она не имеет аналогов для случаев $m = 0$ и $m = -1$, в которых сценарий возникновения хаоса менее определенный.

12.3. Рождение бутылки Клейна

Рассмотрим теперь бифуркацию периодической орбиты седло-узла L в случае, когда неустойчивое многообразие W_L^u является бутылкой Клейна, как изображено на рис. 12.3.1, т.е. когда существенное отображение имеет степень $m = -1$. В силу теоремы 12.3, если W_L^u гладко, то гладкая инвариантная притягивающая бутылка Клейна сохраняется, когда L исчезает. На пересечении с секущей S_0 поток на бутылке Клейна задает отображение Пуанкаре вида (см. (12.2.26))

$$\bar{\varphi} = \omega(\mu) - \varphi + f_0(\varphi) + f_1(\varphi, \mu) \mod 1, \quad (12.3.1)$$

где $\omega \rightarrow \infty$ при $\mu \rightarrow +0$; f_0 и f_1 — гладкие 1-периодические функции, f_1 обращается в нуль при $\mu = 0$ вместе со всеми производными, $-\varphi + f_0(\varphi)$ — это существенное отображение, которое однозначно определяется системой при $\mu = 0$. Как доказано в предыдущем параграфе, многообразие W_L^u

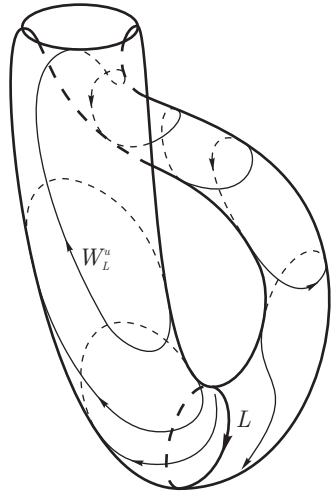


Рис. 12.3.1. Седло-узловая периодическая орбита на бутылке Клейна

является гладким тогда и только тогда, когда

$$-1 + f'_0(\varphi) \neq 0 \quad (12.3.2)$$

при всех φ . В этом случае отображение Пуанкаре будет (неориентируемым) диффеоморфизмом окружности.

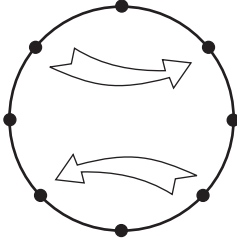


Рис. 12.3.2. Действие неориентируемого отображения окружности

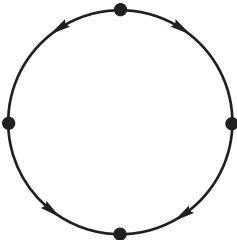


Рис. 12.3.3. Возможная бифуркация седло-узла периода два в неориентируемом отображении окружности

Известно, что такие отображения имеют ровно две неподвижные точки. Они разделяют окружность на две дуги, каждая из которых циклически переходит в другую под действием отображения. На этих дугах также может находиться несколько точек периода два, как показано на рис. 12.3.2. В общем случае возможны следующие бифуркации: орбита периода два стягивается в или возникает из неподвижной точки (мультипликатор которой проходит через -1), или две орбиты периода два сливаются в седло-узел периода два, как показано на рис. 12.3.3. Из (12.3.1) непосредственно следует, что если существенное отображение

$$\bar{\varphi} = \nu - \varphi + f_0(\varphi) \pmod{1} \quad (12.3.3)$$

претерпевает одну из этих бифуркаций при некотором $\nu = \nu^*$, то существует последовательность $\mu_k \rightarrow +0$, такая, что $(\omega(\mu_k) - k) \rightarrow \nu^*$ и отображение Пуанкаре (12.3.1) претерпевает ту же самую бифуркацию при каждом $\mu = \mu_k$.

Неподвижные точки отображения (12.3.1) находятся из уравнения

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \frac{1}{2}\omega(\mu) + \frac{1}{2}(f_0(\varphi_0) + f_1(\varphi_0, \mu)), \\ \varphi_1 &= \frac{1}{2}\omega(\mu) + \frac{1}{2}(f_0(\varphi_1) + f_1(\varphi_1, \mu)) + \pi. \end{aligned} \quad (12.3.4)$$

Поскольку f_0 и f_1 — периодические функции, то они ограничены. Таким образом, из (12.3.4)

и (12.3.2) следует, что при $\omega \rightarrow \infty$ координаты φ_0 и φ_1 , соответствующие неподвижным точкам, неограниченно возрастают. Другими словами, при $\mu \rightarrow +0$ обе неподвижные точки обегают окружность бесконечно много раз.

Мультипликатор неподвижной точки равен $-1 + f'_0(\varphi_{0,1}) + f'_1(\varphi_{0,1}, \mu)$. Так как $f'_1 \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow +0$, то если $f'_0(\varphi) \neq 0$, то мультипликатор каждой

неподвижной точки осциллирует вокруг -1 . Мы приходим к следующему результату (впервые упомянутому в [6]; подробное доказательство опубликовано в [86]).

Теорема 12.8. *При всех $\mu > 0$ система на бутылке Клейна имеет ровно две периодические орбиты с отрицательными мультипликаторами. Если $f_0(\varphi)$ не обращается в нуль тождественно, каждая из этих двух периодических орбит при $\mu \rightarrow +0$ претерпевает бифуркацию удвоения периода бесконечно много раз.*

В простейшем случае (скажем, когда $f_0(\varphi) = \frac{C}{2\pi} \sin 2\pi\varphi$ при $C < 1$) бифуркации происходят следующим образом (см. рис. 12.3.4): в некотором интервале значений μ одна из неподвижных точек (φ_0) является устойчивой, а другая (φ_1) — неустойчивой. Затем при некотором значении μ неподвижная точка φ_0 теряет устойчивость и возникает устойчивая орбита периода два. После этого в некотором интервале μ существуют две неустойчивые неподвижные точки и устойчивая орбита периода два; далее устойчивая орбита стягивается в неподвижную точку φ_1 , которая теперь становится устойчивой, а затем бифуркационный процесс повторяется: устойчивая точка снова теряет устойчивость через удвоение периода и так далее, неограниченное число раз без конца.

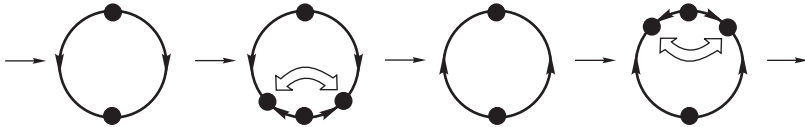


Рис. 12.3.4. Простейший цикл бифуркаций на бутылке Клейна для отображения Пуанкаре (12.3.1) при $\mu \rightarrow +0$

Так как время возвращения орбиты на секущую близко к $\omega(\mu)$ (см. предыдущий параграф), то при $\mu \rightarrow +0$ период орбит потока, которые отвечают неподвижным точкам отображения Пуанкаре, стремится к бесконечности (в типичном случае он равен $\sim \pi/\sqrt{\mu l_2}$). До того как орбиты возвращаются на секущую, каждая должна сделать $\omega(\mu)$ оборотов в малой окрестности только что исчезнувшего седло-узла L . Соответственно длина этих периодических орбит также возрастает до бесконечности. Таким образом, теорема 12.8 дает положительный ответ на следующий вопрос, поставленный Палисом и Пью [105]: может ли периодическая орбита исчезнуть на конечном расстоянии от состояний равновесия так, что период и длина орбиты возрастает до бесконечности при приближении к моменту бифуркации?

Виртуальные бифуркации такого типа названы Р.Абрахамом «катастрофами голубого неба». Первый пример катастрофы голубого неба был построен Медведевым [95] для бифуркаций седло-узла на бутылке Клейна. Наиболее важным свойством примера Медведева является то, что периодическая орбита, длина и период которой постоянно увеличиваются при $\mu \rightarrow +0$, остается устойчивой и не претерпевает каких-либо бифуркаций при малых $\mu > 0$. Теорема 12.8 показывает, что это возможно только в случае, когда $f_0(\varphi) \equiv 0$, что означает, что все точки (за исключением двух неподвижных точек) существенного отображения имеют период два.

Поскольку в этом случае существенное отображение является сильно вырожденным, оно не несет информацию о структуре отображения Пуанкаре (12.3.1). Для того чтобы понять, как сохраняется устойчивая периодическая орбита, выберем

$$f_1(\varphi, \mu) = \mu \cos \pi \omega(\mu) \sin 2\pi \varphi - \mu \sin \pi \omega(\mu) \cos 2\pi \varphi.$$

Тогда отображение Пуанкаре записывается как

$$\bar{\varphi} = \omega(\mu) - \varphi + \mu \sin(2\pi \varphi - \pi \omega(\mu)) \mod 1.$$

Как мы видим, это отображение имеет неподвижную точку $\varphi_0 = \omega(\mu)/2$ с мультипликатором, равным $-1 + 2\pi\mu$, т. е. эта точка остается устойчивой при всех $\mu > 0$.

Мы видим, что пример Медведева описывает крайне вырожденную ситуацию. Общий пример катастрофы голубого неба для устойчивой периодической орбиты (когда степень m существенного отображения равна нулю) дан в следующем параграфе.

А сейчас кратко рассмотрим вопрос о том, что может произойти, если W_L^u является негладкой бутылкой Клейна. В этом случае применимы теоремы 12.5. и 12.6, следовательно, когда $\mu > 0$, хаос может возникнуть, если удовлетворяется условие большой или малой петли. Однако прямого аналога теоремы 12.7 при этом не существует из-за следующей возможности: *даже если W_L^u не гладкое, система может тем не менее иметь простую динамику для всех малых положительных значений μ .*

Такая ситуация может возникнуть, если существенное отображение (12.3.3) имеет только конечное множество периодических орбит при всех ω . Так, когда $f_0(\varphi) = \frac{C}{2\pi} \sin 2\pi \varphi$, можно показать, что существенное отображение имеет только конечное число неподвижных точек и точек периода два и никаких других периодических орбит при всех ω , если, например, $C < \sqrt{2}$.

12.4. Катастрофа голубого неба

Теперь рассмотрим случай, когда глобальное неустойчивое множество W_L^u периодической орбиты седло-узла L не является многообразием, а имеет структуру, показанную на рис. 12.4.1. Это означает, что множитель m , который определяет гомотопический класс кривой $l^+ = W_L^u \cap S_0$ на секущей $S_0 : \{x = -d^-\}$, равен нулю. Другими словами, в этом случае существенное отображение из параграфа 12.2 имеет вид

$$\bar{\varphi} = \omega + f_0(\varphi) \mod 1, \quad (12.4.1)$$

где f_0 — гладкая функция периода один.

Теорема 12.9. *Рассмотрим однопараметрическое семейство динамических систем, которое имеет периодическую орбиту L типа седло-узел такую, что при $\mu = 0$ все орбиты в глобальном неустойчивом множестве W_L^u стремятся к L при $t \rightarrow +\infty$, но не лежат в W_L^{ss} . Пусть существенное отображение удовлетворяет условиям $m = 0$ и $|f'_0(\varphi)| < 1$ при всех φ . Тогда после исчезновения седло-узла при $\mu > 0$ система имеет устойчивую периодическую орбиту L_μ (не гомотонную к L в U), которая является единственным аттрактором для всех траекторий в U .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 12.4 отображение Пуанкаре T секущей S близко (в гладкой топологии) к следующему отображению:

$$\begin{aligned} \bar{y} &= 0, \\ \bar{\varphi} &= \omega(\mu) + f_0(\varphi) \mod 1 \end{aligned} \quad (12.4.2)$$

при малых $\mu > 0$. По условию, $|f'_0(\varphi)| < 1$. Отсюда отображение (12.4.2) является сжатием и имеет единственный аттрактор при всех ω ; а именно единственную устойчивую неподвижную точку. То же самое, очевидно, верно для всех близких отображений; в частности, для отображения T при малых $\mu > 0$. Поскольку отображение T задается орбитами потока, неподвижная точка соответствует притягивающей периодической орбите L_μ . ■

Поскольку время возвращения на секущую S_1 (т.е. период L_μ) возрастает пропорционально $\sim \omega(\mu)$, оно должно стремиться к бесконечности при $\mu \rightarrow +\infty$ (см. параграф 12.2; если L — простой седло-узел, то период возрастает как $\sim \pi/\sqrt{\mu l_2}$). Поскольку векторное поле нигде в U не обращается в нуль, длина L_μ также должна стремиться к бесконечности. Так как L_μ не претерпевает бифуркаций при $\mu > 0$, мы имеем пример катастрофы голубого неба [152].

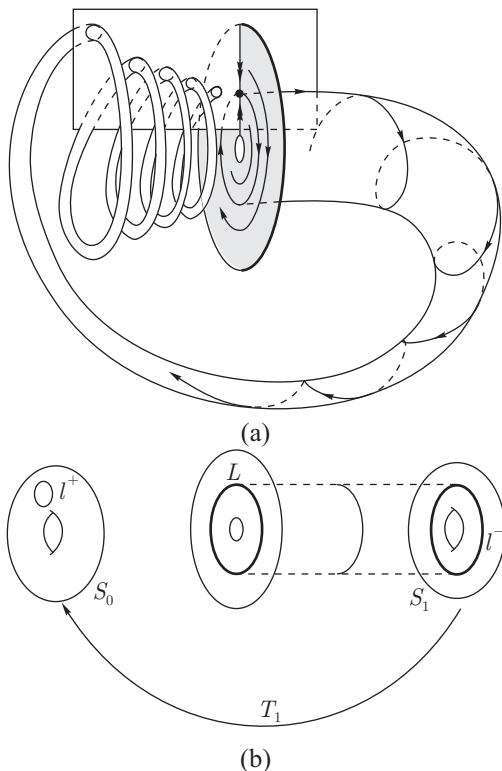


Рис. 12.4.1. (а) Механизм катастрофы голубого неба. Неустойчивое многообразие W_L^u возвращается к седло-узлу в узловой области так, что окружности его пересечения с секущей S сужаются с каждой последующей итерацией. (б) Глобальное отображение вблизи W_L^u

Если седло-узел L простой, то все близкие системы, имеющие седло-узловые периодические орбиты, близкие к L , составляют бифуркационную поверхность коразмерности один. По построению (параграф 12.2) функция f_0 непрерывно зависит от системы на этой бифуркационной поверхности. Таким образом, если некоторая система с простым седло-узлом удовлетворяет условиям теоремы 12.9, то им удовлетворяют и все близкие системы на бифуркационной поверхности. Это означает, что теорема 12.9 верна для любого однопараметрического семейства, которое трансверсально пересекает поверхность. Другими словами, наша катастрофа голубого неба

возникает общим образом, в однопараметрических семействах. Соответствующая бифуркационная поверхность является новой границей устойчивости для периодических орбит (здесь орбиты L_μ), которая не имеет аналогов в двумерных системах.

Отметим, что специфическая топологическая структура W_L^u все еще недостаточна для реализации катастрофы голубого неба: в теореме 12.9 имеется также и количественное условие, которое необходимо, чтобы гарантировать сжатие. Если это условие нарушается, т.е. если $|f'_0(\varphi)| > 1$ при некотором φ , то в области $\mu > 0$ происходит бесконечное множество бифуркаций, так же как и в случаях, рассмотренных в предыдущих параграфах. Действительно, рассмотрим поднятие отображения (12.4.1) на $\mathbb{R}^1$:

$$\bar{\varphi} = \omega + f_0(\varphi). \quad (12.4.3)$$

Неподвижные точки этого отображения отвечают неподвижным точкам существенного отображения (12.4.1). Поскольку f_0 периодична, она ограничена. Таким образом, (12.4.3) всегда имеет по крайней мере одну неподвижную точку, и соответствующее значение φ становится произвольно большим, когда ω возрастает. Координата неподвижной точки является монотонно возрастающей функцией от ω в области, где $f'_0(\varphi) < 1$, а в области $f'_0(\varphi) > 1$ — убывающей. Таким образом, если $|f'_0(\varphi)| > 1$ на некоторых интервалах φ , то мы неизбежно имеем последовательность значений ω , при которых либо устойчивая и неподвижная точки сливаются в седло-узел, либо устойчивая неподвижная точка претерпевает удвоение периода, меняющее ее устойчивость. Так как $\omega \rightarrow \infty$ соответствует $\mu \rightarrow +0$ и отображение Пуанкаре T произвольно близко приближается к существенному отображению (теорема 12.4), то неподвижные точки отображения T при $\mu \rightarrow +0$ должны претерпевать те же бифуркации бесконечно много раз.

Кроме того, из теорем 12.5 и 12.6 следует, что хаотическое поведение также возможно, если условие $|f'_0(\varphi)| < 1$ теоремы 12.9 не удовлетворяется. В частности, условие большой петли (параграф 12.2) при этом эквивалентно существованию слоя сильно устойчивого слоения, которое пересекает по крайней мере две связные компоненты пересечения W_L^u с локальной секущей $S : \{\varphi = \text{const}\}$ (см. рис. 12.4.2). В терминах существенного отображения это условие записывается как

$$\max f_0 \geq \min f_0 + 1, \quad (12.4.4)$$

таким образом, это неравенство будет обеспечивать хаос при всех малых $\mu > 0$.

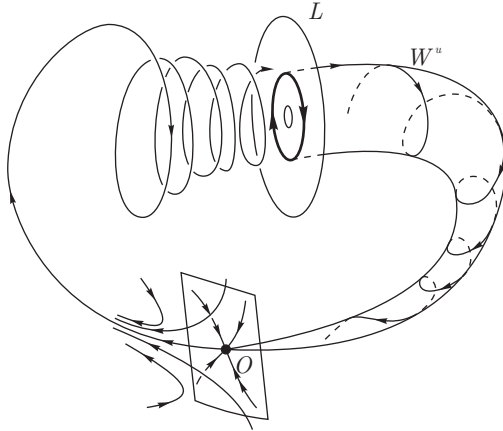


Рис. 12.4.3. Феноменологический сценарий развития катастрофы голубого неба: когда исчезает седло-узловое состояние равновесия O , неустойчивое многообразие седло-узловой периодической орбиты имеет конфигурацию, показанную на рис. 12.4.1(a)

седло-узлом с одним нулевым $\lambda_1 = 0$ и двумя отрицательными характеристическими показателями, которые находятся из уравнения $\lambda^2 + 4B\lambda + + 8B - 12 = 0$. Второе состояние равновесия $O(0, 0, 0)$ также имеет один нулевой показатель $\lambda_1 = 0$, но вместе с ним еще и два чисто мнимых характеристических показателя $\lambda_{1,2} = \pm 2i$. Точка O' имеет коразмерность 1 (простой седло-узел), в то время как точка O имеет коразмерность 3, потому что двумерная дивергенция $\sigma(z) = P'_x + Q'_y = -z^2 + \dots$ в O начинается с квадратного члена z . Это означает, что из O в (x, y) -плоскости может возникнуть двойной (полуустойчивый) цикл [51].

Бифуркационная диаграмма представлена на рис. 12.4.4. Когда $\varepsilon > 0$, седло-узел O' исчезает, в то время как состояние равновесия O расщепляется на два: O_1 и O_2 (область b на рис. 12.4.4), где $z_{O_{1,2}} = \mp \sqrt{2\varepsilon} + \dots$. В этой области точка O_1 устойчива, а O_2 является седло-фокусом типа $(2, 1)$, одномерные сепаратрисы которого стремятся к O_1 при $t \rightarrow +\infty$ (рис. 12.4.5(b)). Когда μ возрастает, точка O_1 теряет устойчивость через надкритическую бифуркацию Андронова–Хопфа на кривой AN_1 (рис. 12.4.4) и становится седло-фокусом $(1, 2)$, а неустойчивые сепаратрисы седло-фокуса O_2 теперь стремятся к только что возникшей периодической орбите, как показано на рис. 12.4.5(c). Состояние равновесия O_2 претерпевает бифуркацию на кривой AN_2 . Это также надкритическая бифуркация Андронова–Хопфа,

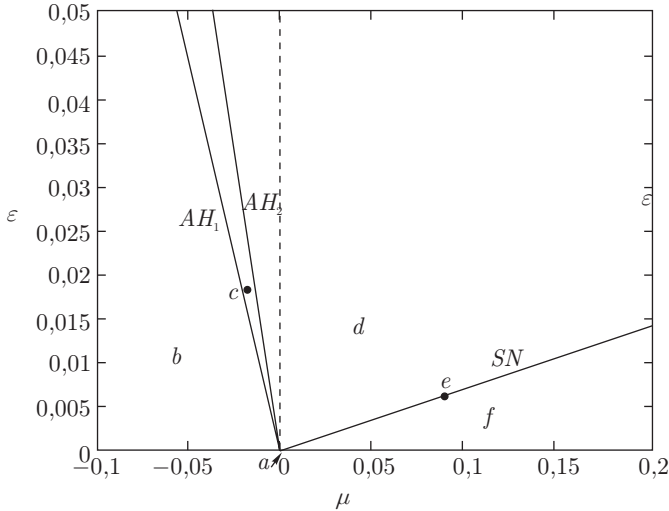


Рис. 12.4.4. Бифуркационная диаграмма системы (12.4.5) на плоскости (μ, ε)

поэтому оно становится вполне отталкивающим. Неустойчивое многообразие седловой периодической орбиты L_2 продолжает стремиться к L_1 при $t \rightarrow +\infty$, как показано на рис. 12.4.5 (d). На бифуркационной кривой, обозначенной SN , оба цикла сливаются, образуя при этом седло-узловой цикл L^* , неустойчивое многообразие которого является двоякоасимптотическим к L^* , как показано на рис. 12.4.5 (e). Справа от кривой SN цикл L^* исчезает, и, в соответствии с теоремой 12.9, глобальную устойчивость наследует новая устойчивая периодическая орбита L_{bs} с большой амплитудой, которая негомотопична ни к L_1 , ни к L_2 .

Другой тип примеров, в которых естественным образом возникает катастрофа голубого неба дается сингулярно возмущенными системами, т. е. системами вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= g(x, y, \varepsilon), \\ \varepsilon \dot{y} &= h(x, y, \varepsilon), \end{aligned} \quad (12.4.6)$$

где ε — малый параметр. Эта система может быть регуляризована изменением масштаба времени $t = \varepsilon \tau$. В новом времени τ система (12.4.6) принимает вид

$$\begin{aligned} x' &= \varepsilon g(x, y, \varepsilon), \\ y' &= h(x, y, \varepsilon), \end{aligned} \quad (12.4.7)$$

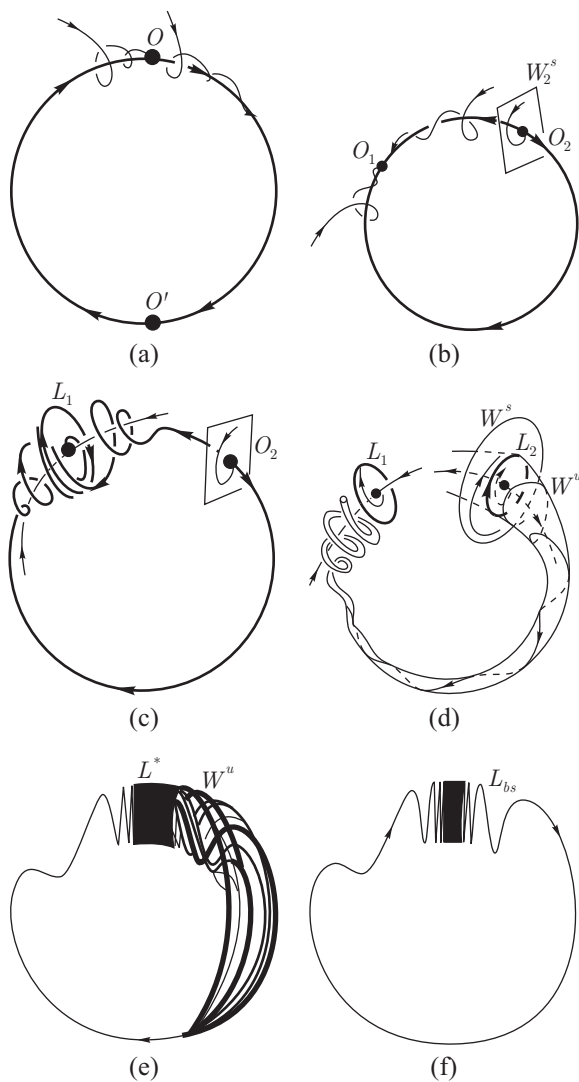


Рис. 12.4.5. Путь к катастрофе голубого неба в (12.4.5) при изменении μ, ε от (a) до (f) на рис. 12.4.4

где штрих обозначает дифференцирование по τ . В пределе $\varepsilon = 0$ получаем

$$\begin{aligned} x' &= 0, \\ y' &= h(x, y, 0). \end{aligned} \quad (12.4.8)$$

Второе уравнение здесь называется быстрой системой. Для простоты мы полагаем, что $x \in \mathbb{R}^1$. Переменную x можно рассматривать как параметр, который управляет движением быстрой переменной y .

Траектория системы (12.4.8), начинающаяся с некоторого (x, y) , стремится, в типичном случае, к аттрактору быстрой системы, соответствующей выбранному значению x . Этим аттрактором может быть устойчивое состояние равновесия, или устойчивая периодическая орбита, или что-либо с менее тривиальной структурой — здесь мы не исследуем последнюю возможность. Когда состояние равновесия или периодическая орбита быстрой системы являются грубыми, они гладко зависят от x . Таким образом, мы получаем гладкие притягивающие инвариантные многообразия системы (12.4.8): состояния равновесия быстрой системы образуют кривые M_{eq} , а периодические орбиты образуют двумерные цилиндры M_{po} , как показано на рис. 12.4.6. Локально, вблизи каждой грубой быстрой точки равновесия или периодической орбиты, такое многообразие по отношению к системе (12.4.8) является центральным многообразием. Поскольку центральное многообразие существует в любой близкой системе (см. главу 5), в системе (12.4.7) при всех малых ε существуют гладкие притягивающие инвариантные многообразия $M_{\text{eq}}(\varepsilon)$ и $M_{\text{po}}(\varepsilon)$ [48].

Таким образом, траектория системы (12.4.7) при малых ε ведет себя следующим образом: в течение некоторого конечного времени она подходит к малой окрестности одного из инвариантных многообразий M_{eq} или M_{po} , так что ее координата x остается почти постоянной. Затем траектория движется вдоль инвариантного многообразия, что соответствует медленному изменению x . Что касается исходной системы (12.4.6), то мы видим скачок переменных y к инвариантному многообразию, после чего переменная x меняется с конечной скоростью. Кроме того, если это многообразие быстрой периодической орбиты, то мы имеем быстрое круговое движение переменных y на многообразии, как изображено на рис. 12.4.7.

Состояния равновесия быстрой системы находятся из условия $h(x, y, 0) = 0$, которое задает уравнение M_{eq} . Если $y = y_{\text{eq}}(x)$ — устойчивая ветвь M_{eq} , то эволюция x вдоль нее в первом приближении по ε задается уравнением

$$\dot{x} = g(x, y_{\text{eq}}(x), 0). \quad (12.4.9)$$

Это одномерная система, которая может иметь устойчивые и неустойчивые состояния равновесия, соответствующие устойчивым и седловым состояни-

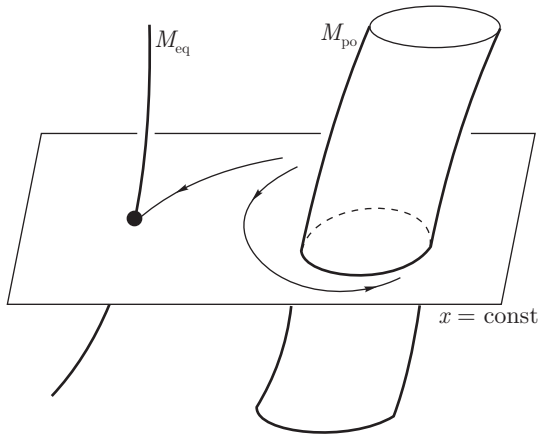


Рис. 12.4.6. Грубые состояния равновесия и предельные циклы быстрой системы при изменении x составляют инвариантные многообразия: соответственно кривую M_{eq} и двумерный цилиндр M_{po}

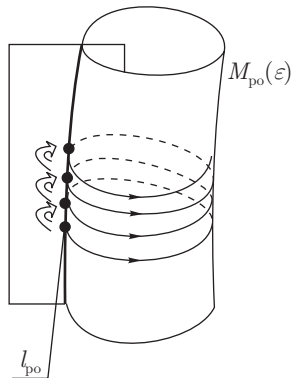


Рис. 12.4.7. Быстрое круговое движение вдоль инвариантного цилиндра $M_{po}(\epsilon)$ определяет отображение Пуанкаре на линии пересечения с секущей

ям равновесия полной системы (12.4.6) или (12.4.7). Эволюция вдоль M_{eq} либо ограничена одной из устойчивых точек, либо она достигает малой окрестности критических значений x . Напомним, что мы рассматриваем x в качестве управляющего параметра быстрой системы и критические значения x соответствуют бифуркациям в быстрой системе. В частности,

при некотором x^* два состояния равновесия (устойчивое и седловое) могут слиться в седло-узел. Это соответствует максимуму (или минимуму) x на M_{eq} , следовательно, значение x не может возрастать дальше (соответственно убывать) вдоль устойчивой ветви M_{eq} после того, как оно достигнет малой окрестности x^* . Вместо этого орбита скачком перемещается к новому аттрактору, который является ω -предельным множеством сепаратрисы седло-узла быстрой системы при $x = x^*$, как показано на рис. 12.4.8.

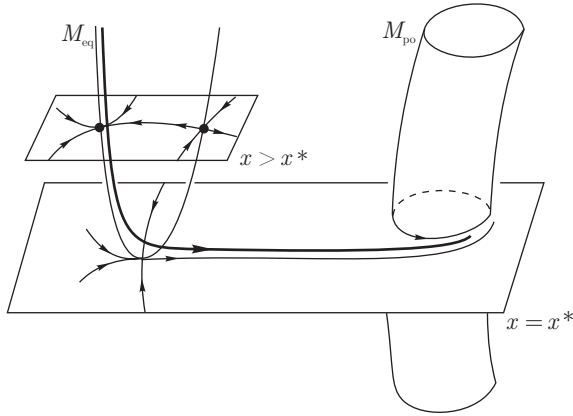


Рис. 12.4.8. В критический момент эволюционирующий устойчивый узел соединяется с седлом и исчезает. Изображающая точка скачком перемещается на устойчивый цилиндр

Для того чтобы определить эволюцию x вдоль цилиндра M_{po} , мы должны найти уравнение $y = y_{\text{po}}(\tau; x)$ соответствующей быстрой периодической орбиты, затем подставить $y = y_{\text{po}}(t\varepsilon; x)$ в правую часть первого уравнения (12.4.6) и усреднить его за один период. Результат усреднения даст приближение первого порядка для движения x вдоль устойчивой ветви M_{po} , а именно:

$$\dot{x} = \phi(x) \equiv \frac{1}{T(x)} \int_0^{T(x)} g(x, y_{\text{po}}(\tau; x)) d\tau, \quad (12.4.10)$$

где $T(x)$ — период быстрой периодической орбиты, отвечающей заданному значению x . Пересекая цилиндр секущей, трансверсальной быстрому движению, находим отображение Пуанкаре на линии пересечения $l_{\text{po}}(\varepsilon)$, как

показано на рис. 12.4.7, первое приближение к которому задается как

$$\bar{x} = x + \varepsilon \phi(x) T(x). \quad (12.4.11)$$

Это одномерное отображение, которое может иметь устойчивые и неустойчивые неподвижные точки (в нулях $\phi(x)$). Они соответствуют устойчивым и седловым периодическим орбитам системы (12.4.6). Эволюция вдоль l_{eq} либо стремится к одной из устойчивых неподвижных точек, либо достигает малую окрестность критического значения x . В частности, при некотором x^* устойчивая быстрая периодическая орбита сливается с седловой периодической орбитой в седло-узел, затем орбита должна скачком переместиться к ω -предельному множеству неустойчивого многообразия седло-узла быстрой системы при $x = x^*$.

Теперь предположим, что сингулярно возмущенная система имеет кривую M_{eq} устойчивого состояния равновесия быстрой системы, вдоль которой переменная x уменьшается, пока не достигнет критического значения x_1^* . При $x = x_1^*$ траектории скачком перемещаются к M_{po} , как показано на рис. 12.4.9 (отметим, что y должна быть по крайней мере трехмерной, чтобы этот частный случай стал возможным). Пусть отображение Пуанкаре на кривой $l_{po}(\varepsilon)$ имеет неподвижную точку типа седло-узел. Она соответствует седловой периодической орбите L на цилиндре $M_{po}(\varepsilon)$. Выше L неустойчивое многообразие этой периодической орбиты совпадает с $M_{po}(\varepsilon)$. После скачка при $x = x_2^*$ многообразие W_L^u стягивается в чрезвычайно узкую трубку, которая идет вдоль кривой M_{eq} , пока она не совершит новый скачок при $x = x_1^*$, после которого она возвращается к L снизу, обматываясь вокруг M_{po} . Это дает в точности конфигурацию, требующуюся для теоремы 12.9; более того, можно проверить, что при этом также выполняется требуемое теоремой условие сжатия. Таким образом, в сингулярно возмущенных системах рассматриваемого типа возникает катастрофа голубого неба.

Быстрые скачки от одной устойчивой ветви к другой служат наиболее типичным явлением в сингулярно возмущенных системах, так что можно ожидать катастрофу голубого неба каждый раз, когда наблюдаются скачки между ветвями быстрых периодических орбит и быстрых состояний равновесия.

В заключение отметим, что механизм, предложенный выше, может быть полезен для качественного объяснения часто наблюдаемых переходов от тонических колебаний к большим пачечным колебаниям в моделях нейронной активности (см. приложение С).

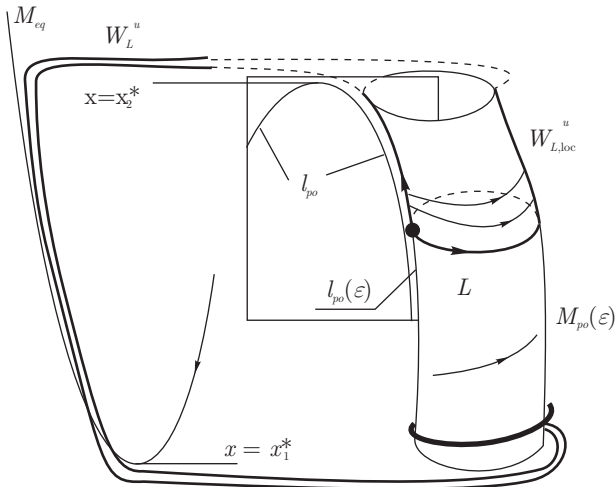


Рис. 12.4.9. Механизм катастрофы голубого неба в быстро-медленных системах

12.5. О вложении в поток

Этот параграф посвящен вопросу о локальном поведении потока вблизи седло-узловой периодической орбиты. Поскольку динамика в направлениях, трансверсальных центральному многообразию, тривиальна (это сильное сжатие), мы ограничиваем наше исследование только системами на центральном многообразии:

$$\dot{x} = G(x, \varphi, \mu), \quad \dot{\varphi} = 1, \quad (12.5.1)$$

где $x \in \mathbb{R}^1$, $\varphi \in \mathbb{S}^1$ и G является гладкой функцией, периода один по φ , такой, что $G(0, \varphi, 0) \equiv 0$. Мы полагаем, что $L : \{x = 0\}$ является седло-узловой периодической орбитой при $\mu = 0$, которая исчезает при $\mu > 0$.

Основной результат здесь состоит в том, что эволюция переменной x в этой системе при $\mu \geq 0$ может быть описана автономным уравнением (т.е. не зависящим от угловой переменной φ). Непосредственной пользой от этого является то, что такие уравнения легко интегрируются (поскольку x одномерно), что позволяет получить асимптотику локальной динамики вблизи седло-узла.

Пусть G достаточно гладкая по (x, φ, μ) . Из теоремы 3.23 (см. параграф 3.14) следует, что мы всегда можем считать, что некоторая достаточно длинная часть разложения Тейлора для G по степеням x и μ не зависит от φ .

Мы полагаем также, что L — простой седло-узел. Таким образом, функцию G можно представить в виде

$$G(x, \varphi, \mu) = \mu + x^2 + O(x^2 + \mu) \quad (12.5.2)$$

при $\mu \geq 0$. Как уже упоминалось, порядок зависящих от φ членов в G может быть сделан сколь угодно высоким. Следовательно, мы можем взять такое произвольно большое k , что при подходящем выборе переменной x мы будем иметь

$$\lim_{\mu \rightarrow +0, x \rightarrow 0} \frac{1}{G^k} \frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0. \quad (12.5.3)$$

Мы также можем потребовать

$$\lim \frac{1}{G^k} \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} = 0, \quad \lim \frac{1}{G^k} \frac{\partial^3 G}{\partial \varphi^3} = 0, \dots \quad (12.5.4)$$

для произвольного заданного количества производных.

Лемма 12.3. *При $\mu \geq 0$ существует гладкое преобразование угловой переменной $\varphi \mapsto \Phi$ и замена времени, которые приводят систему к автономному виду*

$$\dot{x} = \tilde{g}(x, \mu), \quad \dot{\Phi} = 1. \quad (12.5.5)$$

Как мы упоминали, важность этого результата заключается в том, что время перехода с любой секущей $x = \text{const}$ на любую другую секущую того же вида *не зависит от начальной точки на секущей*. Таким образом, когда система приведена к виду (12.5.5), верна лемма 12.2, что в свою очередь влечет принцип редукции теоремы 12.4.

Отметим, что, когда система имеет вид (12.5.5), локальное отображение Пуанкаре на секущей $\Phi = 0$ совпадает со сдвигом на единицу времени автономного потока, заданного уравнением $\dot{x} = \tilde{g}(x, \mu)$. В таких случаях говорят, что отображение вложено в поток. Строго говоря, мы еще не доказали, что локальное отображение Пуанкаре исходной системы (12.5.1) вложено в поток: исходное отображение Пуанкаре определено на другой секущей: $\varphi = 0$. Однако замена секущей эквивалентна замене переменных на секущей (см. параграф 3.1), а тот факт, что отображение может быть вложено в поток, не зависит от выбора координат.

Докажем лемму. Пусть $\tau(x; x_0, \varphi_0, \mu)$ — время, за которое орбита (12.5.1), начинающаяся в $(x = x_0, \varphi = \varphi_0)$, достигает заданного значения x . Так как $\dot{x} > 0$ при $\mu > 0$ и при $\mu = 0, x \neq 0$, то гладкая функция τ определена при $\mu > 0$ для всех малых x и x_0 , а при $\mu = 0$ — для x_0 и x одного знака. Обозначим

$$u \equiv \frac{\partial \tau}{\partial \varphi_0}.$$

Докажем, что при $\mu \rightarrow +0$ функция u имеет конечный предел, в гладкой топологии, равномерно для всех φ_0 и для всех малых x_0 и x таких, что $x_0 \neq 0$ и $x \cdot x_0 \geq 0^5$.

Действительно, интегрирование системы (12.5.1) дает

$$\varphi = \varphi_0 + \tau(x; x_0, \varphi_0, \mu), \quad (12.5.6)$$

$$\tau(x; x_0, \varphi_0, \mu) = \int_{x_0}^x \frac{ds}{G(s, \varphi_0 + \tau(s; x_0, \varphi_0, \mu), \mu)}. \quad (12.5.7)$$

Дифференцируя (12.5.7) по φ_0 , мы находим, что

$$u(x) = - \int_{x_0}^x \frac{1}{G^2} \frac{\partial G}{\partial \varphi} \bigg|_{(s, \varphi_0 + \tau(s), \mu)} [1 + u(s)] ds \quad (12.5.8)$$

(для краткости мы не указываем зависимость τ от (x_0, φ_0, μ)). В силу (12.5.3) имеем

$$\frac{G'_\varphi}{G^2} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \mu \rightarrow +0, \quad x \rightarrow 0, \quad (12.5.9)$$

поэтому интегральный оператор в правой части (12.5.8) является сжимающим. Таким образом, в силу банахова принципа сжимающих отображений, функцию u можно найти методом последовательных приближений как единственное непрерывное решение интегрального уравнения (12.5.8).

В силу принципа сжимающих отображений, решение $u(x; x_0, \varphi_0, \mu)$ непрерывно зависит от (x_0, φ_0, μ) , если интегральный оператор правой части (12.5.8) непрерывно зависит от этих данных. Отметим, что функция τ , входящая в выражение (12.5.8), имеет конечный предел при $\mu = 0$, только если $x \cdot x_0 > 0$. Тем не менее, в силу (12.5.9), интеграл в (12.5.8) имеет конечный предел при $x = 0$. Таким образом, функция $u(x; x_0, \varphi_0, \mu)$ имеет конечный предел при $\mu = 0$ равномерно в области $\{x \cdot x_0 \geq 0, x_0 \neq 0\}$.

Используя оценки (12.5.4), мы можем повторить эти рассуждения для любого заданного количества производных от u по φ_0, x_0 и μ (можно сделать их число произвольно большим, увеличивая значение k в оценках). Это завершает доказательство утверждения.

Теперь, поскольку правая часть уравнения (12.5.8) для функции u мала при малых x, x_0 и μ , функция u сама является малой. Более того, она

⁵Здесь важно то, что мы имеем сходимость и при $x = 0$, несмотря на то что функция τ стремится к бесконечности при $\mu \rightarrow +0, x \rightarrow 0$.

равномерно стремится к нулю при $x - x_0 \rightarrow 0$. То же самое верно для производных от u (потому что они находятся из интегральных уравнений того же типа). Теперь мы видим, что функция $u(0; x_0, \varphi_0, \mu)$ определена и является гладкой для всех $\mu \geq 0$ (априори могло случиться, что функция u или некоторые из ее производных при $\mu \rightarrow +0$ имеют разные пределы в $x_0 = +0$ и $x_0 = -0$, но все эти пределы равны нулю, как мы только что доказали).

Введем новую угловую переменную

$$\Phi = \varphi + \int_0^\varphi u(0; x, \phi, \mu) d\phi. \quad (12.5.10)$$

Это правильная замена переменных, поскольку u мала. Более того, u является производной от периодической функции ($u = \frac{\partial \tau}{\partial \varphi_0}$), следовательно, интеграл в правой части действительно задает периодическую функцию.

Пусть, в старых переменных, орбита, которая начинается с (x_0, φ_0) , достигает точки (x_1, φ_1) в момент времени $\tau(x_1; x_0, \varphi_0, \mu)$. Дифференцируя очевидное равенство

$$\tau(x_1; x_0, \varphi_0, \mu) = \tau(0; x_0, \varphi_0, \mu) - \tau(0; x_1, \varphi_1, \mu)$$

(время перехода от x_0 к x_1 равно времени перехода от x_0 к 0 плюс время перехода от 0 к x_1), мы получаем

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_0} = \frac{1 + u(0; x_0, \varphi_0, \mu)}{1 + u(0; x_1, \varphi_1, \mu)}.$$

Сравнивая эту формулу с (12.5.10), мы видим, что в новых переменных

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \Phi_0} \equiv 1. \quad (12.5.11)$$

Сделаем замену времени таким образом, чтобы $\dot{\Phi} = 1$. Теперь разность между Φ_1 и Φ_0 является временем перехода от $x = x_0$ к $x = x_1$. В силу (12.5.11) это время не зависит от исходного значения Φ_0 , а зависит только от (x_0, x_1, μ) . Это означает, что $\frac{dx}{d\Phi}$ теперь не зависит от Φ , что доказывает лемму. ■

Как мы упоминали, лемму 12.3 можно переформулировать как возможность вложения достаточно гладкого одномерного отображения вблизи простого седло-узла в гладкий одномерный поток при $\mu \geq 0$. Аналогичный результат был доказан в [74] в связи с задачей о появлении сепаратрисных связок между седлами при исчезновении полуустойчивого цикла на плоскости (см. параграф 8.1) и в [45] в связи с задачей о рождении странных аттракторов при исчезновении седло-узловой периодической орбиты на негладком торе. Вложение в поток при $\mu = 0$ доказано Такенсом (см. [97]). Наше доказательство основано на методе из [152, 139]. В [140] существование гладкого вложения в поток при $\mu = 0$ доказано без предположения о высокой гладкости и о том, что седло-узел простой.

При определении существенного отображения в параграфе 12.2 мы использовали следующее свойство единственности вложения в поток.

Лемма 12.4. Пусть $\mathbb{C}^r$ -гладкое ($r \geq 2$) отображение

$$\bar{x} = x + g(x) \quad (12.5.12)$$

имеет седло-узел при $x = 0$, т. е. $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$ и $g(x) > 0$ при всех $x \neq 0$. Пусть это отображение совпадает с отображением сдвига на единицу времени для гладкого потока

$$\bar{x} = x + \tilde{g}(x). \quad (12.5.13)$$

Тогда функция $\tilde{g}$ определяется функцией g однозначно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение (12.5.12) совпадает с отображением сдвига на единицу времени для потока (12.5.12) тогда и только тогда, когда

$$\int_x^{\bar{x}} \frac{ds}{\tilde{g}(s)} = 1. \quad (12.5.14)$$

Так как $x = 0$ для (12.5.13) должна быть неподвижной точкой с мультипликатором, равным 1, то $\tilde{g}$ должна обращаться в нуль вместе с $\tilde{g}'$ в начале координат. Далее, взяв предел $x \rightarrow 0$ в (12.5.14), получаем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tilde{g}(x)}{g(x)} = 1 \quad (12.5.15)$$

(для доказательства заметим, что

$$\int_x^{\bar{x}} \frac{ds}{\tilde{g}(s)} = \frac{\bar{x} - x}{\tilde{g}(x) + \frac{1}{2}\tilde{g}'(x)(\bar{x} - x) + o(\bar{x} - x)} \sim \frac{g(x)}{\tilde{g}(x)};$$

здесь мы используем гладкость $\tilde{g}$ в нуле).

Дифференцируя (12.5.14), мы получаем

$$\frac{1 + g'(x)}{\tilde{g}(\bar{x})} - \frac{1}{\tilde{g}(x)} = 0. \quad (12.5.16)$$

Следовательно, если существует две функции $\tilde{g}_1$ и $\tilde{g}_2$, которые дают вложение отображения (12.5.12) в поток, то (12.5.16) влечет

$$\frac{\tilde{g}_1(\bar{x})}{\tilde{g}_2(\bar{x})} = \frac{\tilde{g}_1(x)}{\tilde{g}_2(x)}.$$

Другими словами, отношение $\tilde{g}_1/\tilde{g}_2$ инвариантно относительно отображения (12.5.12). Поскольку любая орбита (12.5.1) стремится к нулю либо при итерациях вперед, либо при итерациях назад, мы получаем, что

$$\frac{\tilde{g}_1(x)}{\tilde{g}_2(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tilde{g}_1(x)}{\tilde{g}_2(x)}.$$

В силу (12.5.15) мы имеем, что $\tilde{g}_1 \equiv \tilde{g}_2$, и это завершает доказательство леммы 12.4.

ГЛАВА 13

Бифуркации гомоклинических петель седловых состояний равновесия

Задача о рождении предельного цикла из петли сепаратрисы к седлу была решена Андроновым и Леонтовичем в двумерном случае уже в конце 30-х годов, хотя соответствующие публикации появились годы спустя. Их исследования по этой тематике охватывают как общий случай, так и случай сколь угодно высокого вырождения. В последнем случае их теория была связана с работой Дюлака, касающейся устойчивости петли сепаратрисы. Мы приводим их результаты в первых трех параграфах этой главы. Наше доказательство основной теоремы отличается от классического [12]. В частности, мы явно сведем задачу к исследованию отображения Пуанкаре вблизи петли. Такой подход позволяет естественно распространить результаты на многомерный случай.

В некоторых случаях, применяя теорему о центральном многообразии вблизи гомоклинической петли (глава 6), можно свести многомерную задачу к двумерной. Следует, однако, подчеркнуть, что такая редукция к двумерному случаю возможна не всегда. В частности, ее нельзя произвести, когда состояние равновесия является седло-фокусом. Кроме того, при некоторых условиях мы сталкиваемся с новым важным явлением, когда в окрестности гомоклинической петли к седло-фокусу существует бесконечно много седловых периодических орбит. Таким образом, задача нахождения границ устойчивости периодических орбит в многомерном случае требует полного и детального анализа всех случаев гомоклинических петель коразмерности один как с простой, так и со сложной динамикой. Эта задача была решена Л. Шильниковым в 60-х годах.

Основная теорема о рождении устойчивой периодической орбиты из гомоклинической петли к седлу с отрицательной седловой величиной доказывается в параграфе 13.4. В параграфах 13.4 и 13.5 (последний относится к случаю, когда размерность неустойчивого многообразия седла больше единицы) мы также доказываем, что в других случаях либо из петли рождается седловая периодическая орбита, либо система имеет сложную динамику (в случае седло-фокуса).

Мы изучаем некоторые гомоклинические бифуркации коразмерности два в параграфе 13.6. В параграфе 13.7 мы даем обзор бифуркаций гомоклинической восьмерки и простейших гетероклинических контуров.

13.1. Устойчивость петли сепаратрисы на плоскости

Предположим, что гладкая двумерная система

$$\dot{x} = X(x)$$

имеет грубое состояние равновесия $O(0, 0)$ седлового типа. Напомним, что в этом случае седло имеет два одномерных локальных инвариантных многообразия: устойчивое многообразие

$$W_O^s = O \cup \Gamma_1^+ \cup \Gamma_2^+$$

и неустойчивое многообразие

$$W_O^u = O \cup \Gamma_1^- \cup \Gamma_2^-,$$

где $\Gamma_{1,2}^+$ обозначает устойчивые сепаратрисы, а $\Gamma_{1,2}^-$ обозначает неустойчивые сепаратрисы седла O .

Если Γ_1^+ и Γ_1^- совпадают, то $\Gamma = \Gamma_1^+ = \Gamma_1^-$ называется *петлей сепаратрисы* (или *гомоклинической петлей*). Замыкание $\bar{\Gamma}$ петли сепаратрисы есть инвариантное замкнутое множество $\bar{\Gamma} = O \cup \Gamma$. Наша цель здесь состоит в описании поведения траекторий в достаточно малой окрестности $\bar{\Gamma}$ (бифуркации петли сепаратрисы рассматриваются в следующем параграфе).

Достаточно малая окрестность $\bar{\Gamma}$ является кольцом, которое разбивается кривой $\bar{\Gamma}$ на две области; мы обозначаем их U и V , как показано на рис. 13.1.1. Пусть V — внешняя область, внутри которой лежат два малых примыкающих к O куска сепаратрис Γ_2^+ и Γ_2^- . Ясно, что все другие траектории из V должны покидать V как при $t \rightarrow -\infty$, так и при $t \rightarrow +\infty$. Следовательно, мы можем говорить об устойчивости $\bar{\Gamma}$ только с одной стороны, т. е. со стороны внутренней области U . В такой ситуации мы говорим, что петля сепаратрисы асимптотически односторонне устойчива, если она является ω -предельной для всех траекторий, начинающихся в U^1 . Наоборот, петля сепаратрисы неустойчива, если она является α -предельной для всех траекторий из U .

¹Может оказаться так, что $\bar{\Gamma}$ является односторонне устойчивой, но не асимптотически. Например, в случае гамильтоновых систем область U может быть заполнена периодическими орбитами.

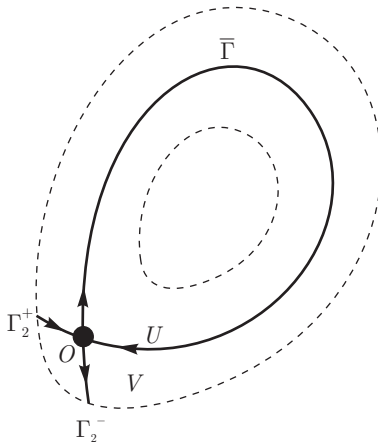


Рис. 13.1.1. Петля сепаратрисы $\bar{\Gamma}$ находится внутри кольца, состоящего из внешней окрестности V и внутренней окрестности U

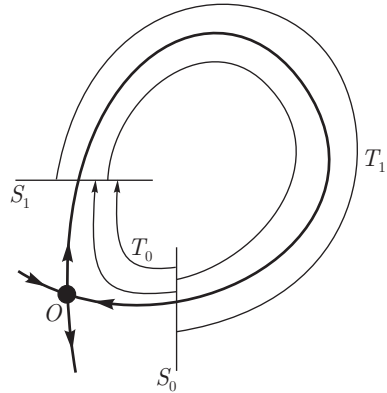


Рис. 13.1.2. Отображение Пуанкаре T представлено как локальное отображение T_0 по траекториям системы с секущей S_0 на секущую S_1 и глобальное отображение T_1 с S_1 на S_0

Основным методом изучения гомоклинической петли является построение отображения Пуанкаре T как суперпозиции двух отображений: локального отображения T_0 и глобального отображения T_1 . Для этого выберем две трансверсальные к Γ секущие S_0 и S_1 вблизи седла, как показано на рис. 13.1.2. Отображение $T_1 : S_1 \rightarrow S_0$ задается следующим образом: возьмем любую точку на S_1 — ее образом в T_1 служит точка пересечения ее траектории с S_0 . Так как время перехода из S_1 в S_0 ограничено, то T_1 — диффеоморфизм и он хорошо аппроксимируется разложением Тейлора вблизи точки пересечения Γ с S_1 . Что касается отображения $T_0 : S_0 \rightarrow S_1$, ситуация здесь менее очевидна, потому что траектории могут проходить сколь угодно близко к седлу. Таким образом, время перехода из S_0 в S_1 не ограничено сверху.

Следовательно, важной задачей при изучении гомоклинических петель является получение подходящих оценок для локального отображения T_0 . Для этого мы приводим систему в окрестности O к специальному виду (см. приложение А в части 1 этой книги).

Задача об устойчивости петли сепаратрисы на плоскости легко решается, когда так называемая седловая величина

$$\sigma_0 = \operatorname{div} X|_O$$

не равна нулю. В этом случае мы получаем следующий результат:

Теорема 13.1. *Если $\sigma_0 < 0$, гомоклиническая петля $\bar{\Gamma}$ асимптотически односторонне устойчива. Если $\sigma_0 > 0$, гомоклиническая петля $\bar{\Gamma}$ неустойчива.*

Здесь мы доказываем эту теорему для случая, когда система $\mathbb{C}^r$ -гладкая с $r \geq 2$. В $\mathbb{C}^1$ -случае теорема по-прежнему верна (см. следующий параграф).

Выпрямим локальное устойчивое и неустойчивое инвариантные многообразия. Тогда система вблизи O принимает вид (см. параграф 2.7)

$$\dot{x} = (\lambda + f(x, y))x, \quad \dot{y} = (\gamma + g(x, y))y, \quad (13.1.1)$$

где $\lambda < 0 < \gamma$ и $\mathbb{C}^{r-1}$ -гладкие функции f и g обращаются в нуль в начале координат. Отметим, что $\sigma_0 = \lambda + \gamma$. Напомним, что мы можем сделать такое дополнительное $\mathbb{C}^{r-1}$ -гладкое преобразование координат, что система сохранит вид (13.1.1), но функции f и g будут удовлетворять следующим тождествам (см. теорему 2.17):

$$f(x, 0) \equiv 0, \quad f(0, y) \equiv 0, \quad (13.1.2)$$

$$g(x, 0) \equiv 0, \quad g(0, y) \equiv 0. \quad (13.1.3)$$

Известно (см., например, [27]), что $\mathbb{C}^r$ -систему ($r \geq 2$) вблизи седла на плоскости можно привести к линейному виду при помощи $\mathbb{C}^1$ -преобразования, и в этом случае найти отображение T_0 очень просто. Однако, вид (13.1.1)–(13.1.3) больше подходит для наших целей, так как в этом случае нет существенной потери гладкости. Более того, метод, который мы развиваем, можно непосредственно обобщить на многомерный случай.

Сделаем замену времени $dt \rightarrow (\gamma + g(x, y))^{-1} dt$. Тогда система принимает вид

$$\dot{x} = (-\nu + f(x, y))x, \quad \dot{y} = y \quad (13.1.4)$$

с некоторой новой функцией f , которая по-прежнему удовлетворяет (13.1.2). Отношение $\nu = |\lambda/\gamma|$ называется *седловым индексом*. Отметим, что $\nu > 1$ соответствует отрицательной седловой величине σ_0 , а $\nu < 1$ соответствует $\sigma_0 > 0$.

Выберем малое $d > 0$, и пусть $x = d$ — секущая S_0 , а $y = d$ — секущая S_1 (мы полагаем, что сепаратрисы Γ_1^+ и Γ_1^- примыкают к седловой точке O со стороны положительных x и y соответственно). Если бы система являлась локально линейной (т. е. если бы f тождественно равнялось нулю в (13.1.4)), то решением с начальными условиями (d, y_0) на S_0 было бы

$$x = e^{-\nu t}d, \quad y = y_0 e^t.$$

Время перехода τ из S_0 в S_1 можно найти из условия

$$d = y_0 e^\tau.$$

Следовательно,

$$\tau = -\ln \frac{y_0}{d}$$

(очевидно, что траектория, начинающаяся при $y_0 \leq 0$, никогда не достигает S_1). Таким образом, в линейном случае точка (x_1, d) пересечения траектории с секущей S_1 находится как

$$x_1 = e^{-\nu t} d = y_0^\nu d^{1-\nu}.$$

В общем случае, когда f не равно нулю, формула для локального отображения значительно не изменяется.

Лемма 13.1. *Если функция f удовлетворяет тождеству (13.1.2), то локальное отображение для системы (13.1.4) имеет вид*

$$x_1 = y_0^\nu d^{1-\nu} + o(y_0^\nu). \quad (13.1.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно показать, что решение системы (13.1.4), начинающееся на S_0 при $t = 0$ и попадающее в S_1 при $t = \tau$, удовлетворяет

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{t-\tau} d, \\ x(t) &= e^{-\nu t} d + \int_0^t e^{-\nu(t-s)} f(x(s), y(s)) x(s) ds. \end{aligned} \quad (13.1.6)$$

При этом $y(0) \equiv y_0$ — координата начальной точки на S_0 , а $x(\tau) \equiv x_1$ — координата точки пересечения траектории с S_1 .

Как показано в параграфе 2.8, интегральное уравнение (13.1.6) решается методом последовательных приближений, т. е. решение $x(t)$ является пределом последовательности $x_n(t)$, индуктивно определяемой по правилу

$$x_{n+1}(t) = e^{-\nu t} d + \int_0^t e^{-\nu(t-s)} f(x_n(s), e^{s-\tau} d) x_n(s) ds, \quad (13.1.7)$$

где $x_1(t) = e^{-\nu t} d$ берется в качестве первого приближения. Легко видеть, что все дальнейшие приближения удовлетворяют

$$|x_n(t)| \leq 2d e^{-\nu t} \quad (13.1.8)$$

для $t \in [0, \tau]$. Действительно, по индукции, достаточно доказать, что

$$\int_0^t |f(x_n(s), e^{s-\tau}d)| ds \leq \frac{1}{2}$$

при условии, что (13.1.8) выполнено. Так как f является гладкой функцией, обращающейся в нуль при $y = 0$, то $|f(x, y)| \leq C|y|$ для некоторой постоянной C . Таким образом, вышеприведенный интеграл оценивается как

$$Cde^{-\tau} \int_0^t e^s ds \leq Cd.$$

Очевидно, что этот интеграл меньше $\frac{1}{2}$ при условии, что d достаточно мало. Это доказывает неравенство (13.1.8). Взяв предел $n \rightarrow +\infty$, мы находим, что решение $x(t)$ системы удовлетворяет той же оценке, т. е.

$$|x(t)| \leq 2de^{-\nu t}. \quad (13.1.9)$$

По условию (см. (13.1.2)) функция f обращается в нуль при $y = 0$. Таким образом:

$$|f(x, y)| \leq |y| \max |f'_y|,$$

где максимум берется по всем $|y| \leq d$ при фиксированном x . Поскольку f также обращается в нуль при $x = 0$, мы имеем $f'_y(0, y) \equiv 0$. Следовательно, вышеприведенное неравенство дает нам следующую оценку:

$$|f(x, y)| \leq |y| o(1)_{x \rightarrow 0}.$$

Таким образом, в (13.1.6) имеем

$$|f(x(s), y(s))| \leq e^{-\tau} o(e^s).$$

Отсюда, в силу (13.1.9), получаем

$$\left| \int_0^t e^{-\nu(t-s)} f(x(s), y(s)) x(s) ds \right| \leq e^{-\nu t} e^{-\tau} o(e^t).$$

При $t = \tau$ из (13.1.6) имеем, что

$$x_1 \equiv x(\tau) = e^{-\nu\tau} d + o(e^{-\nu\tau}). \quad (13.1.10)$$

Время перехода τ находится из первого уравнения (13.1.6) при $t = 0$:

$$y_0 = e^{-\tau} d.$$

Подставляя это выражение в (13.1.10), получаем лемму 13.1. ■

ЗАМЕЧАНИЕ. Нормировкой переменных $x_0 \rightarrow x_0 d$ и $y_1 \rightarrow y_1 d$ всегда можно добиться (и впредь мы будем это делать), чтобы в (13.1.5) $d = 1$. Отметим, что можно формулу (13.1.5) дифференцировать: s -я ($s = 1, \dots, r-1$) производная члена $o(y_0^\nu)$ в (13.1.5) оценивается как $o(y_0^{\nu-s})$. Мы опускаем доказательство этой оценки для производных, потому что оно построено по той же схеме, что и доказательство аналогичного утверждения (лемма 3.6) в приложении В в части 1 этой книги. Близкое утверждение также будет доказано в параграфе 13.8 [см. (13.8.30)–(13.8.33)]. Используя эти оценки в нашем случае, мы находим, что если система $\mathbb{C}^r$ -гладкая с $r \geq 3$, то после редукции к виду (13.1.1)–(13.1.3) локальное отображение можно записать в виде

$$x_1 = y_0^\nu + o(y_0^{\tilde{\nu}}) \quad (13.1.11)$$

для любого $\tilde{\nu}$ такого, что $\nu < \tilde{\nu} < \nu + \min(1, \nu)$. Более того, производная порядка s ($s = 1, \dots, r-2$) от члена $o(y_0^{\tilde{\nu}})$ оценивается как $o(y_0^{\tilde{\nu}-s})$.

Теперь рассмотрим глобальное отображение $T_1 : S_1 \rightarrow S_0$, заданное орбитами, близкими к той части Γ , которая лежит вне малой окрестности O . Напомним, что это глобальное отображение является диффеоморфизмом. Наличие гомоклинической петли к седлу O означает, что точка $x_1 = 0$ на S_1 отображается под действием T_1 в $y_0 = 0$ на S_0 . Таким образом, отображение T_1 можно записать в виде

$$\bar{y}_0 = Ax_1 + h(x_1),$$

где $A \neq 0$ и $h(x)$ стремится к нулю вместе со своей первой производной. Поскольку мы рассматриваем задачу на плоскости, отметим, что мы имеем $A > 0$ (случай $A < 0$ возможен для систем на неориентируемых двумерных поверхностях).

В конечном итоге мы приходим к следующей формуле для отображения $T = T_1 \circ T_0$:

$$\bar{y}_0 = Ay_0^\nu + o(y_0^\nu). \quad (13.1.12)$$

Из этой формулы сразу видно, что $\bar{y}_0 < y_0$ для любых достаточно малых положительных y_0 при условии, что $\nu > 1$ (или при условии, что $\nu = 1$ и $A < 1$). Таким образом, в этом случае итерации любой точки под действием отображения T стремятся к неподвижной точке $y_0 = 0$. Последняя является точкой пересечения петли сепаратрисы Γ с S_0 . Следовательно, любая траектория, начинающаяся со стороны положительных y_0 , должна стремиться к Γ при $t \rightarrow +\infty$. Это означает, что петля сепаратрисы асимптотически односторонне устойчива, если $\sigma_0 < 0$ или если $\sigma_0 = 0$ и $A < 1$.

Если $\nu < 1$ (т. е. $\sigma_0 > 0$) или если $\nu = 1$ (т. е. $\sigma_0 = 0$), но $A > 1$, мы имеем в (13.1.12) $y_0 < \bar{y}_0$. Таким образом, в этом случае итерации любой точки под действием обратного к отображению T стремятся к неподвижной точке $y_0 = 0$. Это означает, что гомоклиническая петля односторонне неустойчива. Это завершает доказательство. ■

Заметим, что мы попутно доказали следующее утверждение.

Теорема 13.2. Пусть $\sigma_0 = 0$. Тогда петля сепаратрисы устойчива, если $A < 1$, и неустойчива, если $A > 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как упоминалось ранее, теорема 13.1 верна также и для $\mathbb{C}^1$ -гладких систем. Однако теорема 13.2 не верна в $\mathbb{C}^1$ -случае. Для того чтобы показать это, рассмотрим следующий контрпример. Предположим, что система вблизи седла имеет следующий вид:

$$\dot{x} = -x, \quad \dot{y} = y \left[1 + \frac{1}{|\ln y| + 1} \right],$$

где $|x| \leq 1$ и $|y| \leq 1$. Ее решения, начинающиеся на секущей $S_0 : \{x = 1\}$ с положительным y_0 , имеют вид

$$x = e^{-t}, \quad y(|\ln y| + 2) = e^t y_0 (|\ln y_0| + 2).$$

Следовательно, локальное отображение T_0 с S_0 на $S_1 : \{y = 1\}$ имеет вид

$$x_1 = \frac{1}{2} y_0 (|\ln y_0| + 2).$$

Предположим также, что глобальное отображение T_1 линейно, т. е. $\bar{y}_0 = Ax_1$. В таком случае отображение Пуанкаре вблизи петли задается как

$$\bar{y}_0 = \frac{1}{2} A y_0 (|\ln y_0| + 2).$$

Очевидно, что $\bar{y}_0 > y_0$ для всех малых y_0 , откуда следует, что гомоклиническая петля здесь неустойчива, вне зависимости от значения A .

Данный пример показывает, что теорема 13.2 верна, только если система $\mathbb{C}^r$ -гладкая с $r \geq 2$. Отметим, что в этом случае интеграл

$$s_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{div} X(\varphi(t)) dt$$

сходится [где $(x, y) = \varphi(t)$ — параметрическое уравнение петли сепаратрисы Γ ; напомним, что $\sigma_0 = 0$ влечет $\operatorname{div} X(\varphi(t)) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \pm\infty$]. Действительное число s_1 называется *первой сепаратрисной величиной*. Очевидно, что это инвариант гладких преобразований координат.

Можно показать, что, когда $\sigma_0 = 0$, производную A глобального отображения $T_1 : S_1 \rightarrow S_0$ в точке $x_1 = 0$ можно найти² следующим образом:

$$A = e^{s_1}$$

при условии, что W^s и W^u локально распрямлены [т.е. система имеет вид (13.1.1)] и выполнены тождества (13.1.2) и (13.1.3). Таким образом, величина A в этом случае также инвариант.

Рассмотрим теперь случай, когда $\sigma_0 = 0$ и $s_1 = 0$. В первую очередь нам будет нужно привести систему (13.1.1) вблизи седла к некоторой нормальной форме. Отметим, что, так как $\sigma_0 \equiv \lambda + \gamma = 0$, то возникают следующие резонансы:

$$\begin{aligned}\lambda &= (m+1)\lambda + m\gamma, \\ \gamma &= m\lambda + (m+1)\gamma,\end{aligned}$$

где m — любое положительное целое число. Эти резонансы совпадают с теми, которые мы встречали в случае слабого фокуса. Соответствующий вид системы называется *канонической нормальной формой*.

Лемма 13.2. $\mathbb{C}^r$ -гладкая система вблизи резонансного седла с $\sigma_0 = 0$ приводится $\mathbb{C}^{r-(2n+1)}$ -гладким преобразованием, где $(r \geq 2n+2)$, к следующему виду:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x(1 - \sigma_1 xy - \dots - \sigma_n (xy)^n - (xy)^n f(x, y)), \\ \dot{y} &= y,\end{aligned}\tag{13.1.13}$$

где $\mathbb{C}^{r-(2n+1)}$ -гладкая функция f обращается в нуль тождественно как при $x = 0$, так и при $y = 0$ (см. (13.1.2)).

Коэффициенты $\sigma_i, \dots, \sigma_n$ называются *седловыми величинами*. Хотя они не инвариантны по отношению к гладким преобразованиям координат, тем не менее номер первой ненулевой седловой величины определяется по системе однозначно (как коэффициент при первом ненулевом резонансном члене) и, следовательно, является инвариантом.

Каноническая нормальная форма впервые была построена Дюлаком [47] в аналитическом виде. Гладкий случай рассматривался Е. А. Леонтович [85]. Ниже мы приводим краткий обзор доказательства Леонтович.

Отметим, что результат леммы 13.2 для случая $n = 0$ [см. (13.1.4)] уже получен нами как часть более общего утверждения (теорема 2.17). Таким

²Независимо от выбора константы d , которая определяет положение секущих S_0 и S_1 .

образом, мы можем далее продолжить по индукции. А именно предположим, что система уже приведена к виду (13.1.13) для некоторого $n = k$. Тогда, если $r \geq 2k + 4$, $\mathbb{C}^{r-(2k+1)}$ -гладкая функция f , по крайней мере, $\mathbb{C}^3$ -гладкая, и, так как f обращается в нуль как при $x = 0$, так и при $y = 0$, ее можно записать в виде

$$f(x, y) = xyF(x, y),$$

где F — $\mathbb{C}^{r-(2k+3)}$ -гладкая функция. Обозначим

$$F(x, y) = \sigma_{k+1} + \phi_1(x) + \phi_2(y) + \tilde{f}(x, y),$$

где ϕ_1 и ϕ_2 обращаются в нуль при $x = 0$ и $y = 0$ соответственно и $\tilde{f}$ обращается в нуль как при $x = 0$, так и при $y = 0$. По построению:

$$\sigma_{k+1} = F(0, 0) = f''_{xy}(0, 0),$$

$$\phi_1(x) = F(x, 0) - F(0, 0),$$

$$\phi_2(y) = F(0, y) - F(0, 0),$$

следовательно, функции $\phi_{1,2}$ и $\tilde{f}$ имеют такую же гладкость, как и F .

Таким образом, систему можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x \left(1 - \sum_{i=1}^{k+1} \sigma_i(xy)^i - (xy)^{k+1} \tilde{f}(x, y) \right) + x(xy)^{k+1} (\phi_1(x) + \phi_2(y)), \\ \dot{y} &= y. \end{aligned}$$

Заметим теперь, что преобразование

$$x_{\text{new}} = x(1 + \alpha(x)(xy)^{k+1} - \beta(y)(xy)^{k+1})$$

приводит систему к виду (13.1.13) с $n = k + 1$, если

$$\alpha(x) = \int_0^1 \phi_1(xs) \frac{ds}{s}, \quad \beta(y) = \int_0^1 \phi_2(ys) \frac{ds}{s}. \quad (13.1.14)$$

Поскольку $\phi_{1,2}$ являются гладкими функциями, обращающимися в нуль в начале координат, данные интегралы хорошо определены. Более того, α и β имеют такую же гладкость, что и $\phi_{1,2}$, т. е. преобразование координат является, как и требуется, $\mathbb{C}^{r-(2n+1)}$ -гладким. Продолжая по индукции, мы получаем лемму. ■

Отметим, что результаты Леонтович намного шире. А именно при выводе оценок на решения системы в канонической форме она доказала, что после дополнительной гладкой замены координат система (13.1.13) становится интегрируемой. Позднее в [22] было в явном виде доказано, что в $\mathbb{C}^\infty$ -гладком случае с $\sigma_1 = \dots = \sigma_{n-1} = 0$ и $\sigma_n \neq 0$ систему вблизи седла можно $\mathbb{C}^\infty$ -преобразованием привести к следующему интегрируемому виду:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x(1 - \sigma_n(xy)^n - \sigma_{2n}(xy)^{2n}), \\ \dot{y} &= y.\end{aligned}$$

Так же, когда все седловые величины обращаются в нуль (т. е. в бесконечно вырожденном случае), система локально приводится к линейному виду.

Далее рассмотрим локальное отображение $T_0 : S_0 \rightarrow S_1$ для системы в каноническом виде (13.1.13). Пусть σ_n — первая отличная от нуля седловая величина в (13.1.13), т. е. система принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x(1 - \sigma_n(xy)^n - (xy)^n f(x, y)), \\ \dot{y} &= y.\end{aligned}\tag{13.1.15}$$

Как и ранее, мы полагаем, что гомоклиническая петля Γ входит в седло со стороны положительных x и y . Отметим, что это условие фиксирует направление осей x и y и таким образом оно определяет знак n -го седлового числа σ_n . Выберем малое $d > 0$ и определим секущие S_0 и S_1 как $\{x = d\}$ и $\{y = d\}$ соответственно.

Решение (13.1.15), которое начинается на S_0 при $t = 0$ и достигает S_1 при $t = \tau$, удовлетворяет

$$y(t) = e^{t-\tau}d,$$

$$x(t) = e^{-t}d + \int_0^t e^{-(t-s)}x(s) (x(s)y(s))^n (\sigma_n + f(x(s), y(s))) ds. \tag{13.1.16}$$

Это интегральное уравнение можно решить методом последовательных приближений (см. параграф 2.8). Выберем

$$x(t) = e^{-t}d$$

в качестве первого приближения. Подставляя это выражение в правую часть интегрального уравнения, мы получаем второе приближение

$$x(t) = e^{-t}d + d^{2n+1}\sigma_n t e^{-t}e^{-n\tau} + e^{-t}o(e^{-n\tau})$$

(здесь мы используем то, что, так как f является гладкой и обращается в нуль и при $x = 0$, и при $y = 0$, она удовлетворяет оценке $|f| \leq |y|o(1)_{x \rightarrow 0}$; см. доказательство леммы 13.1).

Легко видеть, что все дальнейшие приближения будут иметь такой же вид, а следовательно, и решение $x(t)$ тоже. Отсюда мы получаем

$$y(0) = e^{-\tau}d, \quad x(\tau) = e^{-\tau}d + d^{2n+1}\sigma_n\tau e^{-(n+1)\tau} + o(e^{-(n+1)\tau}).$$

Таким образом, обозначая через $y_0(\equiv y(0)/d)$ координаты начальной точки на S_0 и через $x_1(\equiv x(\tau)/d)$ координаты точки пересечения траектории с S_1 , мы получаем следующую формулу для локального отображения T_0 :

$$x_1 = y_0 + d^{2n}\sigma_n y_0^{n+1} |\ln y_0| + o(y_0^{n+1}).$$

Разложение Тейлора для глобального отображения $T_1 : S_1 \rightarrow S_0$ вблизи петли сепаратрисы Γ можно записать в виде

$$\bar{y}_0 = x_1 + s_2 x_1^2 + \dots + s_m x_1^m + \dots$$

(напомним, что по условию первая сепаратрисная величина $s_1 = 0$, что эквивалентно $A \equiv \frac{d\bar{y}_0}{dx_1} = 1$). Пусть $s_2 = \dots = s_{m-1} = 0$ и $s_m \neq 0$ при некоторой m . В этом случае отображение Пуанкаре принимает вид

$$\bar{y}_0 = y_0 + \tilde{\sigma}_n y_0^{n+1} |\ln y_0| + s_m y_0^m + \dots, \quad (13.1.17)$$

где $\tilde{\sigma}_n$ имеет тот же знак, что и σ_n ; многоточие обозначает члены порядка выше, чем по крайней мере один из двух ведущих членов. Итак, если $m \leq n$ в (13.1.17), то $\bar{y}_0$ может быть представлено как

$$\bar{y}_0 = y_0 + s_m y_0^m + \dots; \quad (13.1.18)$$

а если $n < m$, то как

$$\bar{y}_0 = y_0 + \tilde{\sigma}_n y_0^{n+1} |\ln y_0| + \dots \quad (13.1.19)$$

Следовательно, неподвижная точка $y_0 = 0$ устойчива, если $s_m < 0$ в (13.1.18) или если $\tilde{\sigma}_n < 0$ в (13.1.19) (последнее условие эквивалентно $\sigma_n < 0$). И наоборот, неподвижная точка неустойчива, если s_m или соответственно σ_n больше нуля.

Таким образом, мы получаем следующий результат. Рассмотрим ряд

$$\sigma_0, s_1, \sigma_1, \dots, s_n, \sigma_n, s_{n+1}, \dots, \quad (13.1.20)$$

называемый *последовательностью Дюлака*. Предположим, что не все элементы последовательности обращаются в нуль. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 13.3. *Устойчивость петли сепаратрисы определяется первым ненулевым элементом последовательности Дюлака: если первый ненулевой элемент отрицателен, то петля устойчива. И наоборот, если он положительный, то петля неустойчива.*

Эта теорема в аналитическом случае принадлежит Дюлаку. Он также доказал, что если система аналитическая и все элементы последовательности (13.1.20) равны нулю, то система является интегрируемой (гамильтоновой) и малая окрестность U петли сепаратрисы заполнена периодическими орбитами. Это дало Дюлаку возможность доказать, что в случае полиномиальных векторных полей предельные циклы не могут накапливаться к петле сепаратрисы.

13.2. Бифуркации предельного цикла от петли сепаратрисы к седлу с ненулевой седловой величиной

Двумерные системы, имеющие петли сепаратрис к седлу с ненулевой первой седловой величиной σ_0 , образуют бифуркационное множество координатности один. Таким образом, мы можем изучать такие гомоклинические бифуркации в однопараметрических семействах.

Рассмотрим непрерывное однопараметрическое семейство $X_\mu \in \mathbb{C}^r$ -гладких ($r \geq 1$) систем на плоскости, которые имеют седловое состояние равновесия O_μ . Предположим, что при $\mu = 0$ система имеет петлю сепаратрисы седла, т. е. сепаратриса Γ_1^- совпадает с сепаратрисой Γ_1^+ при $\mu = 0$.

Предположим, что семейство X_μ определено таким образом, что при $\mu \neq 0$ петля расщепляется так, что если $\mu > 0$, то неустойчивая сепаратриса $\Gamma_1^-(\mu)$ входит во внутреннюю окрестность U при $t \rightarrow +\infty$; а если $\mu < 0$, она идет наружу, т. е. входит во внешнюю окрестность V (см. рис. 13.1.1).

Теорема 13.4 (Андронов и Леонтович).

- (1) Если $\sigma_0 < 0$, то для достаточно малых $\mu > 0$ существует единственный устойчивый предельный цикл $L(\mu)$ в U , который при $\mu \rightarrow +0$ приближается к седлу и становится петлей сепаратрисы при $\mu = 0$ (см. рис. 13.2.1). Когда $\mu < 0$, предельные циклы отсутствуют.
- (2) Если $\sigma_0 > 0$, то для достаточно малых $\mu < 0$ существует единственный неустойчивый предельный цикл $L(\mu)$ в U , который становится петлей сепаратрисы $\bar{\Gamma}$ при $\mu \rightarrow -0$ (см. рис. 13.2.2). Когда $\mu > 0$, предельные циклы отсутствуют.

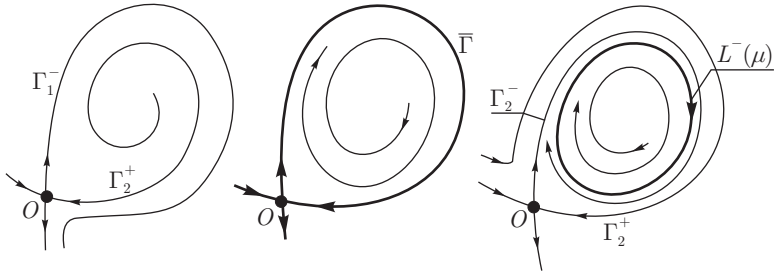


Рис. 13.2.1. Бифуркация устойчивой петли сепаратрисы седла на плоскости в случае $\sigma_0 < 0$

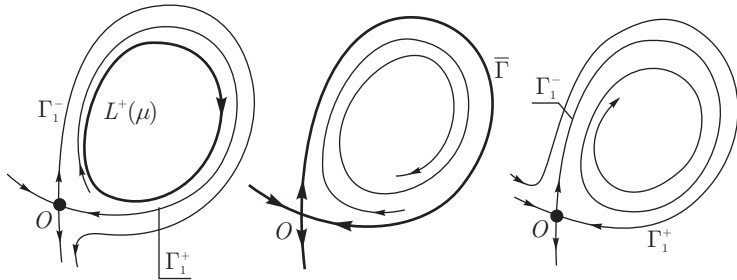


Рис. 13.2.2. Бифуркация неустойчивой петли сепаратрисы седла с $\sigma_0 > 0$ в $\mathbb{R}^2$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Очевидно, что случай $\sigma_0 > 0$ сводится к случаю $\sigma_0 < 0$ обращением времени $t \rightarrow -t$. Таким образом, вторая часть теоремы следует немедленно из ее первой части.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Доказательство Андронова и Леонтович было дано в предположении, что система является $\mathbb{C}^1$ -гладкой. Фактически это был первый пример, в котором на векторное поле накладывалось только минимальное требование гладкости. Позднее мы увидим, что возможность работы со случаем малой гладкости станет особенно существенной для анализа многомерного случая.

Исходное доказательство теоремы Андронова–Леонтович предполагает, что система определена на плоскости. Здесь мы используем несколько отличный подход, который легко можно приспособить также и к случаю систем, определенных на неориентируемых двумерных поверхностях.

Введем координаты (x, y) вблизи седла O . Без потери общности мы можем допустить, что седло остается в начале координат при всех μ . Мы также можем допустить, что неустойчивые сепаратрисы касаются оси y в O , а устойчивые сепаратрисы касаются оси x . Таким образом, систему

можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \lambda(\mu)x + p(x, y, \mu) \equiv P(x, y, \mu), \\ \dot{y} &= \gamma(\mu)y + q(x, y, \mu) \equiv Q(x, y, \mu),\end{aligned}\tag{13.2.1}$$

где p и q обращаются в нуль в начале координат вместе со своими производными по (x, y) ; характеристические показатели $\lambda(\mu)$ и $\gamma(\mu)$ таковы, что $\lambda(\mu) < 0 < \gamma(\mu)$. По определению, седловая величина равна

$$\sigma_0(\mu) = \lambda(\mu) + \gamma(\mu).$$

Пусть сепаратриса Γ_1^+ входит в седло из полуплоскости $x > 0$, и пусть сепаратриса Γ_1^- покидает O в направлении положительных значений y . Поскольку мы пока еще не выпрямили инвариантные многообразия, локально уравнения Γ_1^+ и Γ_1^- задаются соответственно через

$$y = \varphi(x, \mu), \quad x > 0, \quad \text{и} \quad x = \psi(y, \mu), \quad y > 0,$$

где φ и ψ обращаются в нуль в начале координат вместе со своими производными по x и y .

Выберем малое положительное d и рассмотрим двумерные секущие $S_0: \{x = d\}$ и $S_1: \{y = d\}$. Как и в предыдущем параграфе, мы сведем задачу к изучению отображения Пуанкаре $T: S_0 \rightarrow S_0$, образованного композицией локального отображения $T_0: S_0 \rightarrow S_1$ и глобального отображения $T_1: S_1 \rightarrow S_0$ по траекториям системы.

Как и в предыдущем параграфе, время перехода траектории из S_1 в S_0 вдоль петли сепаратрисы ограничено. Таким образом, глобальное отображение T_1 является диффеоморфизмом малой окрестности точки $M^- = \Gamma_1^- \cap S_1$ в малую окрестность точки $M^+ = \Gamma_1^+ \cap S_0$. По условию, $T_1 M^- = M^+$ при $\mu = 0$. Таким образом, отображение T_1 записывается как

$$\bar{y}_0 - y^+ = a(\mu) + A(\mu)(x_1 - x^-) + o(x_1 - x^-).\tag{13.2.2}$$

Здесь мы обозначаем координату на S_1 через x_1 , а координату на S_0 через y_0 , тогда x -координатой M^- является $x^- = \psi(d, \mu)$, а y -координатой M^+ является $y^+ = \varphi(d, \mu)$. Коэффициент $A(\mu)$ отличен от нуля, поскольку T_1 — диффеоморфизм. Более того, $A > 0$ (всегда) для систем, заданных на плоскости.

Член $a(\mu)$ управляет расщеплением петли сепаратрисы (см. рис. 13.2.3): из (13.2.2) следует, что $a(\mu)$ равно разнице между y -координатами точек M^+ и $T_1 M^-$ (последняя является точкой, где неустойчивая сепаратриса Γ_1^- впервые пересекает S_0). По условию сепаратриса расщепляется вовнутрь при $\mu > 0$ и наружу, если $\mu < 0$. Таким образом, $\text{sign } a(\mu) = \text{sign } \mu$.

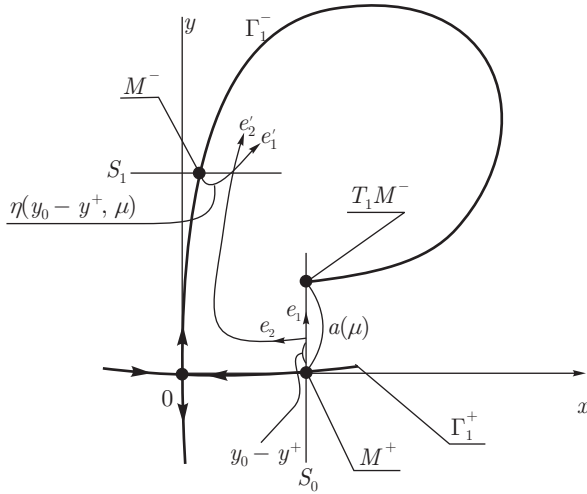


Рис. 13.2.3. Иллюстрация к теореме 13.4

Изучим локальное отображение T_0 . Оно отображает отрезок $y_0 > y^+$ на секущей S_0 в отрезок $x_1 > x^-$ на S_1 . Представим это отображение как

$$x_1 - x^- = \eta(y_0 - y^+, \mu). \quad (13.2.3)$$

Мы также обозначаем через $\tau(y_0, \mu)$ время перехода из точки (d, y_0) на S_0 в точку $(\eta(y_0 - y^+, \mu), d)$ на S_1 . Очевидно, что $\eta(y_0 - y^+, \mu) \rightarrow 0$ и $\tau(y_0, \mu) \rightarrow +\infty$ при $y_0 \rightarrow y^+$.

Лемма 13.3. *Отображение T_0 является сжимающим, если $\sigma_0 = \lambda + \gamma < 0$, и растягивающим, если $\sigma_0 = \lambda + \gamma > 0$. При этом*

$$\lim_{y_0 \rightarrow y^+} \frac{\partial \eta}{\partial y_0} = \begin{cases} 0 & \text{при } \sigma_0 < 0 \\ +\infty & \text{при } \sigma_0 > 0 \end{cases} \quad (13.2.4)$$

равномерно для всех малых μ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай $\sigma_0 < 0$ (случай $\sigma_0 > 0$ сводится к нему обращением времени). Идея доказательства относительно проста: поскольку дивергенция векторного поля в O отрицательна, она также отрицательна в малой окрестности O . Это означает, что

поток вблизи O сжимает площади. Последнее немедленно влечет, что отображение Пуанкаре между любыми двумя секущими действительно является сжатием.

Сформулируем это более точно. Обозначим через $u(t)$ производную решения $(x(t), y(t))$ системы (13.2.1) по начальным условиям (x_0, y_0) . Это матрица, которая удовлетворяет уравнению в вариациях

$$\dot{u} = \begin{pmatrix} P_x & P_y \\ Q_x & Q_y \end{pmatrix}_{\substack{x=x(t) \\ y=y(t)}} u$$

с начальным условием $u(0) = I$. Таким образом, определитель u удовлетворяет следующему условию:

$$\frac{d}{dt} \det u = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} P_x & P_y \\ Q_x & Q_y \end{pmatrix} \det u,$$

откуда следует

$$\det u(t) = e^{\int_0^t (\lambda + \gamma + P_x(x(s), y(s)) + Q_y(x(s), y(s))) ds}.$$

Так как мы предполагаем, что $\lambda + \gamma < 0$ и что производные от P и Q обращаются в нуль в O , то определитель матрицы u экспоненциально убывает все время, пока траектория $(x(t), y(t))$ остается в малой окрестности O :

$$\det u(t) \leq e^{\bar{\sigma}t} \quad (13.2.5)$$

для некоторого $\bar{\sigma} < 0$. Это означает, что поток, заданный системой (13.2.1), действительно экспоненциально сжимает площади; а именно для любых двух векторов e_1 и e_2

$$[u(t)e_1, u(t)e_2] = \det u(t)[e_1, e_2] \leq e^{\bar{\sigma}t}[e_1, e_2], \quad (13.2.6)$$

где $[e_1, e_2]$ обозначает площадь параллелограмма, натянутого на e_1 и e_2 , и $[u(t)e_1, u(t)e_2]$ обозначает площадь параллелограмма, натянутого на образы векторов e_1 и e_2 под действием линеаризованного потока.

Другим необходимым нам фактом (см. параграф 3.11) является то, что матрица $u(t)$ переводит фазовый вектор скорости в точке (x_0, y_0) в фазовый вектор скорости в точке $(x(t), y(t))$:

$$\begin{pmatrix} P(x(t), y(t)) \\ Q(x(t), y(t)) \end{pmatrix} = u(t) \begin{pmatrix} P(x_0, y_0) \\ Q(x_0, y_0) \end{pmatrix}. \quad (13.2.7)$$

Выберем точку $(x_0 = d, y_0)$ на секущей S_0 . Орбита точки попадает в точку $(x(\tau) = \eta(y_0 - y^+), y(\tau) = d)$ на S_1 в некоторый момент времени $\tau(y_0)$. Производная $\eta'(y_0 - y^+)$ вычисляется как

$$\eta'(y_0 - y^+) = \frac{\partial x(\tau)}{\partial y_0} + \dot{x}(\tau)\tau'(y_0),$$

где $\tau'(y_0)$ находится из условия

$$\frac{\partial y(\tau)}{\partial y_0} + \dot{y}(\tau)\tau'(y_0) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\eta'(y_0 - y^+)\dot{y}(\tau) = [e'_1, e'_2] = [u(\tau)e_1, u(\tau)e_2] \leq e^{\bar{\sigma}\tau}|\dot{x}(0)|, \quad (13.2.8)$$

где $e_1 = (0, 1)$ (единичный вектор, параллельный S_0), $e'_1 = \left(\frac{\partial x(\tau)}{\partial y_0}, \frac{\partial y(\tau)}{\partial y_0}\right)$ [напомним, что он равен $u(\tau)e_1$ по определению $u(t)$], а e_2 и e'_2 являются векторами фазовой скорости в точках соответственно (x_0, y_0) и $(x(\tau), y(\tau))$:

$$e_2 = (\dot{x}(0), \dot{y}(0)) \equiv (P(x_0, y_0), Q(x_0, y_0))$$

и

$$e'_2 = (\dot{x}(\tau), \dot{y}(\tau)) \equiv (P(x(\tau), y(\tau)), Q(x(\tau), y(\tau))),$$

при выводе (13.2.8) мы использовали соотношения (13.2.6) и (13.2.7).

Отметим, что так как $y(\tau) = d$, то $\dot{y}(\tau) (= \gamma d + q(x(\tau), d))$ отделено от нуля. Отсюда, в силу (13.2.8):

$$\eta'(y_0 - y^+) = O(e^{\bar{\sigma}\tau}),$$

что и доказывает лемму, потому что $\tau(y_0) \rightarrow +\infty$ при $y_0 \rightarrow y^+$ и потому что $\bar{\sigma} < 0$, в силу условия $\lambda + \gamma < 0$. ■

Таким образом, обозначая $v = y_0 - y^+$, из (13.2.2) и (13.2.3) мы получаем, что отображение Пуанкаре $T : S_0 \rightarrow S_0$ можно записать в виде

$$\bar{v} = a(\mu) + A(\mu)\eta(v, \mu) + o(\eta), \quad v > 0, \quad (13.2.9)$$

где $a(\mu)$ — параметр расщепления сепаратрис Γ_1^- и Γ_1^+ , а η — возрастающая функция, которая является либо сильно сжимающей (при $\lambda + \gamma < 0$) либо сильно растягивающей (при $\lambda + \gamma > 0$). Напомним, что $a(\mu)$ имеет такой же знак, что и μ (вообще говоря, $a(\mu)$ пропорционально μ , но мы не используем это свойство).

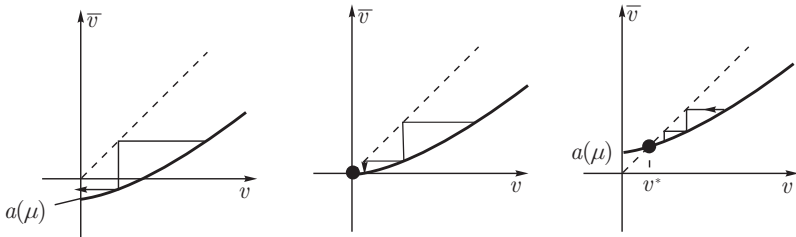


Рис. 13.2.4. Диаграмма Ламерея для отображения Пуанкаре, соответствующая рис. 13.2.1

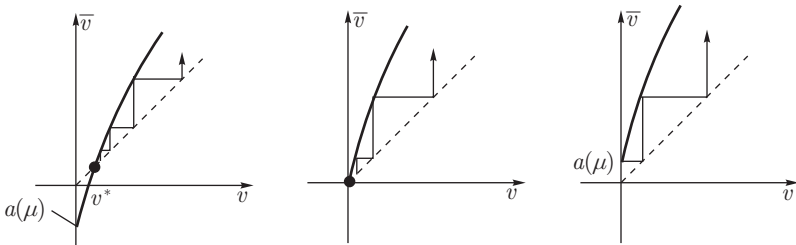


Рис. 13.2.5. Диаграмма Ламерея для отображения Пуанкаре, соответствующая рис. 13.2.2

Анализ таких отображений прост. Соответствующие диаграммы Ламерея показаны на рис. 13.2.4 ($\lambda + \gamma < 0$) и 13.2.5 ($\lambda + \gamma > 0$). Когда $\lambda + \gamma < 0$, неподвижная точка $v^*(\mu)$ отображения существует только при $\mu \geq 0$. Она отвечает предельному циклу $L^-(\mu)$ при $\mu > 0$ и петле сепаратрисы при $\mu = 0$ [формально отображение T не определено при $v = 0$, но мы доопределяем его по непрерывности, полагая, что $T(M^+) = T_1(M^-)$]. Поскольку отображение T является сжатием, неподвижная точка устойчива (односторонне устойчива при $\mu = 0$). Соответственно $L^-(\mu)$ является устойчивым циклом и петля Γ также устойчива (это обобщает теорему 13.1.1 из предыдущего параграфа для случая $\mathbb{C}^1$). Отметим, что при $\mu > 0$ сепаратриса $\Gamma_1^-(\mu)$ стремится к $L^-(\mu)$ при $t \rightarrow +\infty$.

В случае $\lambda + \gamma > 0$ неподвижная точка $v^*(\mu)$ неустойчива и существует только при $\mu \leq 0$. Она соответствует неустойчивому предельному циклу $L^+(\mu)$ при $\mu < 0$ и петле сепаратрисы при $\mu = 0$ соответственно. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Когда система является по меньшей мере $\mathbb{C}^2$ -гладкой, можно ввести такие локальные координаты вблизи O (см лемма 13.1), что

$$\eta(v) = v^{\nu(\mu)} + o(v^{\nu(\mu)}),$$

где $\nu = |\lambda/\gamma|$ — седловой индекс. В этом случае неподвижная точка отображения (13.2.9) удовлетворяет следующему соотношению:

$$v^* = a(\mu) + A(\mu)(v^*)^{\nu(\mu)} + \dots,$$

откуда мы имеем

$$v^*(\mu) \sim \begin{cases} a(\mu) & \text{при } \lambda + \gamma < 0 \\ \left(-\frac{a(\mu)}{A(\mu)}\right)^{\frac{1}{\nu(\mu)}} & \text{при } \lambda + \gamma > 0. \end{cases} \quad (13.2.10)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Вышеприведенное доказательство можно легко приспособить к случаю петли сепаратрисы на произвольной двумерной поверхности, независимо от того, является ли она ориентируемой или неориентируемой. В том и в другом случае отображение будет иметь вид (13.2.9). Отметим, однако, что если малая окрестность петли сепаратрисы гомеоморфна к кольцу, то $A > 0$; а если окрестность Γ представляет из себя ленту Мёбиуса, то $A < 0$ (последнее, очевидно, соответствует неориентируемому случаю). В случае $A > 0$ теорема Андронова–Леонтович остается верна без изменений.

Рассмотрим более детально случай $A < 0$. В первую очередь исследуем соответствующую диаграмму Ламерея (рис. 13.2.6) с $A < 0$, когда $\nu > 1$ (т.е. $\lambda + \gamma < 0$). Как и в ориентируемом случае, устойчивая неподвижная точка существует при $\mu > 0$: действительно, отображение T является убывающим и сжимающим, так что отрезок $[0, a(\mu) = T(0)]$ отображается внутрь себя под действием T , что влечет существование единственной устойчивой неподвижной точки на этом отрезке в силу банахова принципа сжимающих отображений.

Диаграмма Ламерея, отвечающая случаю $\nu(\mu) < 1$, показана на рис. 13.2.7. При этом, в отличие от ориентируемого случая, неустойчивая неподвижная точка $v^*(\mu)$ существует при $\mu > 0$.

Отметим, что в ориентируемом случае ($A > 0$) петля сепаратрисы при $\mu = 0$ является предельной траекторией (ω -предельной, если $\nu > 1$, или α -предельной, если $\nu < 1$) для близких траекторий из внутренней окрестности U . Напротив, в неориентируемом случае ($A < 0$) каждая точка Γ остается неблуждающей, но не может быть предельной. Это показывает, что, несмотря на то что предельные точки являются неблуждающими (см. главу 8), обратное утверждение не верно.

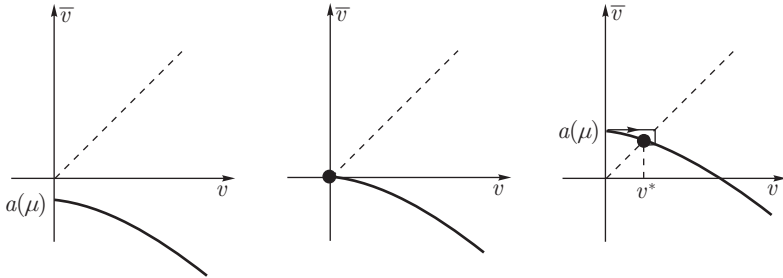


Рис. 13.2.6. Диаграмма Ламерея отображения Пуанкаре для неориентируемой петли сепаратрисы с $\sigma_0 < 0$

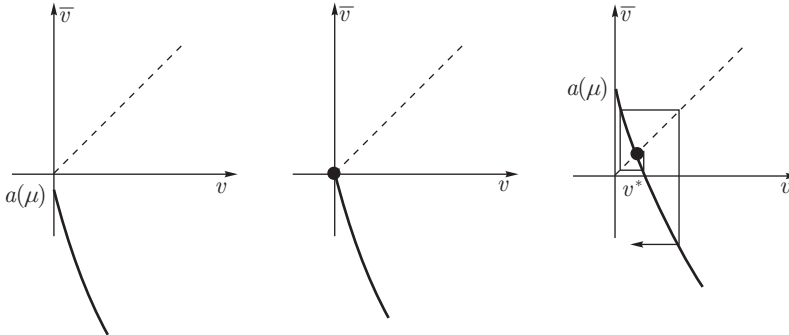


Рис. 13.2.7. Диаграмма Ламерея для неориентируемой петли сепаратрисы к седлу с $\sigma_0 > 0$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Параметр, расщепляющий $a(\mu)$, может быть произвольной непрерывной функцией от μ , правильного знака. Когда система гладко зависит от μ , семейство X_μ трансверсально к бифуркационной поверхности, если $a'(0) \neq 0$. В этом случае всегда можно положить $a(\mu) \equiv \mu$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Из нашего анализа следует, что все свойства отображения Пуанкаре для трансверсального семейства X_μ демонстрируются простейшим отображением

$$\bar{y} = \mu \pm y^\nu, \quad (13.2.11)$$

где $\nu \neq 1$. Знак «+» соответствует ориентируемому случаю, а «−» соответствует неориентируемому случаю. По существу, отображение (13.2.10) служит нормальной формой для отображения Пуанкаре вблизи петли сепаратрисы с ненулевой седловой величиной.

Теперь мы можем рассмотреть бифуркацию состояния равновесия с двумя нулевыми характеристическими показателями. Эта бифуркация характерна тем, что ее анализ включает почти все бифуркации коразмерностью один.

В общем случае систему на центральном многообразии вблизи состояния равновесия $(0, 0)$ с парой нулевых характеристических показателей можно представить как

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + g(x, y), \\ \dot{y} &= f(x, y),\end{aligned}$$

где f и g обращаются в нуль в начале координат вместе с их первыми производными. Мы предполагаем, что матрица линеаризации в начале координат имеет жорданов блок. В этом случае мы можем выбрать $y + g(x, y)$ в качестве новой переменной y и переписать систему в виде

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= ax^2 + bxy + h(x, y),\end{aligned}\tag{13.2.12}$$

где $h(x, y)$ имеет третий порядок малости.

Предположим теперь, что коэффициенты a и b не обращаются в нуль. Тогда можно так отнормировать фазовые переменные и время, что система примет вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x^2 \pm xy + \tilde{h}(x, y),\end{aligned}\tag{13.2.13}$$

где знак «+» соответствует $b > 0$, а знак «−» соответствует $b < 0$. Отметим, что преобразование $t \rightarrow -t$, $y \rightarrow -y$ переводит первый случай во второй. Выберем знак «−» перед xy в (13.2.13).

Поведение траекторий системы (13.2.13) вблизи $O(0, 0)$ показано на рис. 13.2.8. Для того чтобы исследовать бифуркации вблизи этой точки, рассмотрим двухпараметрическое семейство, которое можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \mu_1 + \mu_2 x + x^2 - xy + \tilde{h}(x, y, \mu).\end{aligned}\tag{13.2.14}$$

Бифуркационная диаграмма и соответствующие фазовые портреты показаны на рис. 13.2.9. Бифуркационные кривые $L_1, \dots, L_4$ разбивают плоскость (μ_1, μ_2) на четыре области $D_1, \dots, D_4$. Поскольку в области D_1 нет состояний равновесия, все траектории покидают окрестность начала координат при $t \rightarrow \pm\infty$. При переходе из D_1 через кривые $L_1: \{\mu_1 = \mu_2^2/4 + \dots,$

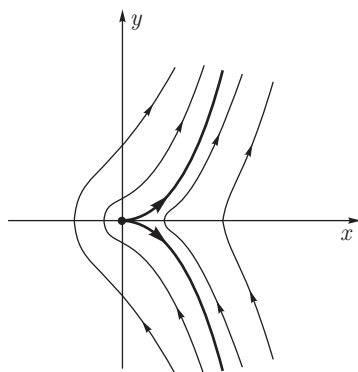


Рис. 13.2.8. Поведение траекторий вблизи состояния равновесия с двумя нулевыми характеристическими показателями

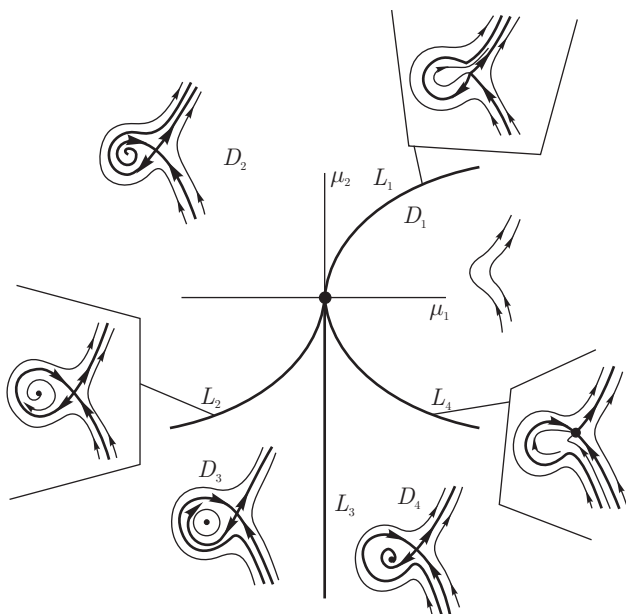


Рис. 13.2.9. Бифуркационная диаграмма для бифуркации Богданова–Тakens в плоскости параметров (μ_1, μ_2)

$\mu_2 > 0$ } или $L_4: \{\mu_1 = \mu_2^2/4 + \dots, \mu_2 < 0\}$ возникает состояние равновесия типа седло-узел. Этот седло-узел является простым, так как первая ляпуновская величина l_2 на L_1 и L_4 не равна нулю. Однако в поведении траекторий на этих кривых имеется отличие: на L_1 седло-узел неустойчив в узловой области, тогда как на L_4 он устойчив в узловой области. При пересечении L_1 седло-узел распадается на неустойчивый узел и седло. При дальнейшем изменении параметра узел становится неустойчивым фокусом, как показано на рис. 13.2.9 (область D_2). На кривой $L_2: \{\mu_1 = -6/25\mu_2^2 + o(\mu_2^2), \mu_2 < 0\}$ система имеет устойчивую петлю сепаратрисы. Таким образом, в области D_3 существует устойчивый предельный цикл, возникающий из петли сепаратрисы. Фокус становится негрубым на кривой $L_3: \{\mu_1 = 0, \mu_2 < 0\}$; у него появляется два чисто мнимых характеристических показателя. Соответствующая ляпуновская величина на L_3 меньше нуля. При переходе из D_3 в D_4 устойчивый цикл влипает в слабый фокус и исчезает при надкритической бифуркации Андронова-Хопфа на кривой L_3 , при этом фокус наследует устойчивость устойчивого предельного цикла. Вблизи кривой L_4 устойчивый фокус превращается в устойчивый узел и сливается с седлом на кривой L_4 . И то и другое состояние равновесия исчезают в области D_1 .

Асимптотика кривых L_1, L_3, L_4 получается из анализа линеаризации системы (13.2.14) в состояниях равновесия. Существование кривой L_2 , отвечающей петле сепаратрисы, необходимо для замыкания последовательности бифуркаций; устойчивый цикл, возникающий из слабого фокуса на кривой L_3 , должен исчезать в петле (при движении по направлению к L_2).

Асимптотику кривой L_2 можно найти следующим образом. Пусть $\mu_1 < 0$ в (13.2.14). При нормировке переменных и времени: $x \rightarrow x\sqrt{|\mu_1|}$, $y \rightarrow y|\mu_1|^{3/4}$, $t \rightarrow t/|\mu_1|^{1/4}$ система принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -1 + Cx + x^2 - \varepsilon xy + o(\varepsilon),\end{aligned}\tag{13.2.15}$$

где $C = \mu_2/\sqrt{|\mu_1|}$ и $\varepsilon = |\mu|^{1/4}$. При $\varepsilon = 0$ эта система становится гамильтоновой системой с первым интегралом

$$H = \frac{y^2}{2} + x - \frac{1}{2}Cx^2 - \frac{1}{3}x^3.$$

Она имеет седловое состояние равновесия в точке $x = x_0 = -\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}\sqrt{C^2 + 4}$ (и $y = 0$) с петлей сепаратрисы, которая является частью линии уровня интеграла H ; а именно $\Gamma = \{H(x, y) = H(x_0, 0), x < x_0\}$.

Для произвольно малого отличного от нуля ε эта система более не является гамильтоновой, а H уже не ее первый интеграл, так как $\dot{H} \neq 0$ при $\varepsilon = 0$. В общем случае петля расщепляется. Достаточно очевидно, что если для некоторого C

$$\left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt} H(x(t), y(t)) dt \right|_{\varepsilon=0} \neq 0,$$

то петля расщепляется при достаточно малых $\varepsilon \neq 0$ (здесь $(x = x(t), y = y(t))$ — это уравнение гомоклинической траектории при $\varepsilon = 0$). В силу (13.2.15), это неравенство можно записать как

$$\int_{x_1}^{x_0} xy(x) dx \neq 0,$$

где точка пересечения x_1 петли Γ с осью x находится из условия $H(x_0, 0) = H(x_1, 0)$; а $y = y(x)$ — уравнение Γ , т. е. $H(x, y(x)) = H(x_0, 0)$, см. рис. 13.2.10. Таким образом, вышеприведенное неравенство сводится к

$$\int_{x_1}^{x_0} x(x_0 - x) \sqrt{x - x_1} dx \neq 0,$$

что легко можно решить, определив, таким образом, что $C \neq C^* = -5/\sqrt{6}$. Эти значения C соответствуют расщеплению петли при отличных от нуля ε . С другой стороны, можно доказать, что существует кривая $C = C^* + O(\varepsilon)$, которая отвечает существованию петли сепаратрисы при $\varepsilon \neq 0$. Возвращение к параметрам (μ_1, μ_2) дает требуемую асимптотику для кривой L_2 : $\{\mu_2 = -5/\sqrt{6}\sqrt{|\mu_1|}\}$.

Данная бифуркационная диаграмма для состояния равновесия с двумя нулевыми характеристическими показателями была известна долгое время. Однако оставалась задача доказательства *единственности* предельного цикла. Иными словами, дополнительно необходимо доказать, что не существует других бифуркационных кривых, кроме $L_1, \dots, L_4$ (а именно кривых, отвечающих полуустойчивым предельным циклам). Эту задачу независимо друг от друга решили Богданов [33] и Такенс [146], именем которых часто называют эту бифуркацию.

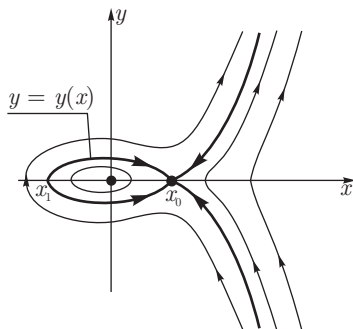


Рис. 13.2.10. Фазовый портрет, соответствующий гамильтоновой системе с петлей в уровне $H(x, y) = H(x_0, 0)$

13.3. Бифуркации петли сепаратрисы с нулевой седловой величиной

Задача о бифуркациях петли сепаратрисы к седлу с нулевой седловой величиной σ_0 впервые рассматривалась Е. Леонтович. Она доказала следующую теорему:

Теорема 13.5 (Леонтович). *Если в последовательности Дюлака*

$$\sigma_0 = s_1 = \dots = s_{n-1} = \sigma_{n-1} = 0, \quad s_n \neq 0,$$

то при бифуркации петли сепаратрисы к седлу может родиться не более чем $2n$ предельных циклов.

Если

$$\sigma_0 = s_1 = \dots = s_n = 0, \quad \sigma_n \neq 0,$$

то количество предельных циклов, рождающихся из петли сепаратрисы, не превышает $2n + 1$. Эти оценки точны, т. е. можно возмутить систему таким образом, что получающаяся система будет иметь соответственно $2n$ или $2n + 1$ предельных циклов.

В своем доказательстве этой теоремы Леонтович предполагала $\mathbb{C}^r$ -гладкость системы с $r \geq 4n + 6$. Прежде всего она доказала, что, когда первая седловая величина близка к нулю, систему вблизи седла можно привести к виду

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x(1 + \varepsilon - \sigma_1 xy - \dots - \sigma_n (xy)^n - (xy)^{n+1} F(x, y)), \\ \dot{y} &= y, \end{aligned} \quad (13.3.1)$$

где $1 + \varepsilon = \nu$ — седловой индекс, σ_i — седловые величины, F — гладкая функция. Предполагается, что $n|\varepsilon| < 1$. Преобразование координат строится так же, как и для случая $\varepsilon = 0$ (см. лемму 13.2); единственная разница состоит в том, что формулы (13.1.14) модифицируются следующим образом:

$$\begin{aligned}\alpha(x) &= \frac{1}{1 + \varepsilon} \int_0^1 \phi_1(xs) \frac{ds}{s^{1-(k+1)\varepsilon}}, \\ \beta(y) &= \int_0^1 \phi_2(ys) \frac{ds}{s^{1+(k+1)\varepsilon}}.\end{aligned}\tag{13.3.2}$$

Из доказательства леммы 13.2 можно проследить, что преобразование координат принадлежит классу $\mathbb{C}^{r-(2n+1)}$, а функция F — классу $\mathbb{C}^{r-(2n+3)}$.

На следующем этапе доказательства Леонтович вычислила локальное отображение. Фактически она рассматривала отображение секущей $S_1 : \{y = d\}$ в $S_0 : \{x = d\}$, т.е., в наших обозначениях, обратное к локальному отображению T_0 . Отметим, что по условиям теоремы только последняя седловая величина σ_n отлична от нуля, в то время как $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ малы. Таким образом, заменой времени систему можно привести к виду

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x, \\ \dot{y} &= y(1 + \tilde{\varepsilon} + \tilde{\sigma}_1 xy + \dots + \tilde{\sigma}_n (xy)^n + (xy)^{n+1} \tilde{F}(x, y)),\end{aligned}\tag{13.3.3}$$

где коэффициенты $\tilde{\varepsilon}$ и $\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_{n-1}$ малы, а $\tilde{\sigma}_n$ отлична от нуля. Леонтович показала, что отображение T_0^{-1} для системы (13.3.3) имеет вид³

$$y_0 = x_1 + \tilde{\varepsilon}[\theta x_1 + \psi_1(x_1)] + \tilde{\sigma}_1[\theta x_1^2 + \psi_2(x_1)] + \dots + \tilde{\sigma}_n[\theta x_1^{n+1} + \psi_{n+1}(x_1)],\tag{13.3.4}$$

где

$$\theta = \frac{x_1^{\tilde{\varepsilon}} - 1}{\tilde{\varepsilon}}$$

и $\psi_k = O(x_1^{k+\delta})$ для некоторого $\delta > 0$ (при этом j -я производная ψ_k оценивается как $O(x_1^{k-j+\delta})$ для $j = 1, \dots, 2n+1$).

Разложение Тейлора для глобального отображения $T_1 : S_1 \rightarrow S_0$ записывается как

$$\bar{y}_0 = \mu + x_1 e^{s_1} + s_2 x_1^2 + \dots + s_n x_1^n + O(x_1^{n+1}),\tag{13.3.5}$$

³Эту формулу можно получить, применив метод краевой задачи, как в доказательстве теоремы 13.3.

где μ — малый расщепляющий параметр, а $s_1, \dots, s_n$ — сепаратрисные величины. По условиям теоремы $s_1, \dots, s_{n-1}$ малы; n -я сепаратрисная величина s_n отлична от нуля в первом случае теоремы и мала во втором случае.

Если система имеет предельный цикл, координата x_1 его пересечения с S_1 удовлетворяет $T_0^{-1}(x_1) = T_1(x_1)$. Таким образом, задача о количестве предельных циклов сводится к задаче о числе нулей гладкого (по крайней мере $\mathbb{C}^{2n+1}$) квазиполинома

$$\begin{aligned} G(x_1) = & -\mu + [\tilde{\varepsilon}(\theta x_1 + O(x_1^{1+\delta})) - x_1(e^{s_1} - 1)] + \\ & + [\tilde{\sigma}_1(\theta x_1^2 + O(x_1^{2+\delta})) - s_2 x_1^2] + \\ & + [\tilde{\sigma}_{n-1}(\theta x_1^n + O(x_1^{n+\delta})) - s_n x_1^n] + \tilde{\sigma}_n[\theta x_1^{n+1} + O(x_1^{n+1})] \end{aligned} \quad (13.3.6)$$

(где δ не обязательно целое). В процессе доказательства теоремы Леонтович построила исчисление квазиполиномов данного вида, что позволило ей доказать, что для малых $\mu, \tilde{\varepsilon}, s_1, \dots, \tilde{\sigma}_{n-1}$ функция G не может иметь больше $2n$ нулей при малых x_1 , если s_n отлична от нуля, или больше $2n + 1$ нулей, если s_n мала.

Для окончания доказательства необходимо также доказать «неулучшаемость» этой оценки. Чтобы сделать это, Леонтович провела детальное построение возмущенной системы с заданным количеством предельных циклов.

Отметим, что она не использовала семейства с конечным числом параметров. Тем не менее понятно, что можно найти такое подходящее трансверсальное семейство, что управляющими параметрами будут $\mu, \varepsilon, s_1, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ в первом случае теоремы 13.5 или $\mu, \varepsilon, s_1, \sigma_1, \dots, s_n$ во втором случае.

Наш обзор доказательства теоремы, конечно, очень краток. Исходное доказательство Леонтович, состоящее из двух частей, было депонировано в архиве ВИНИТИ в Москве и, таким образом, было доступно только исследователям из Советского Союза. Более 30 лет спустя Рузари опубликовал независимое доказательство оценки числа периодических орбит, рождающихся в этой бифуркации, но без доказательства точности. Читатель, интересующийся деталями, может обратиться к статье [73]. В духе этой статьи теорему Леонтович можно перефразировать следующим образом: *в общем p -параметрическом семействе гладких векторных полей на плоскости количество предельных циклов, возникающих при бифуркации петли сепаратрисы к грубому седлу, не превышает p . Более того, эта оценка точна.*

Теперь рассмотрим случай коразмерности два более подробно. Напомним, что этот случай выделяется двумя условиями: первым служит существование петли сепаратрисы, а второе условие заключается в обращении в нуль первой седловой величины σ_0 , при этом первая сепаратрисная величина s_1 не равна нулю. Последнее эквивалентно $A \neq 1$. Мы будем полагать, что $A < 1$, поскольку случай $A > 1$ получается из первого обращением времени.

Из параграфа 13.8 (см. формулы (13.8.30)–(13.8.32)) следует, что локальное отображение T_0 может быть записано как

$$\bar{x}_1 = y_0^\nu + \varphi(y_0)$$

в некоторых $\mathbb{C}^{r-1}$ -координатах; при этом ν — седловой индекс, который равен 1 в момент бифуркации. Функция φ удовлетворяет оценкам

$$\begin{aligned}\varphi(y) &= o(y^{1+\delta}), \\ \varphi^{(s)}(y) &= o(y^{1-s+\delta}) \quad (s = 1, \dots, r-2), \\ \varphi^{(r-1)}(y) &= o(y^{\nu-(r-1)})\end{aligned}\tag{13.3.7}$$

для некоторого положительного δ , отличного от нуля.

Соединяя вышеприведенную формулу для локального отображения с формулой (13.3.5) (при $n = 1$) для глобального отображения T_1 , мы получаем уравнение

$$\bar{y} = \mu + A(\mu, \varepsilon)y^{1+\varepsilon} + \varphi(y), \quad y > 0, \tag{13.3.8}$$

для отображения Пуанкаре $T = T_1 \circ T_0$, где $\nu = 1 + \varepsilon$, и φ — новая функция, которая по-прежнему удовлетворяет (13.3.7). Мы будем предполагать, что система по крайней мере $\mathbb{C}^3$ -гладкая, так что отображение Пуанкаре (13.3.8) по крайней мере $\mathbb{C}^2$ -гладкое.

Это отображение является монотонно убывающим (поскольку для систем на плоскости $A > 0$) одномерным отображением. Единственная возможная бифуркация, возникающая в таких отображениях, есть бифуркация неподвижной точки с мультипликатором, равным $+1$. Координата y такой точки должна удовлетворять

$$\begin{aligned}y &= \mu + A(\mu, \varepsilon)y^{1+\varepsilon} + o(y^{1+\delta}), \\ 1 &= (1 + \varepsilon)A(\mu, \varepsilon)y^\varepsilon + o(y^\delta).\end{aligned}\tag{13.3.9}$$

Правая часть второго уравнения по крайней мере $\mathbb{C}^1$ -гладкая. Таким образом, координата y однозначно выражается из этого уравнения при $\varepsilon < 0$:

$$y = e^{-1}A^{1/|\varepsilon|} + o(A^{(1+\delta)/|\varepsilon|}). \tag{13.3.10}$$

Вторая производная отображения в этой точке равна

$$(1 + \varepsilon)A(\mu, \varepsilon)\varepsilon y^{\varepsilon-1} + o(y^{\varepsilon-1}),$$

и, очевидно, она отлична от нуля. Таким образом, седло-узловая неподвижная точка является простой. Подставляя (13.3.10) в первое уравнение в (13.3.9), мы получаем уравнение соответствующей бифуркационной кривой L_1 :

$$\mu = \varepsilon e^{-1}A(0, \varepsilon)^{1/|\varepsilon|}[1 + o(1)]. \quad (13.3.11)$$

Бифуркационная диаграмма показана на рис. 13.3.1. Кривая L_1 , отвечает полуустойчивому предельному циклу. Кривая L_2 (отрицательная полуось ε) отвечает петле сепаратрисы с положительной седловой величиной, тогда как L_3 (положительная полуось ε) отвечает петле сепаратрисы с отрицательной седловой величиной. Эти кривые разделяют окрестность начала координат в плоскости параметров на три области. В области D_1 существуют два предельных цикла. При пересечении L_1 они сливаются и исчезают, таким образом, в области D_2 нет предельных циклов. При переходе из D_1 в D_3 из гомоклинической петли на кривой L_3 ($\sigma_0 < 0$) рождается устойчивый предельный цикл. Устойчивый предельный цикл существует при значениях параметров, отвечающих D_3 , L_2 и D_1 . При переходе через кривую L_2 в D_3 из гомоклинической петли ($\sigma_0 > 0$) рождается еще один предельный цикл, на этот раз — неустойчивый. Эта бифуркационная диаграмма была получена Ноздрачевой [99].

Рассмотрим далее случай, когда $-1 < A < 0$, который соответствует петле сепаратрисы Γ на неориентируемой поверхности (случай $A < -1$ получается из данного обращением времени). Тогда окрестность $\bar{\Gamma}$ имеет форму ленты Мёбиуса, медианой которой является $\bar{\Gamma}$. Отображение Пуанкаре в этом случае также имеет вид (13.3.8), с функцией φ , удовлетворяющей оценкам (13.3.7). Однако в данный момент нам нужна большая гладкость. Поэтому мы предполагаем, что система является по крайней мере $\mathbb{C}^4$ -гладкой, т. е. в (13.3.7) $r \geq 4$.

Поскольку $A < 0$, отображение Пуанкаре убывающее. Новизна в этом случае состоит в том, что такие отображения могут иметь орбиты периода два, которые отвечают двухобходным предельным циклам. Они могут возникать при бифуркации удвоения периода (неподвижной точки с мультипликатором, равным -1) или при бифуркации двухобходной гомоклинической петли. В отображении Пуанкаре последний случай соответствует точкам периода два с $y = 0$ (см. рис. 13.3.2).

Поскольку $T(0) = \mu$, двухобходная петля возникает, когда

$$0 = \mu + A(\mu, \varepsilon)\mu^{1+\varepsilon} + o(\mu^{1+\delta}).$$

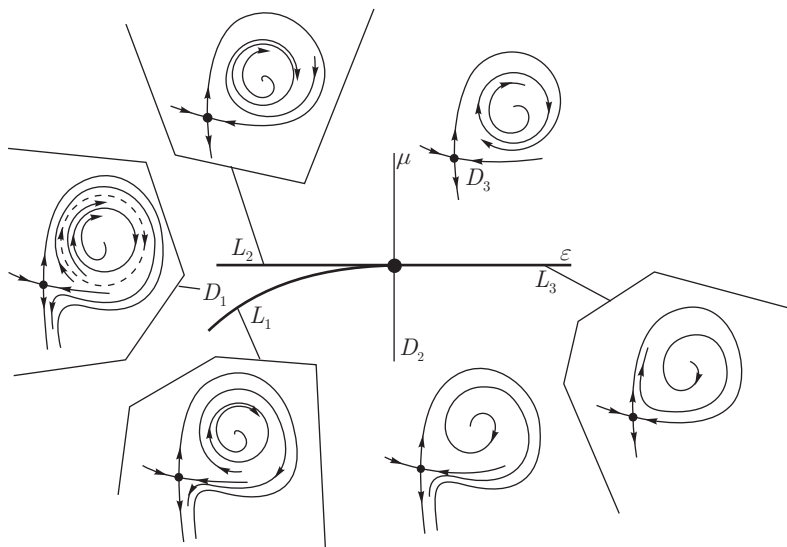


Рис. 13.3.1. Бифуркационная диаграмма для гомоклинической петли к седлу с нулевой седловой величиной ($\lambda + \gamma = 0$) в ориентируемом случае ($0 < A < 1$). Параметр μ управляет расщеплением петли; знак ε противоположен знаку седловой величины

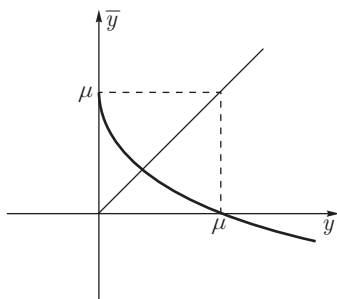


Рис. 13.3.2. Диаграмма Ламерея, соответствующая двухобходной петле сепаратрисы

Из этого соотношения мы получаем следующее уравнение для бифуркационной кривой L_2 , отвечающей двойной петле:

$$\mu = |A(0, \varepsilon)|^{1/|\varepsilon|} [1 + o(1)], \quad \varepsilon < 0. \quad (13.3.12)$$

Поскольку $\varepsilon < 0$, седловая величина положительна, и, следовательно, периодическая орбита, рождающаяся из двухобходной петли сепаратрисы, в этом случае неустойчива.

Отметим (см. рис. 13.3.3), что кривая L_2 лежит выше кривой L_1 , заданной системой

$$\begin{aligned} y &= \mu + A(\mu, \varepsilon)y^{1+\varepsilon} + o(y^{1+\delta}), \\ -1 &= (1 + \varepsilon)A(\mu, \varepsilon)y^\varepsilon + o(y^\delta), \end{aligned} \quad (13.3.13)$$

которая отвечает бифуркации удвоения периода. Исключая y из (13.3.13), мы находим, что кривая L_1 имеет вид

$$\mu = \frac{2}{\varepsilon} |A(0, \varepsilon)|^{1/|\varepsilon|} [1 + o(1)], \quad \varepsilon < 0. \quad (13.3.14)$$

Бифуркационная диаграмма (полученная в [38]) для этого случая показана на рис. 13.3.3. Она включает 4 бифуркационные кривые:

- L_1 отвечает бифуркации удвоения периода, т. е. грубому предельному циклу с одним мультипликатором, равным -1 , и положительной первой ляпуновской величиной⁴;
- L_2 отвечает двухобходной петле сепаратрисы на ленте Мёбиуса. Седловая величина σ_0 на этой кривой положительна;
- L_3 (отрицательная полуось ε) отвечает простой петле сепаратрисы с положительной седловой величиной σ_0 и
- L_4 (положительная полуось ε) соответствует простой петле сепаратрисы с отрицательной седловой величиной σ_0 .

В плоскости параметров (μ, ε) эти кривые выделяют 4 области структурно устойчивого поведения траекторий.

В области D_1 не существует предельных циклов. На кривой L_4 при переходе из D_1 в D_2 из простой петли сепаратрисы рождается устойчивый предельный цикл. Двухобходный неустойчивый цикл рождается из двухобходной петли сепаратрисы с $\sigma_0 > 0$ на кривой L_2 . Таким образом, в области D_3 существуют два предельных цикла: один устойчивый, а другой неустойчивый. Неустойчивый двухобходный предельный цикл влипают в устойчивый предельный цикл на кривой L_1 . После этого в области D_4

⁴Для того чтобы найти ляпуновскую величину, нам необходимы по крайней мере три производные от функции в правой части (13.3.8), поэтому нам требуется, чтобы в (13.3.7) $r \geq 4$.

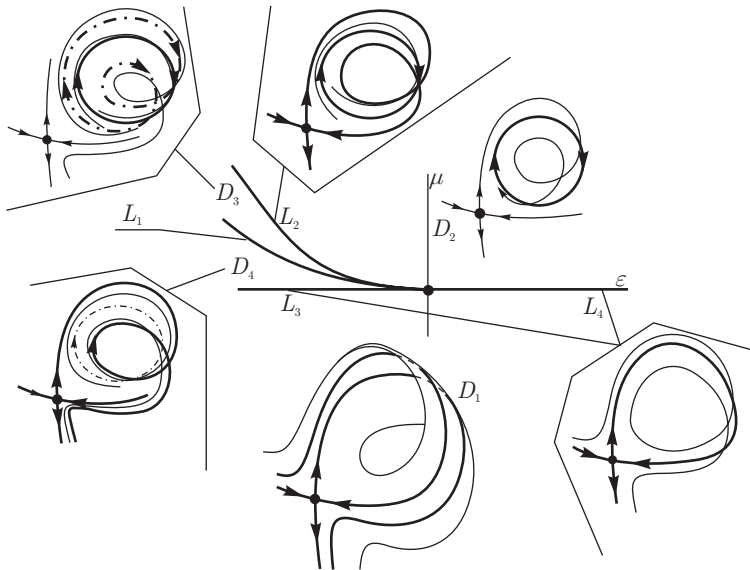


Рис. 13.3.3. Бифуркационная диаграмма для гомоклинической петли к седлу с нулевой седловой величиной в неориентируемом случае ($-1 < A < 0$). Управляющие параметры те же, что и на рис. 13.3.1

остается только однообходной неустойчивый предельный цикл. Он влипает в гомоклиническую петлю на кривой L_3 .

Заметим, что нужно также доказать, что в этой бифуркационной диаграмме нет других бифуркационных кривых; а именно что нет седло-узловых орбит периода два. Орбита периода два отображения (13.3.8) должна удовлетворять уравнению

$$\begin{aligned} y_2 &= \mu + A(\mu, \varepsilon)y_1^{1+\varepsilon} + \varphi(y_1), \\ y_1 &= \mu + A(\mu, \varepsilon)y_2^{1+\varepsilon} + \varphi(y_2). \end{aligned} \quad (13.3.15)$$

Если (y_1, y_2) — решение этой системы, то (y_2, y_1) также является решением. Существует также решение $y_1 = y_2 = y_0$, где y_0 — это единственная неподвижная точка отображения (13.3.8), которая всегда существует при $\mu > 0$. Таким образом, чтобы доказать, что седло-узлов периода два нет, достаточно проверить, что система (13.3.8) имеет не более трех решений, считая с кратностями. Эта проверка будет проведена в параграфе 13.6 для более общей системы (см. (13.6.26)), соответствующей бифуркации гомоклинической петли многомерного седла с $\sigma_0 = 0$.

13.4. Рождение периодических орбит из гомоклинической петли (случай $\dim W^u=1$)

Далее мы рассматриваем бифуркации гомоклинических петель в размерностях больше двух. Рассмотрим непрерывное однопараметрическое семейство X_μ $\mathbb{C}^r$ -гладких систем ($r \geq 1$) в $\mathbb{R}^{m+1}$ (или на $(m+1)$ -мерном гладком многообразии), имеющее седловое состояние равновесия O_μ . Без потери общности можно считать, что состояние равновесия находится в начале координат при всех μ . Допустим также, что только один характеристический показатель O положителен и что остальные лежат слева от мнимой оси. Мы обозначаем характеристические показатели как γ и $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ соответственно, так что

$$\gamma > 0 > \operatorname{Re} \lambda_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

По условию, неустойчивое многообразие W^u седла O одномерно, а устойчивое многообразие W^s седла O является m -мерным. Неустойчивое многообразие состоит из трех орбит: самого седла O и двух сепаратрис: Γ_1 и Γ_2 . Мы предполагаем, что при $\mu = 0$ система имеет петлю сепаратрисы; т. е. Γ_1 стремится к O при $t \rightarrow +\infty$. Таким образом,

$$\Gamma_1 \subset W^s.$$

Кроме того, мы предполагаем, что петля расщепляется при $\mu \neq 0$: внутрь (выше W^s), если $\mu > 0$, и наружу (ниже W^s), если $\mu < 0$.

Сначала рассмотрим случай *отрицательной седловой величины* σ

$$\sigma = \gamma + \max \operatorname{Re} \lambda_i < 0. \quad (13.4.1)$$

Геометрически это означает, что линеаризованный поток вблизи седла *сжимает двумерные площади*. Это означает, в свою очередь, что локальное отображение между любыми двумя секущими является сжатием (см. доказательство леммы 13.3). По этой причине динамика системы вблизи такой гомоклинической петли является простой.

Теорема 13.6 (Шильников [130]). *Когда седловая величина σ отрицательна, из гомоклинической петли при $\mu > 0$ рождается единственная устойчивая периодическая орбита L . Сепаратриса Γ_1 стремится к L при $t \rightarrow +\infty$. При $\mu \leq 0$ в малой окрестности U гомоклинической петли нет периодических орбит. Траектории X_μ стремятся либо к L (или к петле Γ при $\mu = 0$), либо к O , или покидают U при $t \rightarrow +\infty$.*

Качественное поведение, описанное теоремой, проиллюстрировано на рис. 13.4.1.

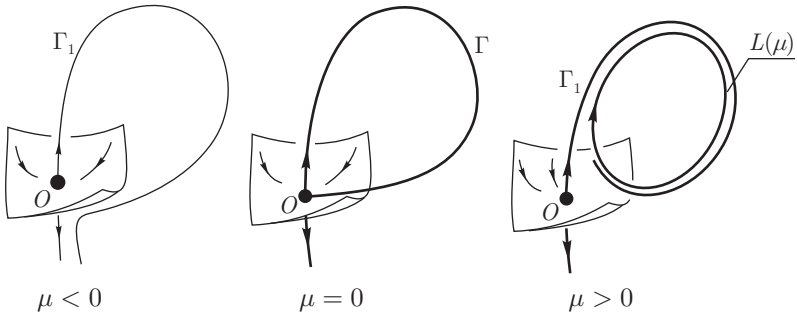


Рис. 13.4.1. Рождение устойчивой периодической орбиты из петли сепаратрисы к седлу с $\sigma_0 < 0$

Первоначально эта теорема была доказана для $\mathbb{C}^2$ -гладких систем. Мы подчеркиваем здесь, что наше доказательство включает $\mathbb{C}^1$ -случай, что делает возможным непосредственное использование этой теоремы в ситуации, когда система задана на $\mathbb{C}^1$ -гладком инвариантном многообразии (см. теорему 13.9).

Доказательство теоремы основано на изучении отображения Пуанкаре $T = T_1 \circ T_0$. Как обычно, локальное отображение по траекториям вблизи O между некоторыми секущими S_0 и S_1 обозначается через T_0 , а глобальное отображение из S_1 в S_0 по траекториям, близким к гомоклинической петле Γ , обозначается соответственно через T_1 .

Введем такие координаты (u, y) , $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^1$ вблизи O , что неустойчивое многообразие будет касаться оси y в O , а устойчивое многообразие будет касаться u -пространства. Таким образом, систему вблизи O можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= B(\mu)u + p(u, y, \mu), \\ \dot{y} &= \gamma(\mu)y + q(u, y, \mu), \end{aligned} \quad (13.4.2)$$

где p и q обращаются в нуль в начале координат вместе со своими первыми производными по (u, y) ; характеристические числа $\lambda_1(\mu), \dots, \lambda_m(\mu)$ матрицы B имеют отрицательные действительные числа, а характеристический показатель $\gamma(\mu)$ действителен и положителен.

Пусть M^+ — некоторая точка гомоклинической петли Γ на W_{loc}^s , а M^- — точка Γ на W_{loc}^u . Мы выбираем эти точки достаточно близко к O , чтобы иметь возможность построить две секущие, трансверсальные к Γ_1 : секущая S_0 проходит через точку M^+ , а секущая S_1 проходит через M^- (рис. 13.4.2). Так как устойчивое многообразие касается пространства u ,

Отметим, что устойчивое многообразие делит секущую на две части и что отображение T_0 задано только на верхней части S_0^+ (все траектории, начинающиеся на нижней части S_0^- , покидают малую окрестность O вдоль другой сепаратрисы Γ_2 и, таким образом, не пересекают S_1).

Как и в двумерном случае, глобальное отображение T_1 из S_1 в S_0 по траекториям системы вблизи гомоклинической петли является диффеоморфизмом малой окрестности точки M^- на малую окрестность точки M^+ . Таким образом, его производная ограничена.

Отсюда отображение Пуанкаре $T = T_1 \circ T_0$ является сильно сжимающим отображением из S_0^+ в S_0 . Очевидно, что, когда точка $M \in S_0^+$ приближается к границе $S_{00} = W_{\text{loc}}^s \cap S_0$, ее образ $T_0 M$ стремится к точке $M^-(\mu) = \Gamma_1(\mu) \cap S_1$. Следовательно, по непрерывности, мы можем определить

$$TS_{00} = M^+(\mu) \equiv T_1 M^-(\mu).$$

По условию, петля расщепляется внутрь (выше W_{loc}^s) при $\mu > 0$ и наружу (ниже W_{loc}^s) при $\mu < 0$. Это эквивалентно следующему условию:

$$M^+(\mu) \in \begin{cases} S_0^+ & \text{при } \mu > 0, \\ S_{00} & \text{при } \mu = 0, \\ S_0^- & \text{при } \mu < 0. \end{cases}$$

Лемма 13.4. Пусть V — замкнутое выпуклое множество в $\mathbb{R}^m$, а U — замкнутое подмножество V . Пусть T — сжимающее отображение $T: U \rightarrow V$. Допустим также, что граница ∂U множества U в V отображается под действием T в одну точку M^+ . Тогда если $M^+ \in U$, то отображение имеет единственную неподвижную точку $M^* \in U$, которая является пределом итераций точки M^+ под действием T . Все траектории, которые не входят в $V \setminus U$, стремятся к неподвижной точке на U . Напротив, если $M^+ \in V \setminus U$, тогда на U нет неподвижных точек; более того, любая орбита покидает U после конечного числа итераций отображения.

Отметим, что теорема 13.6 немедленно следует из этой леммы. Здесь $V = S_0$, $U = S_0^+$, $\partial U = S_{00}$, $V \setminus U = S_0^-$, и, поскольку T является отображением Пуанкаре, его устойчивая неподвижная точка в S_+ отвечает устойчивому предельному циклу (неподвижная точка на $S_{00} = W_{\text{loc}}^s \cap S_0$ отвечает гомоклинической петле Γ по построению).

Для того чтобы доказать лемму, продолжим отображение T на $U \setminus V$ так, что $TM = M^+$ для всех $M \in V \setminus U$. Это продолженное отображение остается сжимающим и отображает V в V . Таким образом, у него есть

единственная неподвижная точка M^* , которая притягивает орбиты всех точек V . Эта неподвижная точка является неподвижной точкой исходного отображения T при условии, что она принадлежит U ; в противном случае, если она лежит в $V \setminus U$, это «виртуальная неподвижная точка». В последнем случае $M^* = TM^* = M^+$ по построению. И наоборот, если $M^+ \in V \setminus U$, то $TM^+ = M^+$, откуда следует, что $M^+ = M^*$ (в силу единственности неподвижной точки). Таким образом, $M^* \notin U$ тогда и только тогда, когда $M^+ \notin U$. Мы почти доказали лемму. Осталось доказать только, что итерации M^+ не покидают U в случае, если $M^* \in U$ (отсюда следует, что эти итерации стремятся к M^*). Заметим теперь, что в силу сжатия мы имеем следующее соотношение:

$$\text{dist}(T^k M^+, M^*) = \text{dist}(T^{k+1}(\partial U), T^{k+1} M^*) < \text{dist}(\partial U, M^*),$$

которое доказывает наше утверждение и, следовательно, завершает доказательство леммы 13.4 и теоремы 13.6. ■

Этот результат дает нам последнюю известную основную (т.е. коразмерности один) границу устойчивости для периодических орбит. Ниже мы увидим (теоремы 13.9 и 13.10), что другие случаи бифуркаций гомоклинической петли приводят либо к сложной динамике (бесконечному множеству периодических орбит), либо к рождению единственной седловой периодической орбиты.

Так, рассмотрим случай положительной седловой величины, т.е.

$$\gamma + \max_{i=1, \dots, m} \text{Re } \lambda_i > 0$$

(где, как и ранее, мы обозначаем положительный характеристический показатель через γ , а $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ обозначают характеристические показатели с отрицательной действительной частью). Мы полагаем, что характеристический показатель, ближайший к мнимой оси, является простым и действительным, т.е.

$$0 > \lambda_1 > \max_{i=2, \dots, m} \text{Re } \lambda_i.$$

Случай комплексного λ_1 будет рассматриваться позднее (теорема 13.8).

Введем следующие условия невырожденности⁵:

⁵Напомним, что сильно устойчивое инвариантное многообразие W^{ss} касается в O собственного подпространства матрицы линеаризации, которое отвечает неведущим характеристическим показателям $\lambda_2, \dots, \lambda_m$. Оно $(m-1)$ -мерно и делит W^s на две компоненты. Орбиты в W^s , которые не лежат в W^{ss} , стремятся к O вдоль ведущего направления при $t \rightarrow +\infty$. Расширенное неустойчивое многообразие является гладким и инвариантным, касательным в O к собственному подпространству, отвечающему характеристическим показателям γ и λ_1 .

- (1) $\Gamma \not\subset W^{ss}$.
- (2) *Расширенное неустойчивое многообразие W^{uE} транскверсально устойчивому многообразию W^s в точках Γ (рис. 13.4.3).*

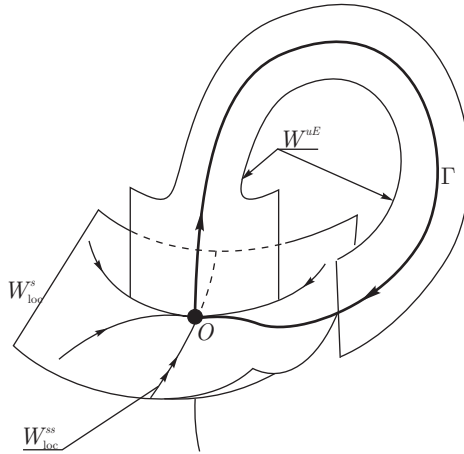


Рис. 13.4.3. Иллюстрация условий невырожденности теоремы 13.7: гомоклиническая петля входит в седло вдоль ведущего направления; многообразия W^{uE} и W^s транскверсально пересекают друг друга

Традиционно это условие записывается как

$$A \neq 0.$$

Мы ниже определим величину A в терминах отображения Пуанкаре. Она аналогична сепаратрисной величине A , введенной в параграфах 13.1 и 13.2 для двумерного случая. Напомним, что в размерности два величина A всегда отлична от нуля. Однако в многомерном случае условие необращения A в нуль существенно.

Ситуация, которую мы здесь рассматриваем, является частным случаем теоремы 13.9 следующего параграфа⁶. Из этой теоремы (примененной к системе в обращенном времени) следует, что из гомоклинической петли рождается единственная седловая периодическая орбита L ; она имеет

⁶Рассмотрим случай одномерного устойчивого многообразия в теореме 13.9 и проведем обращение времени. После этого условия (1) и (2) теоремы будут совпадать с двумя вышеприведенными условиями невырожденности.

m -мерное устойчивое многообразие и двумерное неустойчивое многообразие. Этот результат схож с теоремой 13.6. Заметим, однако, что в случае отрицательной седловой величины основной результат (о рождении единственного устойчивого предельного цикла) остается верным без каких-либо дополнительных условий невырожденности (нигде не требуется, чтобы ведущее устойчивое характеристическое число λ_1 было простым или действительным). Напротив, когда седловая величина положительна, нарушение условий невырожденности (1) и (2) ведет к новым бифуркациям. Мы будем изучать эту задачу в параграфе 13.6.

Допустим далее, что система имеет гладкость $\mathbb{C}^r$ с $r \geq 2^7$. В этом случае систему вблизи O можно записать в виде [см. параграф 13.8 и формулу (13.8.28)]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\lambda_1 x + f_{11}(x, y)x + f_{12}(x, u, y)u, \\ \dot{u} &= B_2 u + f_{21}(x, y)x + f_{22}(x, u, y)u, \\ \dot{y} &= \gamma y,\end{aligned}\tag{13.4.4}$$

где $x \in \mathbb{R}^1$ и $y \in \mathbb{R}^1$ — ведущие координаты, $u \in \mathbb{R}^{m-1}$ — вектор устойчивых неведущих координат, характеристические числа $(\lambda_2, \dots, \lambda_m)$ матрицы B_2 лежат слева от прямой $\operatorname{Re}(\cdot) = \lambda_1$. Функция f_{ij} удовлетворяет тождествам

$$f_{i1}(x, 0) \equiv 0, \quad f_{1j}(0, 0, y) \equiv 0.\tag{13.4.5}$$

В этих координатах устойчивое многообразие локально имеет вид $y = 0$, локальное неустойчивое многообразие имеет вид $\{x = 0, u = 0\}$, а сильно устойчивое многообразие имеет вид $\{x = 0, y = 0\}$.

Расширенное неустойчивое многообразие касается плоскости $u = 0$ в точках неустойчивого многообразия. Действительно, линеаризация при $\{x = 0, u = 0\}$ уравнения для $\dot{u}$ имеет вид (мы используем, что $f_{21} = 0$ при $x = 0$):

$$\dot{u} = (B_2 + f_{22}(0, 0, y(t)))u.$$

Отсюда следует, что плоскость $u = 0$ инвариантна по отношению к потоку, линеаризованному вдоль W_{loc}^u , и трансверсальна к W^{ss} в O . Таким образом, она действительно является однозначно определенной касательной к W^{ss} в W_{loc}^u (см. параграф 5.3, часть I).

По условию, петля Γ входит в O (при $t \rightarrow +\infty$) вдоль оси x . А когда она покидает O при $t \rightarrow -\infty$, она локально совпадает с полуосью y . Мы предполагаем, что Γ примыкает к O со стороны положительных x и y соответственно.

⁷Картина сохраняется и в случае $\mathbb{C}^1$; однако, когда система, по крайней мере $\mathbb{C}^2$, анализ становится гораздо более явным.

Выберем две секущие, трансверсальные к Γ ; а именно $S_0: \{x = d\}$ и $S_1: \{y = d\}$ для некоторого малого $d > 0$. Обозначим координаты на S_0 через (y_0, u_0) и координаты на S_1 через (x_1, u_1) . Нас интересует, что происходит в малой окрестности Γ , поэтому мы предполагаем, что $\|u_0 - u^+\| \leq \delta$ на S_0 и $\|x_1, u_1\| \leq \delta$ на S_1 для некоторого малого $\delta > 0$. Здесь u^+ — это u -координата точки $M^+(0, u^+) = \Gamma \cap S_0$.

Локальное отображение $T_0: S_0 \rightarrow S_1$ в данных координатах записывается как (см. формулу (13.8.30) в параграфе 13.8)

$$x_1 = y_0^\nu d^{1-\nu} + o(y_0^\nu), \quad u_1 = o(y_0^\nu), \quad (13.4.6)$$

где $\nu = |\lambda_1/\gamma|$ — седловой индекс. Отметим, что только члены $o(y_0^\nu)$ зависят от u_0 в правой части (13.4.6). Локальное отображение задано на верхней половине $S_0^+: \{y_0 \geq 0\}$ секущей S_0 (орбиты, начинающиеся с $y_0 < 0$, покидают малую окрестность O вдоль другой неустойчивой сепаратрисы, которая локально совпадает с отрицательной полуосью y). Из (13.4.6) видно, что образ $T_0 S_0^+$ на S_1 является криволинейным треугольником (рис. 13.4.4) с вершиной в точке $M^-(0, 0) = \Gamma \cap S_1$ и боковыми границами в M^- , касательными к $W_{\text{loc}}^{uE} \cap S_1$ (оси x_1 в наших координатах).

Легко видеть, что отображение T_0 является сильно сжимающим в u -направлении и, поскольку $\nu < 1$ (что эквивалентно $\sigma = \gamma + \lambda_1 > 0$), оно является растягивающим по y^8 ; т. е.

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_0} \gg 1.$$

⁸Мы уже видели это в параграфе 2.4 в случае, когда система вблизи седла линейна. В случае C^1 -гладкой нелинейной системы эта картина следует из оценок, доказанных в параграфе 6.2. Действительно, из леммы 6.3 следует, что в нашем случае образом под действием T_0 любой линии $\{u_0 = \text{const}, y_0 \geq 0\}$ из S_0 будет кривая

$$u_1 = w_{\text{loc}}(d, x_1, u_0), \quad x_1 \geq 0$$

на S_1 , где w_{loc} является гладкой функцией, которая тождественно обращается в нуль при $x_1 = 0$ вместе со своей первой производной по x_1 . Таким образом, для любого заданного u_0 эта кривая касается оси x_1 в точке M^- , т. е. все множество $T_0 S_0^+$ является криволинейным клином, касательным к оси x_1 . Сжатие в u -направлении и растяжение в y -направлении даются леммой 6.1. Отметим, что наши обозначения здесь и в параграфе 6.2 различны. Чтобы установить соответствие с леммами 6.1–6.3, необходимо произвести следующую подстановку: отображение T_{loc} в параграфе 6.2 является обратным нашему отображению T_0 , наши секущие S_0 и S_1 — это S^{out} и S^{in} из параграфа 6.2 соответственно. И, наконец координаты (u^0, y^0, w^0) на S^{in} и (u^1, w^1) на S^{out} в лемме 6.2. совпадают с нашими координатами $(y = d, x_1, u_1)$ на S_1 и соответственно (y_0, u_0) на S_0 .

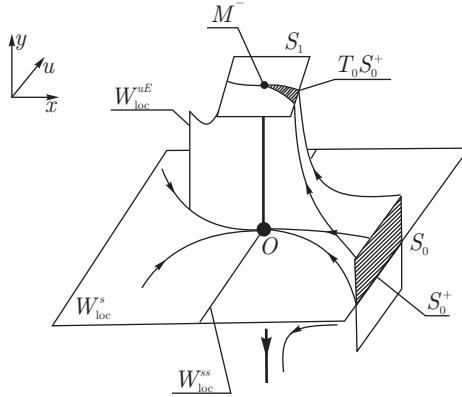


Рис. 13.4.4. Локальное отображение T_0 переводит верхнюю половину S_0^+ секущей S_0 в криволинейный треугольник на секущей S_1 . Все точки из $S_0 \cap W_{\text{loc}}^s$ отображаются в одну точку M^-

Поток вне малой окрестности O задает глобальное отображение $T_1 : S_1 \rightarrow S_0$ по траекториям, близким к Γ . В малой окрестности начала координат M^- на S_1 отображение T_1 можно записать в виде

$$\begin{aligned} \bar{y}_0 &= \mu + a_{11}x_1 + a_{12}u_1 + \dots, \\ \bar{u}_0 &= u^+(\mu) + a_{21}x_1 + a_{22}u_1 + \dots, \end{aligned} \quad (13.4.7)$$

где μ — параметр расщепления петли. Если мы обозначим $M^+(\mu) = \Gamma_1(\mu) \cap S_0 = T_1 M^-$, то $(\mu, u^+(\mu))$ будут координатами этой точки. По определению, $M^+ \in W_{\text{loc}}^s \cap S_0$ при $\mu = 0$. Когда $\mu > 0$, точка $M^+(\mu)$ лежит в S_0^+ , т. е. петля расщепляется вовнутрь. Когда $\mu < 0$, точка $M^+(\mu)$ лежит в S_0^- , т. е. петля расщепляется наружу.

Поскольку T_1 является диффеоморфизмом, мы имеем

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

(более того, $\Delta > 0$, когда поток определен в $\mathbb{R}^{n+1}$ или на ориентируемом многообразии). Из этого также следует, что и a_{11} и a_{12} не могут обращаться в нуль одновременно. Тем не менее коэффициент a_{11} может обращаться в нуль. Мы будем обозначать $a_{11} \equiv A$. По определению

$$A = \left. \frac{\partial \bar{y}_0}{\partial x_1} \right|_{M^-}. \quad (13.4.8)$$

Как мы видим, трансверсальность W^{uE} и W^s на Γ действительно эквивалентна условию $A \neq 0$. Заметим, что здесь важен выбор координат на секущих: поскольку мы берем ось x_1 касательной к $W_{\text{loc}}^{uE} \cap S_1$, образ этой линии $T_1(W_{\text{loc}}^{uE} \cap S_1)$ трансверсален к $\{y_0 = 0\} = W_{\text{loc}}^s \cap S_0$ тогда и только тогда, когда $\frac{\partial \bar{y}_0}{\partial x_1} \neq 0$.

Объединяя формулы (13.4.6) и (13.4.7), мы получаем следующую формулу для отображения Пуанкаре T :

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \mu + Ay^\nu + o(y^\nu), \\ \bar{u} &= u^+(\mu) + a_{21}y^\nu + o(y^\nu)\end{aligned}\tag{13.4.9}$$

(мы опускаем подстрочный индекс «0» и нормируем переменные так, чтобы $d = 1$ в (13.4.6); только члены $o(y^\nu)$ зависят от u в правой части). Отметим, что сепаратрисная величина A выступает в качестве коэффициента ведущего члена y^ν асимптотики для $\bar{y}$ в отображении Пуанкаре.

Отсюда если $A \neq 0$, то отображение $T = T_1 \circ T_0$ имеет то же свойство, что и отображение T_0 , а именно: оно является сжимающим в u -направлении и растягивающим в y -направлении, т. е. это *седловое отображение* (см. параграф 3.15). При $\mu = 0$ образ TS_0^+ на S_0 будет иметь вид, показанный на рис. 13.4.5. Отметим, что $TS_0^+ \cap S_0^+ = \emptyset$ при $A < 0$, т. е. в этом случае любая орбита из малой окрестности гомоклинической петли покидает окрестность после одной итерации вблизи петли. Напротив, в случае $A > 0$ пересечение $TS_0^+ \cap S_0^+$ не пусто. Для любой вертикальной прямой $u_0 = \text{const}$ в S_0^+ ее итерации отображением T лежат в S_0^+ и сходятся к гладкой кривой l_0^+ , инвариантной относительно T , выходящей из точки $M^+ = \Gamma \cap S_0$.

Рисунки 13.4.6 ($A\mu > 0$) и 13.4.7 ($A\mu < 0$) показывают, как движется образ S_0^+ под действием отображения T , когда петля расщеплена. В любом случае, так как отображение T является сжимающим по переменным u и растягивающим по y , отсюда следует, что оно имеет в S_0 гладкую притягивающую инвариантную кривую $l_0(\mu)$, трансверсальную к $\{y_0 = 0\}$.

Траектории, начинающиеся на $l_0(\mu)$, составляют двумерное инвариантное многообразие $\mathcal{M}_\mu$ потока. Доказательство существования такого многообразия в малой окрестности гомоклинической петли дается теоремой 6.2 параграфа 6.1 при условиях, которые совпадают для рассматриваемого случая с нашими условиями невырожденности.

Многообразие $\mathcal{M}_\mu$ содержит все траектории, остающиеся в малой окрестности U петли Γ для всех отрицательных значений времени. Вблизи O многообразие $\mathcal{M}_\mu$ совпадает с некоторым расширенным неустойчивым многообразием W_{loc}^{uE} . Таким образом, если мы обозначим $l_1(\mu) = \mathcal{M}_\mu \cap S_1$, то $l_1(\mu)$ будет касаться оси x_1 в точке M^- . Так как $\mathcal{M}_\mu -$

это инвариантное многообразие, то орбиты, начинающиеся на $l_1(\mu)$, должны пересекать S_0 в точках кривой $l_0(\mu)$, т. е. $T_1 l_1(\mu) = l_0(\mu)$. Из (13.4.7) и (13.4.8) следует, что в точках $l_0(\mu)$ многообразие $\mathcal{M}_\mu$ подклеивается само к себе с переменной ориентации, если $A < 0$, или с сохранением ориентации, если $A > 0$. Таким образом, $\mathcal{M}_\mu$ является кольцом, если $A > 0$, или лентой Мёбиуса, если $A < 0$ (см. рис. 13.4.8).

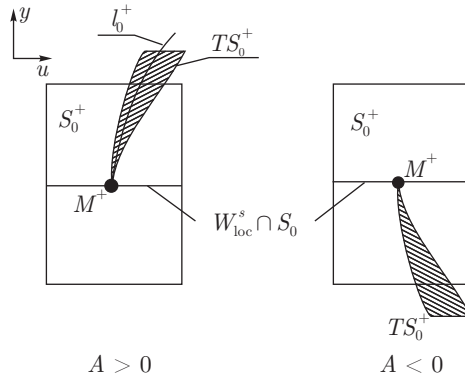


Рис. 13.4.5. Образ TS_0^+ области S_0^+ в S_0 является клином, который лежит в S_0^+ , если $A > 0$, или ниже $W_{loc}^s \cap S_0$, если $A < 0$. Когда $A > 0$, у отображения существует инвариантная кривая l_0^+

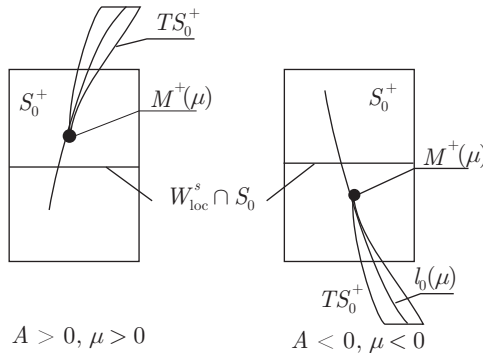


Рис. 13.4.6. Отображение после расщепления петли сепаратрисы

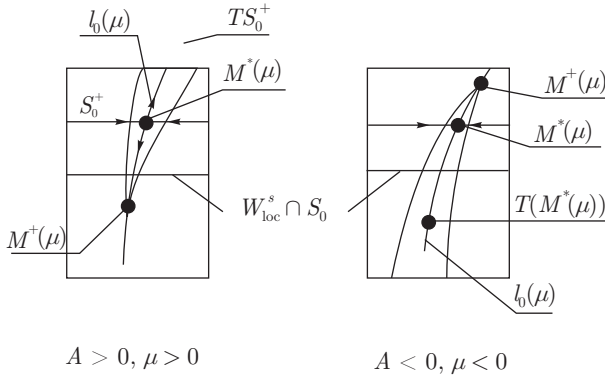


Рис. 13.4.7. Неподвижная точка M^* соответствует седловой периодической орбите, которая рождается из гомоклинической петли. Ее неустойчивый мультипликатор положителен, когда $A > 0$, и отрицателен в случае $A < 0$

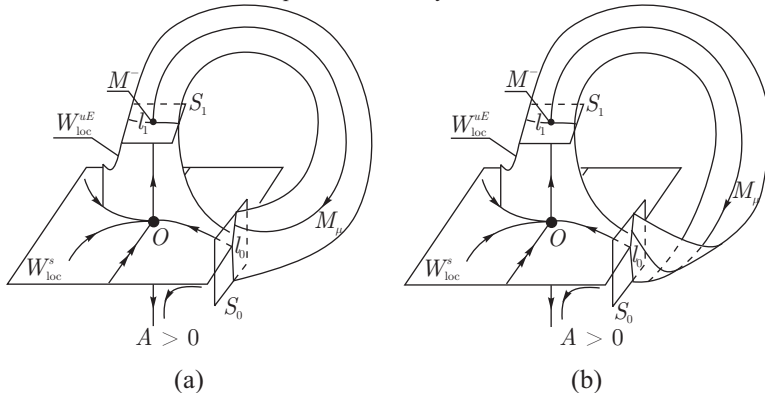


Рис. 13.4.8. Инвариантное многообразие M_μ является ориентируемой поверхностью, когда $A > 0$ (a), или лентой Мёбиуса, если $A < 0$ (b)

Ограничение на инвариантную кривую $l_0(\mu)$ отображения T является растягивающим одномерным отображением, монотонно возрастающим при $A > 0$ и монотонно убывающим, когда $A < 0$. Диаграммы Ламерея для таких отображений показаны на рис. 13.2.5 и 13.2.6 в параграфе 13.2. Так, можно видеть, что все траектории покидают S_0^+ при итерациях T , если $A\mu > 0$. Если $A\mu < 0$, то отображение T имеет неустойчивую неподвижную точку $M^*(\mu)$ на $l_0(\mu)$. В силу сжатия в направлениях, поперечных к $l_0(\mu)$, точка $M^*(\mu)$ является седлом в S_0^+ .

Из (13.4.9) легко можно найти координаты неподвижной точки:

$$u \sim u^+(\mu), \quad y \sim (-\mu/A)^{1/\nu}.$$

Поскольку неподвижная точка отображения Пуанкаре T отвечает периодической орбите потока, мы можем сформулировать следующий результат (см. рис. 13.4.9).

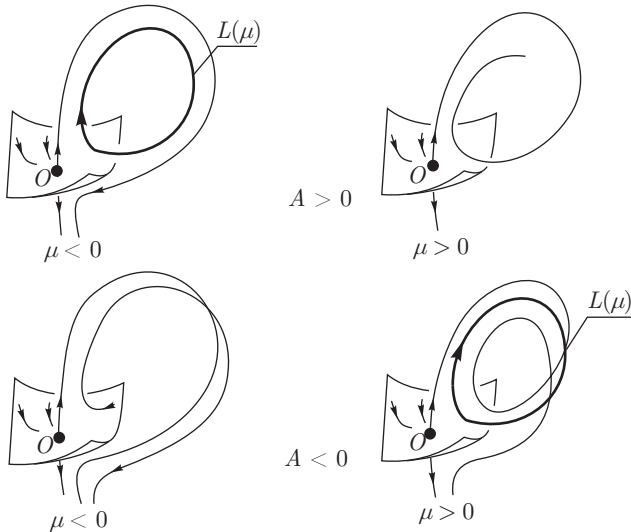


Рис. 13.4.9. Рождение седловой периодической орбиты из гомоклинической петли к седлу с положительной седловой величиной

Теорема 13.7. Если для гомоклинической петли Γ к седлу с положительной седловой величиной выполнены условия (1) и (2), то при $A\mu < 0$ из петли рождается одна седловая периодическая орбита $L(\mu)$. Неустойчивое многообразие $L(\mu)$ двумерно и является ориентируемым, когда $A > 0$ (здесь существует только один положительный мультипликатор больший 1), или неориентируемым, когда $A < 0$ (тогда мультипликатор, больший 1 по модулю, отрицателен). При $A\mu > 0$ не существует орбит (кроме состояния равновесия O), остающихся в малой окрестности U петли Γ при всех значениях времени. При $A\mu < 0$ почти все орбиты покидают U . Исключением служат O , L и одна гетероклиническая орбита α -предельная к L и ω -предельная к O ⁹.

⁹Эта орбита является устойчивой сепаратрисой точки O на инвариантном многообразии $\mathcal{M}_\mu$.

На секущей S_0 локальным неустойчивым многообразием неподвижной точки является малый отрезок инвариантной кривой точки $l_0(\mu)$, проходящий через эту точку. Целиком неустойчивое многообразие $M^*(\mu)$ на S_0 можно получить, итерируя локальное неустойчивое многообразие под действием отображения T . Поскольку область определения S_0^+ отображения T ограничена поверхностью $\{y_0 = 0\} = W_{\text{loc}}^s(O) \cap S_0$, неустойчивое многообразие $M^*(\mu)$ ограничено прообразами этой поверхности. Таким образом, оно является частью $l_0(\mu)$, ограниченной точкой $M^+(\mu) = T_1 M^- = \Gamma_1(\mu) \cap S_0$, если $A > 0$, или частью $l_0(\mu)$ между точками $M^+(\mu)$ и $T(M^+(\mu))$, когда $A < 0$ (см. рис. 13.4.7). При $\mu \rightarrow 0$ неустойчивое многообразие точки $M^*(\mu)$ стремится к инвариантной кривой l_0^+ при $A > 0$ или сжимается в точку M^+ при $A < 0$; устойчивое многообразие точки $M^*(\mu)$ стремится к $\{y_0 = 0\}$.

По построению кривая l_0^+ является пересечением инвариантного многообразия $\mathcal{M}_0$ с S_0^+ . Если $A > 0$, то при $\mu = 0$ прообразы точек на l_0^+ стремятся к точке $M^+ = \Gamma \cap S_0$. Таким образом, в случае $A > 0$ все орбиты из верхней половины ($y_0 > 0$) инвариантного многообразия $\mathcal{M}_0$ являются α -предельными к гомоклинической петле Γ (см. также замечание 4 в параграфе 13.2). Поскольку многообразие $\mathcal{M}_0$ является притягивающим, оно должно отталкивать отрицательные полутраектории. Таким образом, не может существовать других орбит, которые являются α -предельными к Γ . Следовательно, верхняя часть $\mathcal{M}_0$ есть однозначно определенное *неустойчивое многообразие* петли Γ при $A > 0$ (рис. 13.4.10).

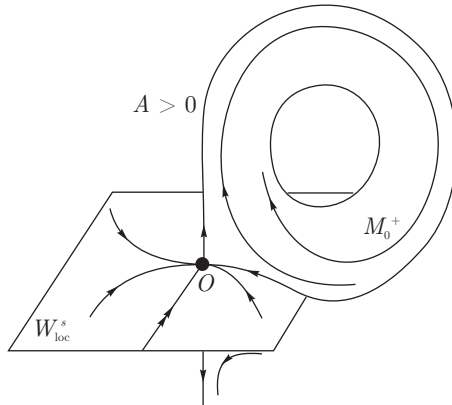


Рис. 13.4.10. Ориентируемая гомоклиническая петля ($A > 0$) к седлу с положительной седловой величиной имеет неустойчивое инвариантное многообразие

Когда $\mu \neq 0$, неподвижная точка $M^*(\mu)$ отображения Пуанкаре отвечает седловой периодической орбите $L(\mu)$ потока. Неустойчивое многообразие $L(\mu)$ пересекает устойчивое многообразие O и поэтому ограничено неустойчивыми сепаратрисами $\Gamma_{1,2}$. Из нашего анализа следует, что, когда $A > 0$, неустойчивое многообразие $L(\mu)$ является двумерным цилиндром, который стремится к неустойчивому многообразию Γ при $\mu \rightarrow -0$. Когда $A < 0$, неустойчивое многообразие $L(\mu)$ есть лента Мёбиуса, которая стягивается в Γ при $\mu \rightarrow +0$.

При $\mu \rightarrow 0$ устойчивое многообразие $L(\mu)$ приближается к W_+^s — т.е. к той компоненте $W^s(O) \setminus W^{ss}(O)$, которая содержит Γ . Характерный вид W_+^s в малой окрестности U петли Γ схематически изображен на рис. 13.4.11. Локальное устойчивое многообразие можно продолжить вдоль Γ в обратном времени, так что оно вернется в малую окрестность O . Поскольку $A \neq 0$, многообразие W^s трансверсально к W_{loc}^{uE} и, таким образом, оно стремится к многообразию W^{ss} при $t \rightarrow -\infty$. Такая геометрия W^s является прямым следствием того, что A не обращается в нуль. Отметим, однако, что в некоторых случаях, даже если $A = 0$, многообразие W^s может стремиться к W^{ss} в обратном времени.

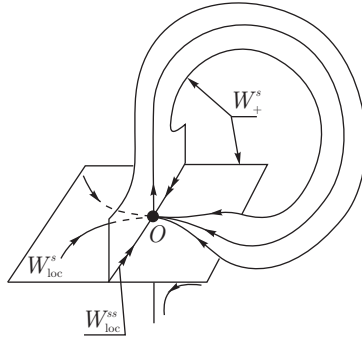


Рис. 13.4.11. Поведение устойчивого многообразия W_+^s в обратном времени вблизи гомоклинической петли к седлу с действительным λ_1 при выполнении условия невырожденности

Отметим также, что в случае $\sigma < 0$ мы имеем такое же геометрическое поведение, если выполнены три следующих условия:

- (1) ведущее собственное число λ_1 является простым и действительным;
- (2) гомоклиническая петля Γ не лежит в сильно устойчивом многообразии и
- (3) $A \neq 0$.

При этом отображение T по-прежнему будет иметь притягивающую инвариантную кривую $l_0(\mu)$, но (в случае $\sigma < 0$) отображение T является сжимающим на $l_0(\mu)$. Следовательно, гомоклиническая петля Γ обладает *устойчивым многообразием*, когда $A > 0$, т. е. множеством точек, которые являются ω -пределом Γ . Это множество состоит из всех траекторий, проходящих через верхнюю половину S_0^+ секущей S_0 , и ограничено замыканием W_+^s . Отметим, что возможное существование устойчивых и неустойчивых многообразий гомоклинических петель открывает дорогу появлению так называемых супергомоклинических (гомоклинических к гомоклиническому) орбит, которые могут существенно обогатить динамику. Мы отсылаем читателя к [69, 157, 159].

Как мы уже видели выше, динамика вблизи гомоклинической петли к седлу с действительными ведущими характеристическими числами является, по сути, двумерной. Новые явления возникают, когда мы рассматриваем случай седло-фокуса. А именно возьмем C^r -гладкую ($r \geq 2$) систему с состоянием равновесия O типа седло-фокус $(2, 1)$ (в обозначениях, введенных нами в параграфе 2.7). Другими словами, мы полагаем, что у состояния равновесия есть только один положительный характеристический показатель $\gamma > 0$, в то время как прочие характеристические показатели $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ имеют отрицательные действительные части. Кроме того, мы также полагаем, что ведущие (ближайшие к мнимой оси) характеристические показатели составляют комплексно-сопряженную пару λ_1 и λ_2 :

$$\lambda_{1,2} = -\rho \pm i\omega, \quad \operatorname{Re} \lambda_j < -\rho < 0 \quad (j = 3, \dots, m).$$

Заменой времени мы всегда можем сделать $\gamma = 1$, и в этом параграфе мы полагаем далее, что это так. Значит, случай $\rho > 1$ при этом соответствует отрицательной седловой величине (и, таким образом, попадает под действие теоремы 13.6). Поэтому мы будем главным образом фокусироваться на случае $\rho < 1$ (положительная седловая величина).

Неустойчивое W^u - и устойчивое W^s -многообразия состояния равновесия O одномерно и $(m-1)$ -мерно соответственно. Неустойчивое многообразие является объединением O и двух сепаратрис, Γ_1 и Γ_2 . По определению, сепаратрисы $\Gamma_{1,2}$ стремятся к O при $t \rightarrow -\infty$. Предположим, что одна из сепаратрис (Γ_1) стремится к O при $t \rightarrow +\infty$, образуя, таким образом, гомоклиническую петлю $\bar{\Gamma}$ (рис. 13.4.12).

Структура фазового пространства в малой окрестности $\bar{\Gamma}$ зависит от седлового индекса ρ . Мы увидим, что поведение траекторий в окрестности $\bar{\Gamma}$ существенно отлично в случае $\rho > 1$ (простая динамика) и $\rho < 1$ (сложная динамика).

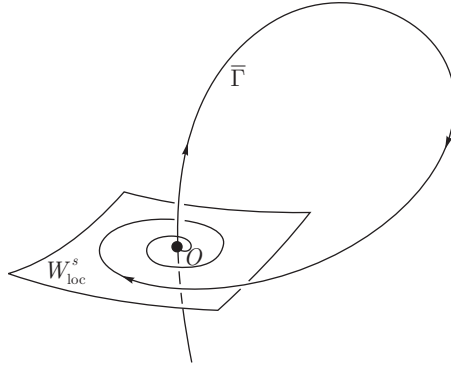


Рис. 13.4.12. Гомоклиническая петля к седло-фокусу

Наш анализ основан на построении отображения Пуанкаре T при помощи суперпозиции локального отображения $T_0 : S_0 \rightarrow S_1$ и глобального отображения $T_1 : S_1 \rightarrow S_0$, где S_0 и S_1 — подходящие секущие к Γ .

Из приложения А к части 1 (также см. формулу (13.8.28) в параграфе 13.8) следует, что систему вблизи O можно привести к виду

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\rho x_1 - \omega x_2 + f_{11}(x, y)x + f_{12}(x, u, y)u, \\ \dot{x}_2 &= \omega x_1 - \rho x_2 + f_{21}(x, y)x + f_{22}(x, u, y)u, \\ \dot{u} &= Bu + f_{31}(x, y)x + f_{32}(x, u, y)u, \\ \dot{y} &= y \end{aligned} \quad (13.4.10)$$

при помощи некоторого $\mathbb{C}^{r-1}$ -преобразования координат и времени. При этом $u \in \mathbb{R}^{m-2}$ — вектор неведущих координат, а характеристические числа матрицы $B = (\lambda_3, \dots, \lambda_m)$. $\mathbb{C}^{r-1}$ -функция f_{ij} удовлетворяет

$$f_{i1}(x, 0) \equiv 0, \quad f_{1j}(0, 0, y) \equiv 0, \quad f_{2j}(0, 0, y) \equiv 0. \quad (13.4.11)$$

В этих координатах инвариантные многообразия локально распрямлены: их уравнениями являются $W_{\text{loc}}^u = \{x = 0, u = 0\}$ и $W_{\text{loc}}^s = \{y = 0\}$ соответственно. Более того, система для ведущих координат (x_1, x_2) линейна на устойчивом многообразии.

Мы будем полагать, что Γ покидает O при $t = -\infty$ в направлении положительных y , т. е. она локально совпадает с положительной полуосью y . Таким образом, мы можем выбрать $y = d$ в качестве секущей S_1 для некоторого малого $d > 0$.

Когда сепаратриса возвращается к O , она лежит в устойчивом многообразии $y = 0$. Если система имеет размерность больше 3, мы будем предполагать, что Γ не принадлежит сильно устойчивому многообразию W^{ss} . Напомним, что W^{ss} — гладкое инвариантное многообразие, касательное к пространству u в O ; и если (13.4.11) выполнено, то $W^{ss} = \{x = 0, y = 0\}$. Напомним из параграфов 2.6 и 2.7, что любая траектория из $W^s \setminus W^{ss}$ (и следовательно, сепаратриса Γ тоже) стремится к O вдоль ведущей плоскости $u = 0$, так что ее проекция на эту плоскость является спиралью, которая пересекает, скажем, положительную полуось x_1 бесконечное множество раз. Пусть $M^+(x^+ > 0, 0, u^+, 0)$ — какая-нибудь точка соответствующего пересечения на Γ . Возьмем секущую $S_0 : \{x_2 = 0\}$, проходящую через эту точку.

Из параграфа 13.8 следует [см. (13.8.30)–(13.8.33)], что решение $(x(t), u(t), y(t))$, которое начинается в $x = (x_0, 0)$, $u = u_0$ при $t = 0$ и заканчивается в $y = d$, $t = \tau$, должно удовлетворять соотношению

$$\begin{aligned} y(0) &= e^{-\tau} d, \\ x(\tau) &= \exp \left[\tau \begin{pmatrix} -\rho & -\omega \\ \omega & -\rho \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix} + o(e^{-\rho\tau}), \\ u(\tau) &= o(e^{-\rho\tau}), \end{aligned} \quad (13.4.12)$$

где $o(e^{-\rho\tau})$ -члены обозначают некоторые $\mathbb{C}^{r-1}$ -гладкие функции от (x_0, u_0, τ) , которые вместе со всеми производными вплоть до $(r-1)$ порядка стремятся к нулю быстрее, чем $e^{-\rho\tau}$.

Теперь мы можем оценить время перехода τ из точки $(x_0, u_0, y_0) \in S_0$ на S_1

$$\tau = -\ln \frac{y_0}{d}.$$

Подставляя это выражение в (13.4.12), мы получаем следующую формулу для локального отображения $T_0 : (x_0, u_0, y_0) \mapsto (x_1, x_2, u_1) \in S_1$ ¹⁰ по траекториям потока вблизи O :

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 \left(\frac{y_0}{d} \right)^\rho \cos \omega \ln \frac{d}{y_0} + o(y_0^\rho), \\ x_2 &= x_0 \left(\frac{y_0}{d} \right)^\rho \sin \omega \ln \frac{d}{y_0} + o(y_0^\rho), \\ u_1 &= o(y_0^\rho). \end{aligned} \quad (13.4.13)$$

Здесь производные от $o(y_0^\rho)$ -членов по (x_0, u_0, y_0) вплоть до порядка $(r-1)$ оцениваются как $o(y_0^{\rho-q})$, где q — количество дифференцирований по y_0 .

¹⁰Мы обозначаем u -координаты точки на S_1 через u_1 , а на S_0 — через u_0 .

Отметим, что отображение T_0 задано только при $y_0 > 0$. Выберем малое $\delta > 0$, и пусть S_0^+ — прямоугольник $\{|x_0 - x^+| \leq \delta, \|u_0 - u^+\| \leq \delta, 0 \leq y_0 \leq \delta\}$ на S_0 (напомним, что $(x^+, u^+, 0)$ — это координаты точки $M^+ = \Gamma \cap S_0$). Из формул (13.4.13) видно, что образ $T_0 S_0^+$ в S_1 выглядит как «змея» (рис. 13.4.13), которая по спирали наматывается на точку $M^-(0, 0, 0) = \Gamma \cap S_1$ вдоль плоскости $u_1 = 0$ (мы уже описывали эту форму более детально в параграфе 2.4). По непрерывности, определим отображение T_0 на $y_0 = 0$ как $T_0(W_{\text{loc}}^s \cap S_0) = M^-$.

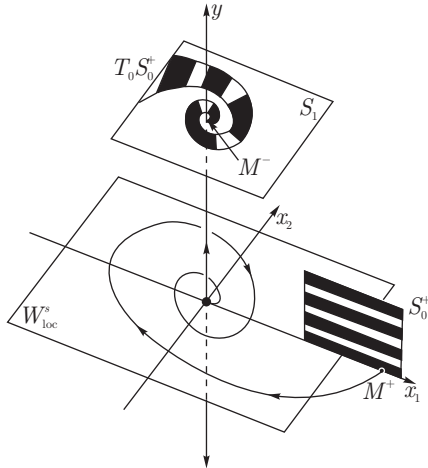


Рис. 13.4.13. Локальное отображение Пуанкаре вблизи седло-фокуса

Глобальное отображение $T_1 : S_1 \rightarrow S_0$ определено траекториями, близкими к той части Γ , которая лежит вне малой окрестности O . Отображение T_1 является диффеоморфизмом, который переводит точку M^- в M^+ , и, таким образом, его можно представить в виде

$$\begin{aligned}\bar{x}_0 &= x^+ + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}u_1 + \dots, \\ \bar{y}_0 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}u_1 + \dots, \\ \bar{u}_0 &= u^+ + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}u_1 + \dots\end{aligned}\tag{13.4.14}$$

Нам потребуется, чтобы

$$A \equiv \sqrt{a_{21}^2 + a_{22}^2} \neq 0.\tag{13.4.15}$$

Отметим, что это условие удовлетворяется автоматически в трехмерных системах, где нет неведущих координат u . В этом случае глобальное отображение принимает вид

$$\bar{x}_0 = x^+ + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots,$$

$$\bar{y}_0 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots$$

Так как глобальное отображение должно быть диффеоморфизмом, то

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \text{ что влечет (13.4.15).}$$

В размерностях, выше чем 3, условие $A \neq 0$ является существенным условием невырожденности. При этом важно, что мы используем координаты, в которых система локально имеет вид (13.4.10), и выполнены тождества (13.4.11). В этих координатах пересечением W_{loc}^s с S_0 является $y_0 = 0$, а пересечение расширенного неустойчивого многообразия W_{loc}^{uE} с S_1 касается пространства $u_1 = 0$ (расширенное неустойчивое многообразие есть гладкое инвариантное многообразие, трансверсальное к W_{loc}^{ss} в O). Таким образом, из (13.4.14) видно, что условие $A \neq 0$ эквивалентно условию трансверсальности $T_1(W_{\text{loc}}^{uE} \cap S_1)$ к $W_{\text{loc}}^s \cap S_0$ в точке M^+ , т. е. *условию трансверсальности расширенного неустойчивого многообразия W^{ue} к устойчивому многообразию W^s в точках гомоклинической петли Γ* .

Из формул (13.4.13) и (13.4.14) вытекает следующее выражение для отображения Пуанкаре $T = T_1 \circ T_0$:

$$\begin{aligned} \bar{y} &= Axy^\rho \cos\left(\omega \ln \frac{1}{y} + \theta\right) + o(y^\rho), \\ \bar{x} &= x^+ d^{-1} + A_1 xy^\rho \cos\left(\omega \ln \frac{1}{y} + \theta_1\right) + o(y^\rho), \\ \bar{u} &= u^+ d^{-1} + A_2 xy^\rho \cos\left(\omega \ln \frac{1}{y} + \theta_2\right) + o(y^\rho), \end{aligned} \quad (13.4.16)$$

где $(x, u, y) = (x_0, u_0, y_0)d^{-1}$ и $A_1, A_2, \theta, \theta_1, \theta_2$ — некоторые константы.

Образ множества $T_0 S_0^+$ под действием диффеоморфизма T_1 также имеет форму спирали. Он пересекает W_{loc}^s бесконечно много раз вблизи M^+ . Действительно, из (13.4.16)¹¹ непосредственно следует, что прообраз $T^{-1}(W_{\text{loc}}^s \cap S_0)$ множества $y = 0$ состоит из бесконечной последовательности поверхностей

$$l_k : y = y_k(x, u) \equiv C e^{-\pi k/\omega} (1 + o(1))_{k \rightarrow +\infty}, \quad (13.4.17)$$

¹¹Отметим, что $A > 0$ по условию и что $x > 0$, так как x близко к x^+ — координате точки $M^+ = \Gamma \cap S_0$, которая положительна, потому что Γ по условию не лежит в сильно устойчивом многообразии.

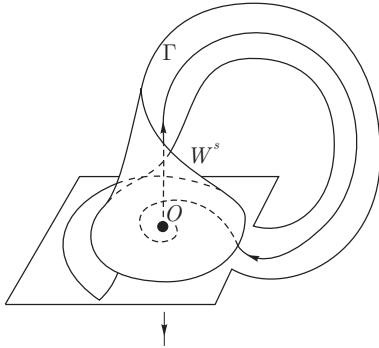


Рис. 13.4.14. Устойчивое многообразие седло-фокуса, продолженное вдоль гомоклинической петли в обратном времени, имеет винтовую форму

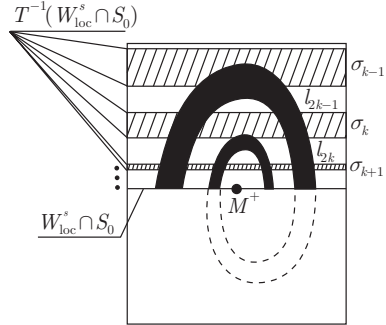


Рис. 13.4.15. Структура отображения Пуанкаре вблизи гомоклинической петли седло-фокуса

где $C = e^{(\theta - \frac{\pi}{2})/\omega}$, а k пробегает все достаточно большие положительные целые значения. При $k \rightarrow +\infty$ эти поверхности накапливаются к $y = 0$. По построению, они являются пересечениями (глобального) устойчивого многообразия O с S_0 . Таким образом, устойчивое многообразие при этом самопредельно (имеет винтовую форму, показанную на рис. 13.4.14).

Пусть σ_k — область в S_0^+ , ограниченная l_{2k-1} и l_{2k} . По построению, образы под действием отображения Пуанкаре T тех точек на S_0^+ , которые не принадлежат объединению полосок σ_k , попадают в $y < 0$. Таким образом, эти орбиты покидают окрестность петли. Поэтому мы ограничим наш анализ отображением на полосках σ_k .

Образ $T\sigma_k$ каждой полоски есть половина одного витка «змеи», ограниченная поверхностью $y = 0$ (см. рис. 13.4.15). Отметим, что он имеет форму подковы. Из (13.4.16) и (13.4.17) следует, что вершина k -й подковы находится в

$$y \sim y_{2k}^\rho \sim e^{-2\pi\rho k/\omega}.$$

Таким образом, когда $\rho > 1$, σ_k и $T\sigma_k$ не пересекаются. И наоборот, когда $\rho < 1$, пересечение $T\sigma_k \cap \sigma_k$ не пустое и состоит из двух связанных компонент (рис. 13.4.16). Геометрически очевидно, что в каждой из компонент имеется неподвижная точка отображения T ¹².

Неподвижные точки отображения Пуанкаре T отвечают периодическим орбитам системы. Таким образом, мы почти доказали следующую теорему.

¹²То, что мы наблюдаем, аналогично известной подкове Смейла.

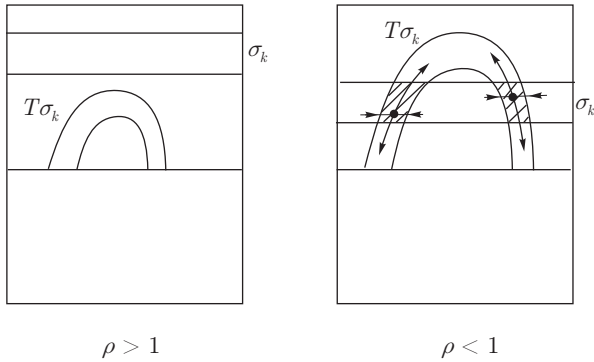


Рис. 13.4.16. Взаимное расположение полосы σ_k и ее образа $T\sigma_k$ под действием отображения Пуанкаре при $\rho > 1$ и $\rho < 1$

Теорема 13.8. *Если $\rho < 1$, то в любой окрестности петли $\bar{\Gamma}$ существует бесконечное множество седловых периодических орбит.*

Эта теорема является частью более общего утверждения [включающего также случай многомерного неустойчивого многообразия, а также седло-фокусов типа (2,1) и (2,2)] о сложной динамике вблизи гомоклинической петли седло-фокуса [136]. Условие $\rho < 1$, также известное как условие Шильникова, здесь важно, потому что структура фазового пространства вблизи гомоклинической петли значительно отличается от случая $\rho > 1$, для которого верна теорема 13.6. Основные бифуркации в пограничном случае $\rho = 1$, когда малое возмущение приводит к гомоклиническому взрыву с переходом от простой динамики ($\rho > 1$) к сложной ($\rho < 1$), впервые рассматривались в [29].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неподвижные точки отображения Пуанкаре T , заданного формулой (13.4.16), находятся из уравнения

$$\begin{aligned}
 y &= Axy^\rho \cos\left(\omega \ln \frac{1}{y} + \theta\right) + o(y^\rho), \\
 x &= x^+ d^{-1} + A_1 xy^\rho \cos\left(\omega \ln \frac{1}{y} + \theta_1\right) + o(y^\rho), \\
 u &= u^+ d^{-1} + A_2 xy^\rho \cos\left(\omega \ln \frac{1}{y} + \theta_2\right) + o(y^\rho).
 \end{aligned} \tag{13.4.18}$$

Значения x и u находятся из второго и третьего уравнения единственным образом:

$$x = x^+ d^{-1} + O(y^\rho), \quad u = u^+ d^{-1} + O(y^\rho). \tag{13.4.19}$$

Подставляя эти выражения в первое уравнение (13.4.18), получаем следующее уравнение для координаты y неподвижной точки:

$$y = A \frac{x^+}{d} y^\rho \cos \left(\omega \ln \frac{1}{y} + \theta \right) + o(y^\rho). \quad (13.4.20)$$

График правой части этого уравнения показан на рис. 13.4.17. Когда $\rho < 1$ [рис. 13.4.17 (b)], уравнение имеет бесконечно много корней, накапливающихся к нулю:

$$y_k^* = C e^{-\pi k / \omega} (1 + o(1)_{k \rightarrow +\infty}), \quad (13.4.21)$$

где $C = e^{(\theta - \frac{\pi}{2})/\omega}$.

Матрица производных отображения T в соответствующей неподвижной точке имеет вид [см. (13.4.16), (13.4.19) и (13.4.21)]

$$\begin{pmatrix} (-1)^{k+1} A \frac{x^+}{d} \omega (y_k^*)^{\rho-1} (1 + o(1)) & O((y_k^*)^\rho) & O((y_k^*)^\rho) \\ O((y_k^*)^{\rho-1}) & O((y_k^*)^\rho) & O((y_k^*)^\rho) \\ O((y_k^*)^{\rho-1}) & O((y_k^*)^\rho) & O((y_k^*)^\rho) \end{pmatrix}. \quad (13.4.22)$$

Так как $y_k^* \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$, то $(y_k^*)^\rho \rightarrow 0$ и $(y_k^*)^{\rho-1} \rightarrow +\infty$ (напомним, что $\rho < 1$). Теперь легко видеть, что матрица (13.4.22) имеет только одно характеристическое число порядка

$$\sim (-1)^{k+1} A \frac{x^+}{d} \omega (y_k^*)^{\rho-1},$$

которое больше 1 по модулю, в то время как остальные характеристические числа стремятся к нулю при $k \rightarrow +\infty$.

Мы доказали существование бесконечного множества седловых неподвижных точек отображения T , которые отвечают седловым периодическим орбитам системы (с двумерными неустойчивыми и m -мерными устойчивыми многообразиями). При *четных* k они имеют отрицательный неустойчивый мультипликатор, и их неустойчивые многообразия неориентируемы. Периодические орбиты, соответствующие *нечетным* k , имеют положительный неустойчивый мультипликатор и, следовательно, ориентируемые неустойчивые многообразия.

Координата y k -й неподвижной точки стремится к нулю при $k \rightarrow +\infty$, откуда следует, что координата x стремится к x^+ , а координата u стремится к u^+ [см. (13.4.19)]. Таким образом, эти периодические орбиты действительно накапливаются к гомоклинической петле Γ . ■

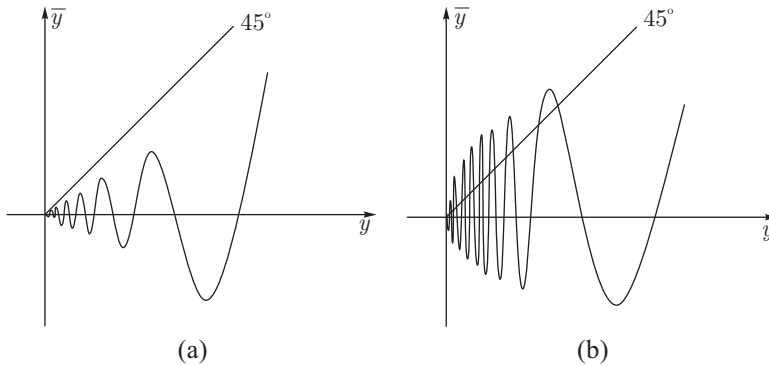


Рис. 13.4.17. Модельное одномерное отображение Пуанкаре при $\rho > 1$ (a) и $\rho < 1$ (b)

ЗАМЕЧАНИЕ. Как мы видим, задача о неподвижных точках отображения Пуанкаре близи гомоклинической петли к седло-фокусу сводится к изучению неподвижных точек модельного одномерного отображения

$$\bar{y} = Ay^p \cos \left(\omega \ln \frac{1}{y} + \theta \right) + o(y^p).$$

Это отображение действительно демонстрирует многие (тем не менее не все) свойства динамики вблизи таких гомоклинических петель.

13.5. Поведение траекторий вблизи гомоклинической петли в случае $\dim W^u > 1$

Рассмотрим далее общий случай, когда размерность неустойчивого многообразия O равна $n \geq 1$. Пусть $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ — характеристические показатели с положительной действительной частью, упорядоченные таким образом, что

$$0 < \operatorname{Re} \gamma_1 \leq \operatorname{Re} \gamma_2 \leq \dots \leq \operatorname{Re} \gamma_n.$$

Допустим, что седловая величина отрицательна:

$$\sigma = \operatorname{Re} \lambda_1 + \operatorname{Re} \gamma_1 < 0, \quad (13.5.1)$$

т. е. *ближайший к мнимой оси характеристический показатель имеет положительную действительную часть.*

Очевидно, что, если $\sigma > 0$, мы всегда можем сделать ее отрицательной при помощи обращения времени.

В общем случае можно предполагать, что если ведущий показатель γ_1 действительный, то

$$\gamma_1 < \operatorname{Re} \gamma_i \quad (i = 2, \dots, n), \quad (13.5.2)$$

и если γ_1 является комплексным, то

$$\operatorname{Re} \gamma_1 = \operatorname{Re} \gamma_2 < \operatorname{Re} \gamma_i \quad (i = 3, \dots, n). \quad (13.5.3)$$

Для того чтобы разграничить два этих случая, мы будем для краткости называть состояние равновесия *седлом* в первом случае и *седло-фокусом* во втором случае. Отметим, что эта терминология отличается от той, которую мы использовали в первой части книги. А именно в этом параграфе мы не принимаем во внимание, действительным или комплексным является ведущий характеристический показатель λ . Таким образом, в этом параграфе мы называем O седлом, если выполнены (13.5.1) и (13.5.2), даже когда λ_1 комплексное.

Введем еще два условия невырожденности. А именно, мы предполагаем, что

(1) *гомоклиническая петля Γ не принадлежит сильно неустойчивому многообразию W^{uu}* . Напомним (параграфы 2.6 и 2.7), что неустойчивое многообразие седла имеет особое подмножество — инвариантное гладкое сильно неустойчивое многообразие W^{uu} . Оно касается в O собственного подпространства матрицы линеаризации, которое соответствует неведущим характеристическим показателям $\gamma_2, \dots, \gamma_n$ в случае седла или $\gamma_3, \dots, \gamma_n$ в случае седло-фокуса. Траектории в W^u , которые не принадлежат W^{uu} , стремятся к O при $t \rightarrow -\infty$ вдоль ведущего направления (собственный вектор, соответствующий ведущему характеристическому показателю γ_1) в случае седла, или они закручиваются по спирали вокруг O вдоль двумерной ведущей плоскости (инвариантная плоскость, соответствующая ведущим характеристическим показателям γ_1 и γ_2) в случае седло-фокуса.

Другими словами, мы полагаем, что гомоклиническая петля ведет себя одним из двух вышеописанных способов, когда она подходит к O при $t \rightarrow -\infty$. В принципе это несильное ограничение, так как оно выделяет открытое и плотное подмножество на бифуркационной поверхности: если для некоторой системы Γ лежит в W^{uu} , то произвольно малым возмущением ее можно столкнуть в $W^u \setminus W^{uu}$;

(2) *расширенное устойчивое многообразие W^{sE} трансверсально неустойчивому многообразию W^u в точках Γ* . Напомним (параграф 2.7), что двумерное локальное инвариантное многообразие W^{sE} касается в O собственного подпространства матрицы линеаризации, соответствующего устойчивым характеристическим показателям $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ и ведущим

неустойчивым показателям γ_1 (в случае седла) или $\gamma_{1,2}$ (в случае седло-фокуса) соответственно. Поскольку оно содержит локальное устойчивое многообразие, оно также содержит гомоклиническую петлю Γ . Продолжение в обратном времени вдоль орбит вблизи Γ задает инвариантное многообразие W^{sE} глобально. Локальные (следовательно, глобальные) расширенные устойчивые многообразия определены не единственным образом, но любые два этих многообразия касаются друг друга в любой точке на устойчивом многообразии. Таким образом, наше условие трансверсальности поставлено корректно.

Отметим, что в случае седла (γ_1 действительно) касательная к неустойчивому многообразию в любой точке, которая не принадлежит сильно неустойчивому многообразию W^{uu} , натянута на вектор фазовой скорости и касательную к слою сильно неустойчивого слоения F^{uu} в данной точке¹³. Поскольку W^{sE} является инвариантным многообразием, оно состоит из целых траекторий. Таким образом, касательная к нему также содержит вектор фазовой скорости. Отсюда в случае седла трансверсальность W^{sE} к W^u эквивалентна трансверсальности W^{sE} к слоению F^{uu} .

Теперь мы видим, что в случае седла наши условия совпадают с условиями теоремы 6.1 параграфа 6.1 части I этой книги. Эта теорема дает нам существование (для самой системы с гомоклинической петлей и для всех близких систем) *отталкивающего гладкого* ($\mathbb{C}^1$) *инвариантного* $(m+1)$ -*мерного многообразия* $\mathcal{M}$, которое содержит все орбиты, остающиеся в малой окрестности U петли Γ для всех положительных значений времени. Следовательно, задача о бифуркациях петли Γ сводится к задаче о бифуркациях на многообразии $\mathcal{M}$.

В малой окрестности седла O это инвариантное многообразие совпадает с некоторым расширенным устойчивым многообразием W_{loc}^{sE} . Таким образом, данное многообразие касается в O собственного подпространства, соответствующего характеристическим показателям γ_1 и $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Отсюда седловое состояние равновесия системы, ограниченной на $\mathcal{M}$, обладает одномерным (отвечающим γ_1) неустойчивым многообразием и m -мерным устойчивым многообразием (отвечающим $\lambda_1, \dots, \lambda_m$). Соответствующая седловая величина отрицательна. Бифуркации гомоклинической петли в этой ситуации описываются теоремой 13.6. Далее, напомним, что $\mathcal{M}$ является *отталкивающим многообразием*, т. е. поток является растягивающим в направлениях, трансверсальных к $\mathcal{M}$. Таким образом, устойчивая периодическая орбита, рождающаяся из петли на $\mathcal{M}$ (в соответствии

¹³Это однозначно определенное инвариантное слоение в W^u , трансверсальное в O ведущему направлению; см. параграф 6.1.

с теоремой 13.6), является для всей системы седловой периодической орбитой с n -мерным неустойчивым многообразием. Таким образом, мы получаем следующий результат.

Теорема 13.9 (Шильников [134]). Пусть седло O с седловой величиной $\sigma < 0$ имеет гомоклиническую петлю, которая удовлетворяет условиям невырожденности (1) и (2). Пусть U — малая окрестность петли Γ . Если гомоклиническая петля расщепляется вовнутрь на инвариантном многообразии $\mathcal{M}$, то возникает единственная периодическая орбита L с n -мерным неустойчивым многообразием. Более того, в U при всех значениях времени остаются только следующие орбиты: седло O , цикл L и единственная гетероклиническая орбита¹⁴, которая является α -предельной к O и ω -предельной к L .

Когда петля расщепляется наружу, в U нет периодических орбит; более того, единственной орбитой, целиком лежащей в U , является седло O . Когда существует петля сепаратрисы Γ , в U не лежит целиком ни одна орбита, кроме Γ и O .

Эта теорема первоначально была доказана без редукции на инвариантное многообразие (несмотря на то что исходная формулировка несколько отличалась от современной, они эквивалентны). Ее доказательство было основано на анализе $(m + n - 1)$ -мерного отображения Пуанкаре вблизи гомоклинической петли. Было доказано, что это отображение является седловым в смысле определения параграфа 3.15 части I, затем использовалась теорема о неподвижной точке, аналогичная теореме 3.28 параграфа 3.15. Чтобы получить подходящие оценки для отображения Пуанкаре, предполагалось, что система является аналитической в [134]. Отметим, что для предложенного здесь доказательства достаточно $\mathcal{C}^1$ -гладкости.

В случае седло-фокуса верен следующий результат.

Теорема 13.10 (Шильников [136]). Пусть седло-фокус O имеет гомоклиническую петлю Γ , которая удовлетворяет условиям невырожденности (1) и (2). Тогда в произвольно малой окрестности Γ существует бесконечное множество седловых периодических орбит.

Мы не приводим доказательство здесь, так как оно выходит за рамки предмета этой книги. Частный случай (теорема 13.8) рассмотрен в предыдущем параграфе. Заметим, что основная теорема в [136] содержит гораздо более подробную информацию о структуре фазового пространства в окрестности гомоклинической петли седло-фокуса; а именно описание гиперболических подмножеств на языке символической динамики.

¹⁴Для системы на $\mathcal{M}$ — это неустойчивая сепаратриса Γ_1 .

В исходном доказательстве предполагалось, что система является аналитической. Впоследствии были предложены другие, упрощенные, доказательства, которые основаны на редукции на нелокальное центральное многообразие вблизи петли сепаратрисы (такое центральное многообразие является в общем случае трехмерным, если устойчивый характеристический показатель λ_1 действителен, и четырехмерным, если $\lambda_1 = \lambda_2^*$ комплексный) и на гладкой линеаризации редуцированной системы вблизи состояния равновесия (см. [120, 147]). Существование гладкого инвариантного многообразия малой размерности важно, потому что оно эффективно снижает размерность задачи¹⁵.

13.6. Бифуркации гомоклинических петель коразмерности два

В этом и следующих параграфах мы рассмотрим некоторые бифуркации коразмерности два гомоклинических петель и гетероклинических циклов, которые возникают в различных моделях.

Рассмотрим $(n + 1)$ -мерную $\mathbb{C}^r$ -гладкую ($r \geq 4$) систему с седловым состоянием равновесия O . Пусть O имеет только один положительный характеристический показатель $\gamma > 0$; а другие характеристические показатели $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ имеют отрицательные действительные части. Более того, нам требуется, чтобы ведущий устойчивый показатель λ_1 был действительным:

$$\lambda_1 > \operatorname{Re} \lambda_j, \quad j = 2, \dots, n.$$

Неустойчивое многообразие W^u точки O одномерно, а устойчивое многообразие W^s является n -мерным. Предположим, что одна из неустойчивых сепаратрис (Γ_1) стремится к O при $t \rightarrow +\infty$, образуя, таким образом, гомоклиническую петлю, как показано на рис. 13.6.1.

Мы проанализируем следующие три случая бифуркаций коразмерности два таких гомоклинических петель.

Случай А.

- (1) $\nu = 1$;
- (2) $\Gamma \not\subset W^{ss}$ и
- (3) $A \neq 0$.

¹⁵Следует, однако, подчеркнуть, что только условия (1) и (2) не достаточны для существования гладкого инвариантного многообразия вблизи петли седло-фокуса (что действительно необходимо для существования такого многообразия — это условие трансверсальности W^{sE} к F^{uu} ; см. [150]). Таким образом, редукция на инвариантное многообразие не дает теорему 13.10 в полном объеме.

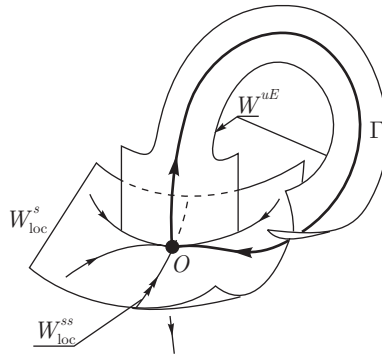


Рис. 13.6.1. Бифуркация $A = 0$ в результате нарушения трансверсальности пересечения W^{uE} и W^s в точках гомоклинической петли Γ

Случай Б.

- (1) $A = 0$, т. е. W^{uE} касательно к W^s в точках Γ (см. рис. 13.6.1);
- (2) $\Gamma \not\subset W^{ss}$, т. е. Γ входит в O при $t \rightarrow +\infty$ вдоль ведущего направления и
- (3) $\frac{1}{2} < \nu < 1$, $\nu_j > 1$ ($j = 2, \dots, n$).

Случай В.

- (1) $\Gamma \subset W^{ss}$, т. е. Γ входит в O при $t \rightarrow +\infty$ вдоль неведущего направления (см. рис. 13.6.2);
- (2) расширенное неустойчивое многообразие W^{uE} трансверсально к устойчивому многообразию W^s в точках Γ и
- (3) $\nu < 1$, $\nu_j > 1$ ($j = 2, \dots, n$). (Здесь $\nu = \left| \frac{\lambda_1}{\gamma} \right|$, $\nu_j = \left| \frac{\text{Re} \lambda_j}{\gamma} \right|$.)

Случай А отвечает границе между положительной и отрицательной седловой величиной. Случаи Б и В отвечают нарушению условий невырожденности (1) или (2) теоремы 13.4.2 (рождение седловой периодической орбиты из гомоклинической петли с положительной седловой величиной). Условие (3) в последних двух случаях необходимо для исключения перехода к сложной динамике в этих бифуркациях (некоторые из случаев со сложной динамикой изучались в [44, 70, 78, 96, 79, 71, 72]).

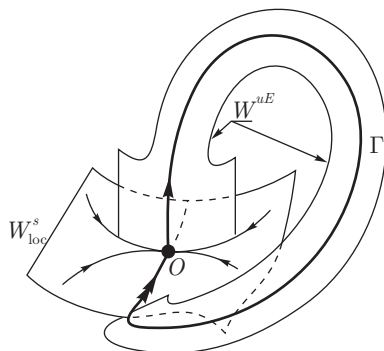


Рис. 13.6.2. Бифуркация в случае В — гомотиническая петля Γ лежит на неведущем подмногообразии в бифуркационный момент

Бифуркации для гомотинических петель коразмерности два важны для изучения уравнения Лоренца

$$\dot{x} = -\sigma(x - y), \quad \dot{y} = rx - y + xz, \quad \dot{z} = -bz + xy.$$

Когда $\sigma = 10$, $b = 8/3$ и $r \approx 13.926$, обе одномерные неустойчивые сепаратрисы Γ_1 и Γ_2 седла $O(0, 0, 0)$ возвращаются к седлу вдоль одного и того же направления (положительной полуоси z). Они образуют геометрическую конфигурацию, которая называется гомотинической бабочкой (рис. 13.6.3). Отметим, что гомотиническая бабочка может появиться только в $\mathbb{R}^n$ с $n \geq 3$.

В общем случае бифуркация гомотинической бабочки имеет коразмерность два. Однако уравнение Лоренца симметрично по отношению к отображению $(x, y, z) \leftrightarrow (-x, -y, z)$. В таких системах существование одной гомотинической петли автоматически влечет существование другой петли, которая является симметричным образом первой. Таким образом, гомотиническая бабочка есть явление коразмерности один для систем с симметрией.

В модели Лоренца седловая величина положительна для значений параметра, отвечающих гомотинической бабочке. Таким образом, при расщеплении двух симметричных гомотинических петель наружу из каждой петли рождается седловая периодическая орбита. При этом устойчивое многообразие каждой из периодических орбит трансверсально пересекает неустойчивое многообразие другой. Наличие такого пересечения является, в свою очередь, причиной существования гиперболического предельного множества, включающего трансверсальные гомотинические орбиты, бесконечное множество периодических орбит и т. д. [1]. В случае гомотини-

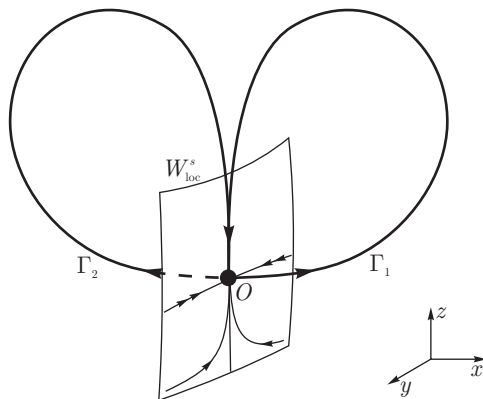


Рис. 13.6.3. Гомоклиническая бабочка. Обе сепаратрисы возвращаются к седлу, касаясь друг друга

ческой бабочки без симметрии в пространстве параметров также имеется область, для которой существует такое грубое предельное множество [1, 141, 149]. Однако, поскольку это предельное множество неустойчиво, его нельзя непосредственно связать со странным аттрактором — математическим образом динамического хаоса в уравнении Лоренца.

Чтобы разрешить эту проблему, в [138] было предложено изучить гомоклинические бабочки в вышеприведенных случаях А, Б и В. А именно было установлено, что бифуркация гомоклинической бабочки приводит к немедленному появлению аттрактора Лоренца, когда

- (а) седловая величина $\sigma = 0$ при дополнительном условии, что $|A| < 2$ на петлях; или когда
- (б) $A = 0$ на петлях, $\sigma > 0$ и удовлетворяется условие 3 случая Б; или когда
- (в) две петли принадлежат неведущему многообразию (а кроме того, $\sigma > 0$ и выполнено условие 3).

Случай (а) соответствует бифуркации коразмерности 3, в то время как случаи (б) и (в) — коразмерности 4. Однако если система имеет некоторую симметрию, тогда все три вышеприведенные бифуркации приобретают коразмерность два. В [126, 127, 129] было установлено, что симметричная гомоклиническая бабочка с $\sigma = 0$ или с $A = 0$ возникает в так называемой расширенной модели Лоренца и в системе Шимицу–Мориока, а также в некоторых случаях локальных бифуркаций коразмерности 3 в системах с определенными дискретными симметриями [129].

Мы не будем рассматривать здесь рождение аттрактора Лоренца (для этого см. [114, 115, 117, 126, 127, 129]), но мы рассмотрим бифуркации коразмерности два одной гомоклинической петли. Бифуркационные диаграммы для случая А такие же, что и, двумерном случае в (см. рис. 13.3.1, когда $0 < A < 1$, и рис. 13.3.3 для $-1 < A < 0$; случай $|A| > 1$ сводится к $|A| < 1$ обращением времени). Эти диаграммы были получены в [38], несмотря на то что доказательств полноты диаграмм (отсутствия других бифуркационных кривых) не было. Здесь мы завершаем анализ этой задачи (подпараграф 13.6.3).

Бифуркационные диаграммы для случаев Б и В идентичны и показаны на рис. 13.6.4. При этом μ — это параметр расщепления гомоклинической петли, а A — сепаратрисная величина. Поскольку в параграфе 13.4 сепаратрисная величина A была определена, только когда петля не принадлежит W^{ss} , мы должны уточнить ее смысл в случае В.

Напомним, что неведущее многообразие W_{loc}^{ss} является $(n-1)$ -мерным. Оно разбивает W_{loc}^s на две компоненты. Если Γ лежит в W^{ss} , то при малом возмущении она может покинуть W_{loc}^{ss} , то есть она будет входить в седло со стороны одной из компонент W_{loc}^s . Мы докажем (подпараграф 13.6.2), что при перемещении петли из одной компоненты в другую происходит смена знака сепаратрисной величины A .

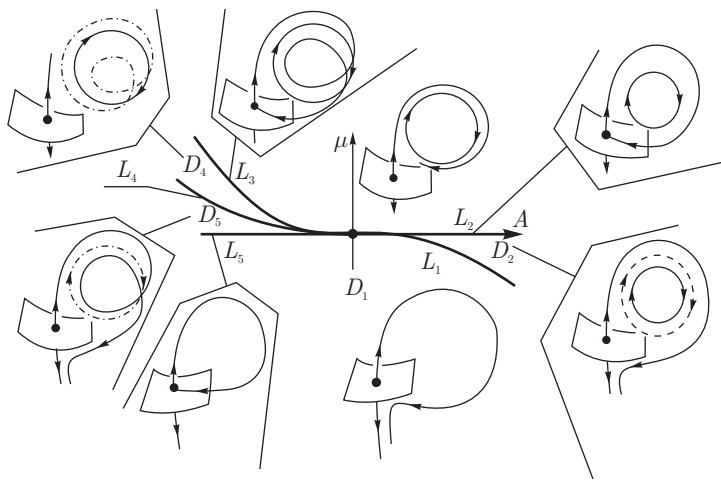


Рис. 13.6.4. Бифуркационная диаграмма для бифуркации смены знака сепаратрисной величины A и для бифуркации вхождения по неведущему многообразию однонакова в простейшем случае

Бифуркационная диаграмма для случая Б была предложена в [126] (см. также [127, 129]) и в [77], для случая В — в [119]. Здесь мы приводим доказательство для того и другого случая, включая доказательство полноты бифуркационной диаграммы.

Введем координаты вблизи седла так, чтобы система локально приняла следующий вид [см. параграф 13.8, формула (13.8.28)]:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\nu x + f_{11}(x, y)x + f_{12}(x, u, y)u, \\ \dot{u} &= Bu + f_{21}(x, y)x + f_{22}(x, u, y)u, \\ \dot{y} &= y,\end{aligned}\tag{13.6.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^1$ и $y \in \mathbb{R}^1$ являются ведущими координатами, $u \in \mathbb{R}^{n-1}$ — вектор устойчивых неведущих координат; $\nu = |\lambda_1/\gamma|$ — седловой индекс, а характеристическими числами матрицы B являются $-\nu_2, \dots, -\nu_n$, где $\nu_j = |\operatorname{Re}\lambda_j/\gamma|$. Напомним, что $1 < \nu_j$, $j = 2, \dots, n$. В случае Б мы имеем $\frac{1}{2} < \nu < 1$ и в случае В имеем $\nu < 1$. В случае А мы имеем $\nu = 1$ в точке бифуркации, так что мы можем допустить, что здесь $\nu = 1 + \varepsilon$, где ε — малый параметр. C^{r-1} -функции f_{ij} удовлетворяют

$$f_{i1}(x, 0) \equiv 0, \quad f_{1j}(0, 0, y) \equiv 0.\tag{13.6.2}$$

В этих координатах устойчивое многообразие локально задано как $y = 0$, локальное неустойчивое многообразие задано как $\{x = 0, u = 0\}$. Уравнением сильно устойчивого многообразия является $\{x = 0, y = 0\}$.

По условию, петля Γ локально совпадает с полуосью y , когда она выходит из O при $t = -\infty$. Поскольку $\Gamma \not\subset W^{ss}$ в случаях А и Б, она входит в O при $t \rightarrow +\infty$ вдоль оси x . В случае В сепаратриса Γ локально расположена в $\{x = 0, y = 0\}$, когда она возвращается к седлу. Мы также полагаем, что петля подходит к O со стороны положительных y при $t \rightarrow -\infty$, и в первых двух случаях — со стороны положительных x при $t \rightarrow +\infty$.

Выберем две секущие S_0 и S_1 , трансверсальные к петле Γ . Пусть S_1 задано как $\{y = d\}$, а S_0 задано как $\{\|u\| = d\}$ в случае В или как $\{x = d\}$ в случаях А и Б, где $d > 0$ мало. Обозначим координаты на S_1 через (x_1, u_1) , а координаты на S_0 — через (y_0, u_0) в случаях А и Б и через (y_0, x_0, u_0) в случае В.

На верхней половине $S_0^+ : \{y_0 \geq 0\}$ секущей S_0 определено локальное отображение $T_0 : S_0^+ \rightarrow S_1$ по траекториям системы. Из последнего уравнения в (13.6.1) следует, что время перехода из S_0^+ в S_1 равно

$$\tau = -\ln \frac{y_0}{d}.\tag{13.6.3}$$

В параграфе 13.8 доказано [см. формулы (13.8.30)–(13.8.36)], что выполнение тождеств (13.6.2) влечет следующие оценки для решения системы, начинающегося в точке (x_0, u_0) при $t = 0$ и оканчивающегося на $\{y = d\}$ при $t = \tau$:

$$\begin{aligned} x(\tau) &= e^{-\nu\tau} x_0 + \xi_1(x_0, u_0, \tau) + \bar{\xi}_1(u_0, \tau), \\ u(\tau) &= \xi_2(x_0, u_0, \tau) + \bar{\xi}_2(u_0, \tau), \end{aligned} \quad (13.6.4)$$

где

$$\begin{aligned} \xi_{1,2}(0, u_0, \tau) &\equiv 0, \\ \|\xi_{1,2}\|_{C^{r-2}} &= o(e^{-\tilde{\nu}\tau}), \quad \|\bar{\xi}_{1,2}\|_{C^{r-2}} = o(e^{-(1+\delta)\tau}), \\ \|\xi_{1,2}\|_{C^{r-1}} + \|\bar{\xi}_{1,2}\|_{C^{r-1}} &= o(e^{-\nu\tau}), \end{aligned} \quad (13.6.5)$$

где $\tilde{\nu}$ можно взять произвольно близким снизу к $\min\{2\nu, 1 + \nu, \nu_2, \dots, \nu_n\}$ (таким образом, $\tilde{\nu} > \nu$, и, кроме того, $\tilde{\nu} > 1$ в случаях А и Б, где мы имеем $2\nu > 1$), и δ таково, что $0 < \delta < \min\{\nu, \nu_2 - 1, \dots, \nu_n - 1\}$.

Подставляя формулу (13.6.3) для времени перехода в (13.6.6) и (13.6.5), получаем следующую оценку для локального отображения $T_0 : S_0^+ \rightarrow S_1$ в случае В (где секущей S_0 служит $\|u_0 = d\|$):

$$x_1 = x_0 y_0^\nu d^{-\nu} + \varphi_1(x_0, y_0, u_0), \quad u_1 = \varphi_2(x_0, y_0, u_0), \quad (13.6.6)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi &= o(|x_0| y_0^{\tilde{\nu}} + y_0^{1+\delta}), \\ \frac{\partial^{p+q}\varphi}{\partial u_0^p \partial y_0^q} &= o(|x_0| y_0^{\tilde{\nu}-q} + y_0^{1+\delta-q}) \quad (p+q \leq r-3), \\ \frac{\partial^{r-2}\varphi}{\partial u_0^p \partial y_0^q} &= o(y_0^{\tilde{\nu}-q}), \quad \frac{\partial^{s+p+q}\varphi}{\partial x_0^s u_0^p \partial y_0^q} = o(y_0^{\tilde{\nu}-q}) \quad (s+p+q \leq r-2), \\ \frac{\partial^{p+q}\varphi}{\partial (x_0, u_0)^p \partial y_0^q} &= o(y_0^{\nu-q}) \quad \text{at } p+q = r-1. \end{aligned} \quad (13.6.7)$$

В случаях А и Б, где $x_0 = d$ на S_0 , мы имеем следующую формулу для T_0 :

$$x_1 = y_0^\nu d^{1-\nu} + \varphi_1(y_0, u_0), \quad u_1 = \varphi_2(y_0, u_0), \quad (13.6.8)$$

где функция $\varphi_{1,2}$ удовлетворяет

$$\begin{aligned} \varphi &= o(y_0^{\tilde{\nu}}), \\ \frac{\partial^{p+q}\varphi}{\partial u_0^p \partial y_0^q} &= o(y_0^{\tilde{\nu}-q}) \quad (p+q \leq r-2), \quad \frac{\partial^{r-1}\varphi}{\partial u_0^p \partial y_0^q} = o(y_0^{\nu-q}). \end{aligned} \quad (13.6.9)$$

Напомним, что здесь $\tilde{\nu} > 1$, в противоположность (13.6.7), где мы имеем только $\tilde{\nu} > \nu$.

13.6.1. Случай $A = 0$

Поток вне малой окрестности O задает глобальное отображение $T_1 : S_1 \rightarrow S_0$ по траекториям, близким к Γ . В случае Б отображение T_1 в малой окрестности точки $M^-(0, 0) = W_{\text{loc}}^u \cap S_1$ можно представить как

$$\begin{aligned}\bar{y}_0 &= \mu + Ax_1 + a_{12}u_1 + \dots, \\ \bar{u}_0 &= u^+ + a_{21}x_1 + a_{22}u_1 + \dots,\end{aligned}\tag{13.6.10}$$

где A — сепаратрисная величина (предполагается, что она обращается в нуль в точке бифуркации). В этой формуле $(\mu, u^+(\mu, A))$ — это координаты точки $M^+ = T_1 M^-$, в которой сепаратриса Γ_1 пересекает S_1 в первый раз. Гомоклиническая петля существует при $\mu = 0$ (поскольку в этом случае $M^+ \in W_{\text{loc}}^s \cap S_0$).

Объединяя формулы (13.6.8) и (13.6.10), получаем следующее представление для отображения Пуанкаре T в случае Б:

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \mu + Ay^\nu + \varphi_1(y, u), \quad y \geq 0, \\ \bar{u} &= u^+ + a_{21}y^\nu + \varphi_2(y, u)\end{aligned}\tag{13.6.11}$$

(в (13.6.8) мы отбрасываем индекс «0», а также нормируем переменные, чтобы получить $d = 1$; модифицированные функции $\varphi_{1,2}$ по-прежнему удовлетворяют оценкам (13.6.7) — отметим, что члены второго порядка в разложении Тейлора для глобального отображения T_1 вносят в новые функции $\varphi_{1,2}$ вклад порядка $O(y^{2\nu})$, но по сравнению с (13.6.7) он пренебрежимо мал, т. к. $\nu > 1/2$).

Пусть α — корень уравнения

$$\left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{A}{\alpha^{1-\nu}}\right)^2 = 1.\tag{13.6.12}$$

Отметим, что однозначно определяемый из (13.6.12) корень α стремится к нулю при $\mu, A \rightarrow 0$. Из (13.6.11) легко видеть, что $\bar{y} < y$ при $y > \alpha/(1 - \nu)$. Таким образом, при итерациях отображения T значение y убывает до величины порядка $O(\alpha)$. Следовательно, разумно относить переменные и параметры:

$$y \mapsto \alpha y, \quad u \mapsto u^+ + \alpha^\nu u, \quad \mu = \alpha \sin \phi, \quad A = \alpha^{1-\nu} \cos \phi,$$

где (α, ϕ) — аналог полярных координат на плоскости (μ, A) . При этом отображение приводится к виду

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \sin \phi + \cos \phi y^\nu + \dots, \\ \bar{u} &= a_{21}y^\nu + \dots,\end{aligned}\tag{13.6.13}$$

где многоточие обозначает члены, которые обращаются в нуль вместе со своими первыми производными по y^ν и u при $\alpha \rightarrow +0$; кроме того, все их производные вплоть до порядка $(r-1)$ равномерно стремятся к нулю на любом промежутке значений y , отделенном от нуля. Из этого, как мы покажем ниже, следует, что отображение (13.6.13) претерпевает те же самые бифуркации, что и предельное отображение

$$\bar{y} = \sin \phi + \cos \phi y^\nu, \quad y \geq 0. \quad (13.6.14)$$

Диаграмма Ламерея для этого отображения показана на рис. 13.6.5. Правая часть отображения либо монотонно возрастает (когда $-\pi/2 < \phi < \pi/2$), либо монотонно убывает (когда $\pi/2 < \phi < 3\pi/2$). Такие отображения могут иметь только неподвижные точки и орбиты периода два соответственно. Кроме того, единственными возможными бифуркациями в таких отображениях являются бифуркации седло-узла и бифуркации удвоения периода неподвижными точками. Кроме того, неподвижная точка или точка периода два может обращаться в нуль, т. е. выходить на границу области определения отображения. Это соответствует бифуркации гомоклинической петли (соответственно простой или двойной) в исходной системе. Бифуркационные значения ϕ находятся из системы

$$\begin{aligned} y &= \sin \phi + y^\nu \cos \phi, \\ \pm 1 &= \nu y^{\nu-1} \cos \phi, \end{aligned} \quad (13.6.15)$$

где «+» соответствует бифуркации седло-узла неподвижной точки, а «-» соответствует удвоению периода неподвижной точки. Эту систему можно записать как

$$\begin{aligned} y &= -\frac{\nu}{1-\nu} \sin \phi, \\ \frac{(1-\nu)^{1-\nu}}{\nu^\nu} &= \frac{\cos \phi}{(-\sin \phi)^{1-\nu}} \end{aligned} \quad (13.6.16)$$

для случая бифуркации седло-узла или как

$$\begin{aligned} y &= \frac{\nu}{1+\nu} \sin \phi, \\ -\frac{(1+\nu)^{1-\nu}}{\nu^\nu} &= \frac{\cos \phi}{(\sin \phi)^{1-\nu}} \end{aligned} \quad (13.6.17)$$

для случая удвоения периода. При этом y является координатой неподвижной точки, претерпевающей бифуркацию. Можно проверить, что эти уравнения дают единственное значение ϕ для каждой бифуркации. Более того, обе бифуркации являются невырожденными: при бифуркации седло-узла ляпуновская величина отлична от нуля, а при бифуркации удвоения периода — отлична от нуля и положительна.

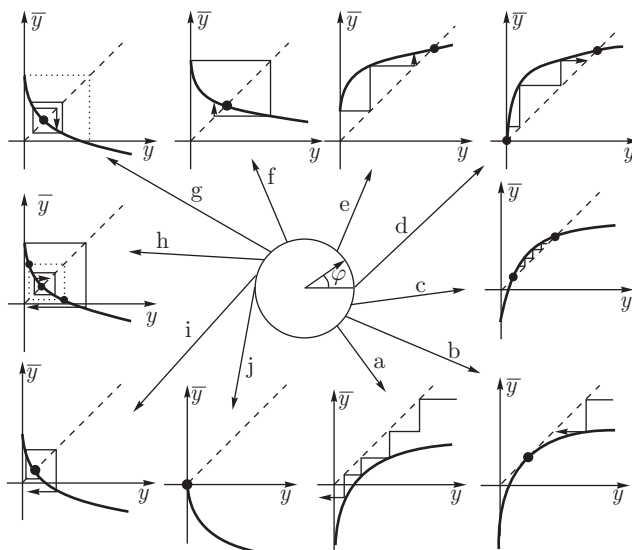


Рис. 13.6.5. Диаграмма Ламерея для отображения (13.6.14)

Таким образом, бифуркация седло-узла приводит к появлению пары неподвижных точек, устойчивой и неустойчивой, в то время как бифуркация удвоения периода приводит к рождению неустойчивой орбиты периода два. Неустойчивая неподвижная точка приходит в $y = 0$ (что соответствует однообходной гомоклинической), когда $\phi = 0$ и $\phi = \pi$. Неустойчивая орбита периода два приближается к $y = 0$ (двойная гомоклиническая петля), когда

$$0 = 1 + \frac{\cos \phi}{(\sin \phi)^{1-\nu}}. \quad (13.6.18)$$

Чтобы проверить, что не существует других бифуркационных значений (которые отвечают седло-узловым орбитам периода два), заметим, что третья производная второй итерации отображения (13.6.14) нигде не обращается в нуль. Это означает, что вторая итерация отображения не может иметь более трех неподвижных точек, считая с кратностями. Следовательно, это гарантирует отсутствие в отображении других орбит периода два.

Мы завершили наш анализ одномерного отображения (13.6.14). Из него также немедленно следуют фазовые портреты для вырожденного многомерного отображения $\bar{T}$

$$\bar{y} = \sin \phi + \cos \phi y^\nu, \quad \bar{u} = a_{21} y^\nu. \quad (13.6.19)$$

Поскольку отображение Пуанкаре T близко к этому отображению [см. (13.6.13)], любая траектория, которая не выходит из области $0 \leq y \leq 2/(1-\nu)$, должна подходить к малой окрестности α - или ω -предельных множеств отображения $\tilde{T}$, заданного формулой (13.6.19). Как показывает вышеприведенный анализ, этими предельными множествами являются неподвижные точки или периодические точки периода два. Когда они не близки к $y = 0$, отображение T близко к $\tilde{T}$ вместе с по крайней мере тремя производными [мы выше предположили, что рассматриваемая система является C^r -гладкой с $r \geq 4$; см. комментарий после формулы (13.6.13)]. Это гарантирует, что два отображения имеют одинаковые фазовые портреты, когда все периодические точки (13.6.19) являются грубыми, и что отображение T претерпевает те же самые бифуркации вблизи значений ϕ , при которых $\tilde{T}$ претерпевает невырожденную бифуркацию седло-узла или удвоения периода. Вблизи значений ϕ , при которых неподвижная точка или орбита периода два отображения $\tilde{T}$ подходит близко к $y = 0$ [эти значения заданы соответственно уравнениями $\sin \phi = 0$ и (13.6.18)]; эта неподвижная точка или орбита периода два всегда имеет седловой тип. Более того, первая или соответственно вторая итерация отображения $\tilde{T}$ является седловым отображением вблизи $y = 0$ в смысле параграфа 3.15. То же верно и для отображения T : поскольку его первая производная по y' равномерно близка к такой же производной от $\tilde{T}$, можно выразить y как функцию от $\bar{y}$ и u и проверить, что для полученного перекрестного отображения удовлетворяются условия (3.15.10) определения 3.7. Так как седловое отображение может иметь только одну седловую неподвижную точку, то отображение T может иметь только одну седловую периодическую орбиту вблизи $y = 0$, и эта периодическая орбита близка к такой же орбите отображения $\tilde{T}$.

Таким образом, отображение T претерпевает (при малых α) те же бифуркации, что и одномерное отображение (13.6.14). Возвращаясь к исходным параметрам (μ, A) , мы получаем следующую асимптотику для бифуркационных кривых (13.6.16)–(13.6.18):

$$\mu \sim -\frac{\nu^{\frac{\nu}{1-\nu}}}{1-\nu} A^{\frac{1}{1-\nu}}, \quad A > 0 \text{ — седло-узел};$$

$$\mu \sim \frac{\nu^{\frac{\nu}{1-\nu}}}{1+\nu} (-A)^{\frac{1}{1-\nu}}, \quad A < 0 \text{ — бифуркация удвоения периода и}$$

$$\mu \sim (-A)^{\frac{1}{1-\nu}}, \quad A < 0 \text{ — двойная петля.}$$

Напомним также, что линия $\mu = 0$ соответствует исходной гомоклинической петле.

Подводя итоги, мы получили следующее описание бифуркаций на плоскости (A, μ) в случае Б (см. рис. 13.6.4): в области D_1 нет орбит (кроме седла), остающихся внутри малой окрестности U гомоклинической петли Γ при всех значениях времени. При пересечении кривой L_1 , отвечающей бифуркации седло-узла, возникают устойчивая и седловая однообходная периодическая орбита. Седловая периодическая орбита влипаёт в гомоклиническую петлю с $A > 0$ на кривой L_2 . После этого в области D_3 существует одна устойчивая периодическая орбита. По пересечении линии L_3 из двойной гомоклинической петли рождается двухобходная седловая периодическая орбита. Эта орбита влипаёт в однообходную периодическую орбиту на линии L_4 , так что последняя теряет устойчивость (обратная бифуркация удвоения периода) и становится седловой. Новая седловая периодическая орбита влипаёт в однообходную неориентируемую ($A < 0$) гомоклиническую петлю на бифуркационной кривой L_5 .

13.6.2. Случай $\Gamma \subset W^s$

Докажем далее, что бифуркации в случае В ($\Gamma \subset W^{ss}$) происходят точно так же. Здесь секущая S_0 задана как $\{|u| = d\}$. Глобальное отображение $T_1 : S_1 \rightarrow S_0$, определенное орбитами, близкими к Γ , теперь имеет вид

$$\begin{aligned}\bar{y}_0 &= \mu + a_{11}x_1 + a_{12}u_1 + \dots, \\ \bar{x}_0 &= \eta + a_{21}x_1 + a_{22}u_1 + \dots, \\ \bar{u}_0 &= u^+ + a_{31}x_1 + a_{32}u_1 + \dots,\end{aligned}\tag{13.6.20}$$

где $(\mu, \eta, u^+(\mu, \eta))$ — координаты точки $M^+ = T_1 M^- = \Gamma_1 \cap S_0$. При $(\mu, \eta) = (0, 0)$ система имеет гомоклиническую петлю, лежащую в W^{ss} (поскольку в этом случае $M^+ \in W_{\text{loc}}^{ss} \cap S_0$). Таким образом, мы должны изучить бифуркации при малых η и μ .

Напомним, что мы предполагаем трансверсальность W^{uE} к W^s , и это эквивалентно условию $a_{11} \neq 0$ (см. параграф 13.4).

Объединяя формулу (13.6.20) с формулой (13.6.6) для локального отображения, мы получаем следующее представление для отображения Пуанкаре T в случае В:

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \mu + a_{11}xy^\nu + \varphi_1(x, y, u), \quad y \geq 0, \\ \bar{x} &= \eta + a_{21}xy^\nu + \varphi_2(x, y, u), \\ \bar{u} &= u^+ + a_{31}xy^\nu + \varphi_3(x, y, u)\end{aligned}\tag{13.6.21}$$

(при этом мы опускаем индекс «0», а также изменяем масштаб переменных, чтобы получить $d = 1$ в (13.6.6); функции $\varphi_{1,2,3}$ удовлетворяют оценкам (13.6.7), т.е. $\varphi_{1,2,3} = o(|x|y^\nu + y^{1+\delta})$).

Определим сепаратрисную величину как

$$A = \eta a_{11}.$$

Отметим, что при $\mu = 0$ и $\eta \neq 0$ сепаратриса Γ_1 образует гомоклиническую петлю, входящую в одну из двух компонент множества $W_{\text{loc}}^s \setminus W_{\text{loc}}^{ss}$, в зависимости от знака η . Поскольку при $\eta \neq 0$ выполнены условия невырожденности из теоремы 13.7, отображение Пуанкаре T имеет гладкую инвариантную кривую, проходящую через точку $M^+(0, \eta, u^+)$, трансверсальную к устойчивому многообразию. В ограничении на эту кривую отображение T принимает вид

$$\bar{y} = a_{11}\eta y^\nu + o(y^\nu),$$

т. е. наше определение сепаратрисной величины A согласуется с определением в параграфе 13.4 для случая невырожденной (коразмерности один) гомоклинической петли. Отметим, что, когда гомоклиническая петля переходит из одной компоненты $W_{\text{loc}}^s \setminus W_{\text{loc}}^{ss}$ в другую, сепаратрисная величина меняет знак, как показано на рис. 13.6.6.

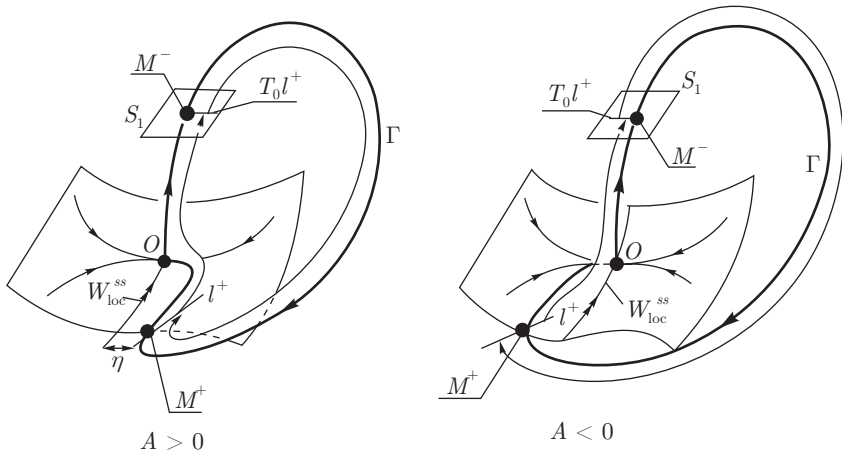


Рис. 13.6.6. Переход через W^{ss} : изменение направления, по которому сепаратриса Γ стремится к седлу, приводит к изменению знака сепаратрисной величины A

Преобразуем переменную x по правилу $x \rightarrow x + \eta$. Тогда отображение T примет вид

$$\bar{y} = \mu + Ay^\nu + a_{11}xy^\nu + \varphi_1(x + \eta, y, u), \quad y \geq 0,$$

$$\bar{x} = a_{21}\eta y^\nu + a_{21}xy^\nu + \varphi_2(x + \eta, y, u),$$

$$\bar{u} = u^+ + a_{31}\eta y^\nu + a_{31}xy^\nu + \varphi_3(x + \eta, y, u).$$

После нормировки $y \mapsto y\alpha$, $x \mapsto \alpha x$, $u \mapsto u^+ + \alpha u$ (где α берется из (13.6.12)) отображение приводится к виду, аналогичному (13.6.13). После этого все рассуждения проводятся таким же образом, как и в случае Б, с тем же самым результатом.

13.6.3. Случай $\sigma = 0$

Теперь исследуем случай А — бифуркации гомоклинической петли с $\sigma = 0$. Здесь локальное отображение из S_0 в S_1 задано формулой (13.6.8), где $\nu = 1 + \varepsilon$. Глобальное отображение из S_1 в S_0 задано формулой (13.6.10) (где более не предполагается, что A мала; кроме того, она теперь зависит от малых параметров (μ, ε)). Мы также полагаем, что $|A| < 1$ (случай $|A| > 1$ получается обращением времени). Объединяя формулы (13.6.8) и (13.6.10), мы можем записать отображение Пуанкаре T в виде

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \mu + A(\mu, \varepsilon)y^{1+\varepsilon} + \varphi_1(y, u), \quad y \geq 0, \\ \bar{u} &= u^+ + a_{21}y^{1+\varepsilon} + \varphi_2(y, u),\end{aligned}\tag{13.6.22}$$

где $\varphi_{1,2}$ удовлетворяют оценкам (13.6.7) (в которых нужно опустить зависимость от x).

Отметим, что условия 2 и 3 в случае А совпадают с условиями теоремы 6.2 (см. детальные объяснения в параграфе 3.14), что гарантирует существование гладкого притягивающего двумерного инвариантного многообразия M для всех малых μ . Это многообразие в общем случае является только $\mathbb{C}^1$ -гладким. Таким образом, мы не можем непосредственно применить двумерные результаты из параграфа 13.3, потому что последние требуют более высокой гладкости. Тем не менее пересечение инвариантного многообразия M с S_0 является гладкой притягивающей инвариантной относительно отображения Пуанкаре T кривой l_0 (трансверсальной к $y = 0$). Отображение Пуанкаре, ограниченное на эту кривую, является одномерным отображением либо монотонно возрастающим (когда $A > 0$), либо монотонно убывающим (когда $A < 0$). Это дает нам важную качественную информацию об ожидаемых бифуркациях исходного отображения T : когда $A > 0$, это могут быть только бифуркации седло-узла, а когда $A < 0$ — бифуркации удвоения периода неподвижной точки и, возможно, бифуркации седло-узла орбиты периода два. Кроме того, неподвижная точка или орбита периода два (при $A < 0$) может выйти на границу $\{y = 0\}$ области определения отображения (это соответствует гомоклинической петле, соответственно простой или двухобходной).

Простая гомоклиническая петля отвечает $\mu = 0$. Двойная гомоклиническая петля существует при $A < 0$, если $TM^+ \in W_{\text{loc}}^s$, т. е.

$$0 = \mu + A(\mu, \varepsilon)\mu^{1+\varepsilon} + \varphi_1(\mu, u^+)$$

(см. (13.6.22)). Это дает следующую асимптотику для соответствующей бифуркационной кривой:

$$\mu = |A(0, \varepsilon)|^{1/|\varepsilon|} [1 + o(1)], \quad \varepsilon < 0.$$

Бифуркации неподвижных точек находятся из системы (сравните с (13.6.22)):

$$\begin{aligned} y &= \mu + Ay^{1+\varepsilon} + \varphi_1(y, u), \quad y \geq 0, \\ u &= u^+ + a_{21}y^{1+\varepsilon} + \varphi_2(y, u), \\ \pm \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A(1 + \varepsilon)y^\varepsilon + \varphi'_{1y} & \varphi'_{1u} \\ a_{21}(1 + \varepsilon)y^\varepsilon + \varphi'_{2y} & \varphi'_{2u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (13.6.23)$$

При этом «+» отвечает бифуркации седло-узла, а «-» отвечает бифуркации удвоения периода; (y, u) — это координаты неподвижной точки, претерпевающей бифуркацию, а $(1, z)$ — это собственный вектор, отвечающий мультипликатору ± 1 .

Поскольку $\varphi'_{(1,2)y} = o(y^\delta)$ и $\varphi'_{(1,2)u} = o(y^{1+\delta})$, можно легко выразить z и u через y :

$$z \sim \pm a_{21}(1 + \varepsilon)y^\varepsilon, \quad u \sim u^+.$$

Таким образом, система принимает вид

$$\begin{aligned} y &= \mu + Ay^{1+\varepsilon} + o(y^{1+\delta}), \quad y \geq 0, \\ \pm 1 &= A(1 + \varepsilon)y^\varepsilon + o(y^\delta), \end{aligned} \quad (13.6.24)$$

который аналогичен системам (13.3.9) и (13.3.13), определяющим бифуркационные кривые неподвижных точек отображения T в двумерном случае (параграф 13.3). Это дает следующую асимптотику для бифуркационных кривых ($\varepsilon < 0$):

$$\mu = \frac{1}{e} A(0, \varepsilon)^{1/\varepsilon} (1 + o(1)) - \text{седло-узловая неподвижная точка } (A > 0);$$

$$\mu = \frac{2}{e} |A(0, \varepsilon)|^{1/\varepsilon} (1 + o(1)) - \text{удвоения периода } (A < 0).$$

Можно также проверить, что эти бифуркации невырожденные, т.е. первая ляпуновская величина в обоих случаях не равна нулю. Кроме того, при бифуркации удвоения периода ляпуновская величина положительна. Таким образом, при этой бифуркации рождается седловая орбита периода два.

Все эти результаты совпадают с полученными для двумерного случая. Таким образом, бифуркационные диаграммы одинаковы. На оставшемся последнем этапе надо проверить, что бифуркации седло-узловых орбит периода два невозможны (при $A < 0$). Орбиты периода два $\{(y_1, u_1), (y_2, u_2)\}$ должны удовлетворять уравнению

$$\begin{aligned} y_2 &= \mu + A(\mu, \varepsilon)y_1^{1+\varepsilon} + \varphi_1(y_1, u_1), \\ y_1 &= \mu + A(\mu, \varepsilon)y_2^{1+\varepsilon} + \varphi_1(y_2, u_2), \\ u_2 &= u^+ + a_{21}y_1^{1+\varepsilon} + \varphi_2(y_1, u_1), \\ u_1 &= u^+ + a_{21}y_2^{1+\varepsilon} + \varphi_2(y_2, u_2), \end{aligned} \quad (13.6.25)$$

где $y_1 \geq 0$ и $y_2 \geq 0$.

Поскольку φ'_{2u} мала при малых y , можно выразить (u_1, u_2) как функции от (y_1, y_2) из последних двух уравнений в (13.6.25). Уравнения для $y_{1,2}$ записываются как

$$\begin{aligned} y_2 &= \mu + A(\mu, \varepsilon)y_1^{1+\varepsilon} + \varphi(y_1, y_2), \\ y_1 &= \mu + A(\mu, \varepsilon)y_2^{1+\varepsilon} + \varphi(y_2, y_1), \quad y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (13.6.26)$$

При этом функция φ оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi(y_1, y_2) &= o(y_1^{1+\delta}), \\ \frac{\partial^q \varphi}{\partial y_1^q} &= o(y_1^{1-q+\delta}) \quad (q = 1, \dots, r-2), \\ \frac{\partial^{r-1} \varphi}{\partial y_1^{r-1}} &= o(y_1^{2-r+\varepsilon}), \\ \frac{\partial^{q+p} \varphi}{\partial y_1^q \partial y_2^p} &= o(y_1^{1-q+\delta} y_2^{1-p+\varepsilon}) \quad (1 \leq p \leq r-2-q), \\ \frac{\partial^{p+q} \varphi}{\partial y_1^q \partial y_2^p} &= o(y_1^{1-q+\varepsilon} y_2^{1-p+\varepsilon}) \quad \text{at } p+q = r-1, p \geq 1. \end{aligned} \quad (13.6.27)$$

Напомним, что мы предполагаем $-1 < A < 0$. Таким образом, при $\varepsilon \geq 0$ правая часть (13.6.26) является сжатием. Отсюда система может иметь только одно решение при $\varepsilon \geq 0$. По симметрии, мы имеем $y_1 = y_2$ для этого решения; т. е. оно отвечает неподвижной точке отображения T . Таким образом, отображение T не имеет орбит периода два при $\varepsilon \geq 0$, и мы ограничим наше исследование только отрицательными ε .

Поскольку $A < 0$, правая часть первого уравнения (13.6.26) убывает, когда y_1 возрастает. Следовательно, $y_2 \leq \mu$. Аналогично $y_1 \leq \mu$ также. Таким образом, мы можем изменить масштаб переменных: $y_1 \rightarrow y_1\mu$, $y_2 \rightarrow y_2\mu$. Система принимает вид

$$\begin{aligned} y_2 &= 1 - Cy_1^{1+\varepsilon} + \frac{1}{\mu}\varphi(\mu y_1, \mu y_2), \\ y_1 &= 1 - Cy_2^{1+\varepsilon} + \frac{1}{\mu}\varphi(\mu y_2, \mu y_1), \end{aligned} \quad (13.6.28)$$

где

$$C = \frac{|A|}{\mu^{|\varepsilon|}}, \quad (13.6.29)$$

и обе перенормированные переменные $y_{1,2}$ принадлежат промежутку $[0, 1]$. Не теряя общности, мы можем считать, что $y_1 \geq y_2$ и y_1 отделена от нуля при ограниченных C .

Легко видеть, что если C остается отделена от $C = 1$, то система (13.6.28) имеет единственное решение при малых μ и ε . Отметим, что из симметрии системы следует, что в этом случае $y_1 = y_2$, а это означает, что отображение T не может иметь орбит периода два, если C не близко к 1.

Таким образом, единственная область, которую надо рассмотреть в пространстве параметров, соответствует $\mu^{|\varepsilon|} \sim |A|$. Так как $|A| < 1$ по условию, то μ экспоненциально мало по отношению к ε ; а именно:

$$\mu < e^{-K/|\varepsilon|}$$

для некоторого положительного K . Следовательно, φ -члены в (13.6.28) пренебрежимо малы, и можно легко проверить, что если выразить y_1 через y_2 из второго уравнения (13.6.28) и подставить получившееся выражение в первое уравнение, то третья производная правой части получающегося уравнения нигде не обращается в нуль при малых $\varepsilon < 0$.

Это означает, что система не может иметь более трех решений. Каждая орбита периода два дает два решения $[(y_1, y_2) \text{ и } (y_2, y_1)]$. Таким образом, отображение T не может иметь более одной периодической орбиты, с учетом кратности, т. е. не может быть седло-узловых орбит периода два.

13.7. Бифуркации гомоклинических восьмерок и гетероклинических циклов

В этом параграфе мы приведем обзор таких бифуркаций гомоклинических восьмерок, а также гетероклинических циклов с двумя седлами, которые не ведут к сложной динамике. При этом мы опускаем доказательства,

так как нашей целью является только ознакомление читателей с результатами, полученными в [148, 149, 151] и [50] для гомоклинических восьмерок, и в [121–125] и в [34–35] для гетероклинических циклов различных типов.

Гомоклиническая восьмерка состоит из двух гомоклинических петель к седлу таких, что неустойчивые сепаратрисы Γ_1 и Γ_2 выходят из седла в противоположных направлениях при $t = -\infty$ (рис. 13.7.1). Мы будем рассматривать случай, когда неустойчивое многообразие седла O одномерно, т. е. седло имеет только один положительный характеристический показатель $\gamma > 0$; предполагается, что все другие показатели имеют отрицательные действительные части: $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$, $j = 1, \dots, n$. Кроме того, мы полагаем, что *седловая величина σ отрицательна*:

$$\sigma = \gamma + \max \operatorname{Re} \lambda_j < 0.$$

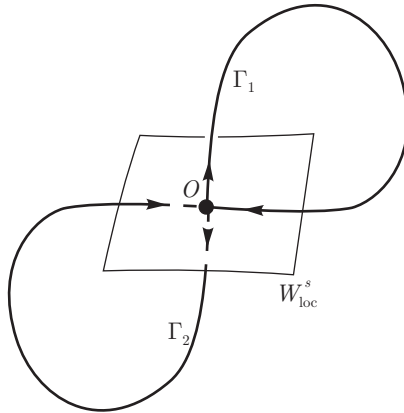


Рис. 13.7.1. Гомоклиническая восьмерка: сепаратрисы покидают седло в противоположных направлениях

Мы предполагаем также, что система является $\mathbb{C}^r$ -гладкой с $r \geq 1$, и будем изучать ее бифуркации при $\mathbb{C}^r$ -гладких возмущениях. Рассмотрим достаточно малую окрестность U гомоклинической восьмерки $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup O$. Обозначим через N множество всех орбит, целиком лежащих в U . Следующая теорема показывает, что в момент бифуркации множество N состоит только из двух гомоклинических петель и O . Она также описывает структуру этого множества у всех близких систем.

Теорема 13.11. *Для любой системы, достаточно близкой к системе с гомоклинической восьмеркой с $\sigma < 0$, множество N является замыка-*

нием объединения сепаратрис $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ и может быть следующих шести возможных типов:

- (1) $N \setminus O$ содержит две устойчивые периодические орбиты, одна из которых является ω -предельным множеством Γ_1 , а другая является ω -предельным множеством Γ_2 ;
- (2) $N \setminus O$ содержит одну устойчивую периодическую орбиту, которая является ω -предельным множеством сепаратрис Γ_1 и Γ_2 ;
- (3) $N \setminus O$ содержит устойчивую периодическую орбиту, которая является ω -предельным множеством одной из сепаратрис, а вторая сепаратриса образует гомоклиническую петлю;
- (4) $N = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup O$, где одна из сепаратрис образует гомоклиническую петлю, а вторая сепаратриса является ω -предельной к этой петле;
- (5) $N = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup O$, где обе сепаратрисы образуют гомоклинические петли (составляя при этом гомоклиническую восьмерку); и
- (6) N является притягивающим квазиминимальным множеством, которое содержит две P^+ -устойчивые сепаратрисы Γ_1 и Γ_2 , одну P^- -орбиту в $W^s(O)$ и континуум незамкнутых устойчивых по Пуассону траекторий.

Отметим, что только случаи (1) и (2) отвечают структурно устойчивым системам; другие случаи негрубые. По существу, бифуркация гомоклинической восьмерки с отрицательной седловой величиной является внутренней бифуркацией в классе систем Морса–Смейла.

В случае систем с симметрией ситуация довольно тривиальна, а именно: когда петли расщепляются внутрь, каждая порождает один устойчивый предельный цикл, согласно теореме 13.4.1. Когда петли расщепляются наружу, устойчивость наследуется симметричной устойчивой периодической орбитой, которая рождается из восьмерки, как показано на рис. 13.7.2. Других бифуркаций в симметричном случае нет. Поэтому дальнейшая теория в основном концентрируется на несимметричных системах.

В качестве окрестности U гомоклинической восьмерки возьмем малый шар U_0 , содержащий седло O с двумя ручками U_1 и U_2 , содержащими сепаратрисы. Таким образом, для любой орбиты, целиком лежащей в U , существует естественная кодировка — последовательность символов 1 и 2, которая описывает маршрут, в соответствии с которым орбита проходит по ручкам U_1 и U_2 . Кодировки гомоклинических петель конечны; кроме того, предельным циклам мы будем приписывать кодировки конечной длины, определенные по модулю циклических перестановок символов.

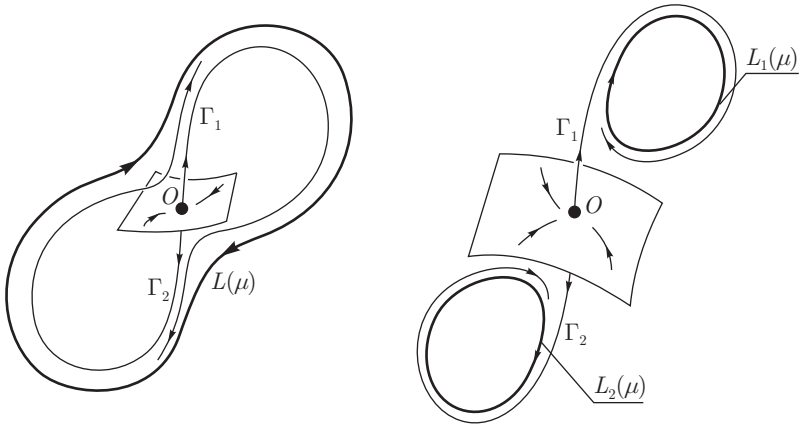


Рис. 13.7.2. Бифуркация гомоклинической восьмерки в симметричном случае. Расщепление гомоклинических петель наружу приводит к появлению большой симметричной периодической орбиты. Когда петли расщепляются внутрь, из каждой петли рождается периодическая орбита

Чтобы описать возможные кодировки периодических орбит и гомоклинических петель, которые могут возникнуть из гомоклинической восьмерки, построим двоичное дерево, аналогичное дереву Фэри из теории чисел. Мы обозначим парой символов $(1, 2)$ первую вершину, из которой идут стрелки к вершинам $(1, 21)$ и $(12, 1)$ и т.д. по правилу, что из вершины (p, s) стрелки идут к вершинам (p, sp) и (ps, s) (как изображено на рис. 13.7.3), где p и s обозначают конечные слова алфавита $\{1, 2\}$. Мы называем пару (p, s) *допустимой*, если она находится в одной из вершин построенного таким образом дерева. Пара бесконечных последовательностей (p, s) символов 1 и 2 является допустимой, если существует бесконечный путь по ребрам дерева, который проходит через такие вершины (p_i, s_i) , что $p_i \rightarrow p$ и $s_i \rightarrow s$ при $i \rightarrow +\infty$. Слово называется *допустимым*, если оно является элементом допустимой пары.

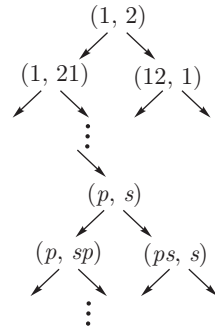


Рис. 13.7.3. Двоичное дерево, описывающее возможные типы периодических орбит и гомоклинических петель, которые могут рождаться из гомоклинической восьмерки в асимметричном случае

Теорема 13.12. *Для любой системы, достаточно близкой к системе с гомоклинической восьмеркой с отрицательной седловой величиной, периодические орбиты или гомоклинические петли в U должны иметь допустимые кодировки. Если существует пара периодических орбит, или пара гомоклинических петель, или предельный цикл и гомоклиническая петля, их кодировки должны образовывать допустимую пару. Если сепаратрисы Γ_1 и Γ_2 являются P^+ -устойчивыми (т. е. N — квазимиимальное множество), тогда кодировки сепаратрис образуют допустимую пару бесконечных последовательностей.*

Структура квазимиимальных множеств здесь полностью определена кодировками сепаратрис. Введем число вращения $\beta(s)$ для бесконечной последовательности $s = \{s_i\}_{i=0}^{+\infty}$ символов 1 и 2 по формуле:

$$\beta(s) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \{\text{количество единиц в последовательности } \{s_i\}_{i=0}^n\}, \quad (13.7.1)$$

если этот предел существует. Легко доказать, что если пара бесконечных последовательностей (p, s) допустима, то числа вращения $\beta(p)$ и $\beta(s)$ действительно существуют; кроме того, они равны друг другу:

$$\beta(p) = \beta(s),$$

и иррациональны. Для любого иррационального числа β из интервала $[0, 1]$ существует единственная допустимая пара бесконечных последовательностей с числом вращения β .

Таким образом, можно приписать число вращения β каждому квазимиимальному множеству, рождающемуся при бифуркациях гомоклинической восьмеркой.

Теорема 13.13. *Если множество N теоремы 13.11 является квазимиимальным с числом вращения β , то поток на N топологически сопряжен со специальным потоком Черри (ограниченным на его квазимиимальное множество) с числом вращения β .*

Поток Черри — это поток на двумерном торе с двумя состояниями равновесия: седлом и неустойчивым узлом; обе неустойчивые сепаратрисы положительно устойчивы по Пуассону; одна устойчивая сепаратриса стремится к узлу, а другая лежит в замыкании неустойчивых сепаратрис и отрицательно устойчива по Пуассону [см. рис. 13.7.4 (а)]. Замыканием неустойчивых сепаратрис является квазимиимальное множество, которое содержит седло O и континуум незамкнутых устойчивых по Пуассону траекторий. Число вращения для таких потоков определяется таким же обра-

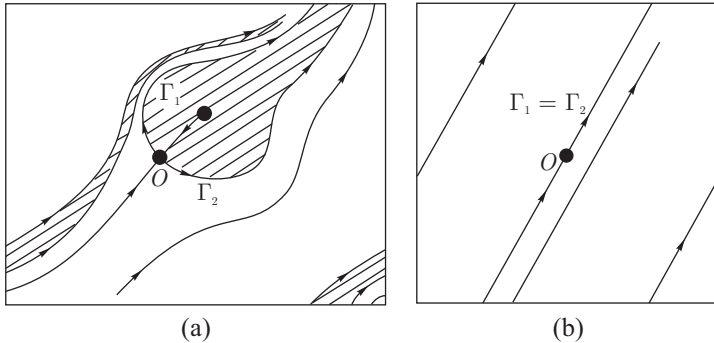


Рис. 13.7.4. (а) Поток Черри на торе. (б) Поток, полученный из потока Черри при отождествлении сепаратрис седла

зом, как и для потоков на торе без состояний равновесия. Поскольку в потоке Черри нет периодических орбит, его число вращения является иррациональным. Поток Черри называется *специальным*, если он сжимает площади всюду, кроме малой окрестности неустойчивого узла. Два специальных потока Черри топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их числа вращения совпадают (более подробно см. в [104, 16]). Мы видим, что теорема 13.13 дает полную характеристику квазимиимальных аттракторов, которые могут возникнуть из гомоклинических восьмерок с отрицательной седловой величиной. Отметим, что можно склеить неустойчивые сепаратрисы Γ_1 и Γ_2 вместе так, чтобы поток на квазимиимальном множестве после склейки стал бы топологически эквивалентен потоку

$$\dot{x} = x^2 + y^2, \quad \dot{y} = (x^2 + y^2)\beta$$

на торе $\{|x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ [см. рис. 13.7.4 (b)].

Далее мы различаем следующие два случая:

Случай 1. *Седло-фокус*: $\lambda_{1,2}$ комплексные, и

$$0 > \operatorname{Re} \lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda_2 > \operatorname{Re} \lambda_j \quad (j = 3, \dots, n).$$

Случай 2. *Седло*: λ_1 действительный, и

$$0 > \lambda_1 > \operatorname{Re} \lambda_j \quad (j = 2, \dots, n).$$

В том и другом случае предположим, что в момент бифуркации

- гомоклинические петли $\Gamma_{1,2}$ не лежат в сильно устойчивом многообразии W^{ss} , и
- сепаратрисные величины $A_{1,2}$ не обращаются в нуль на обеих петлях.

Последнее условие можно интерпретировать как трансверсальность двумерного расширенного неустойчивого многообразия W^{uE} к устойчивому многообразию вдоль обеих петель. Сепаратрисные величины заданы формулой (13.4.8) в случае седла и формулой (13.4.15) в случае седло-фокуса.

Рассмотрим гладкое двухпараметрическое семейство $X_{\mu_1\mu_2}$, трансверсальное бифуркационному множеству коразмерности два систем с гомоклинической восьмеркой с отрицательной седловой величиной и удовлетворяющее вышеприведенным условиям невырожденности. Управляющими параметрами $\mu_{1,2}$ служат параметры расщепления для гомоклинических петель: предполагается, что, когда $\mu_i > 0$, петля Γ_i расщепляется внутрь.

Пусть C_s обозначает бифуркационное множество на плоскости (μ_1, μ_2) , которое отвечает существованию гомоклинической петли с кодировкой s . По определению, $\{\mu_1 = 0\}$ — это кривая C_1 , а $\{\mu_2 = 0\}$ — кривая C_2 . Можно показать, что для других кодировок C_s является либо кривой, заданной уравнением $\mu_1 = h_s(\mu_2)$ (если последним символом в слове $\{s\}$ является 1) или $\mu_2 = h_s(\mu_1)$ (если последним символом $\{s\}$ является 2), где h_s — гладкая функция, определенная при $\mu < 0$, первые производные которой стремятся к нулю при $\mu \rightarrow -0$ (равномерно по всем возможным кодировкам $\{s\}$), либо это бесконечное множество открытых дуг (интервалов) такой кривой.

В случае седло-фокуса все возможности, разрешенные теоремами 13.11 и 13.12, встречаются в любом трансверсальном семействе $X_{\mu_1\mu_2}$. Бифуркационная диаграмма для этого случая показана на рис. 13.7.5. Отметим, что бифуркационные кривые, которые отвечают гомоклиническим петлям с кодировками, оканчивающимися на «1», близки к отрицательной полуоси μ_2 и, таким образом, они все лежат в секторе $|\mu_1| < |\mu_2|$. Кривые, которые соответствуют гомоклиническим петлям с кодировками, оканчивающимися на «2», лежат в секторе $|\mu_2| < |\mu_1|$. Поскольку при этом картины в том и другом секторе симметричны друг другу, достаточно описать только конфигурацию бифуркационных кривых, отвечающих гомоклиническим петлям с кодировками, оканчивающимися на «1».

Итак, $\mu_1 = 0$ — это кривая C_1 ; кривая C_{21} также выходит из точки $(0, 0)$ в направлении отрицательных значений μ_2 ; кривые C_{21} и C_1 пересекаются в бесконечном множестве точек. Далее продолжим по индукции по правилу: пусть (p, s) — допустимая пара слов, оканчивающихся на «1»; тогда C_p и C_s пересекаются в бесконечном множестве точек, и если P и Q — такие соседние точки пересечения C_p и C_s , что $h_p > h_s$ на промежутке между P и Q , то P и Q дополнительно соединены дугами C_{ps} и C_{sp} , которые пересекают C_s и соответственно C_p бесконечное множество раз, и т. д.

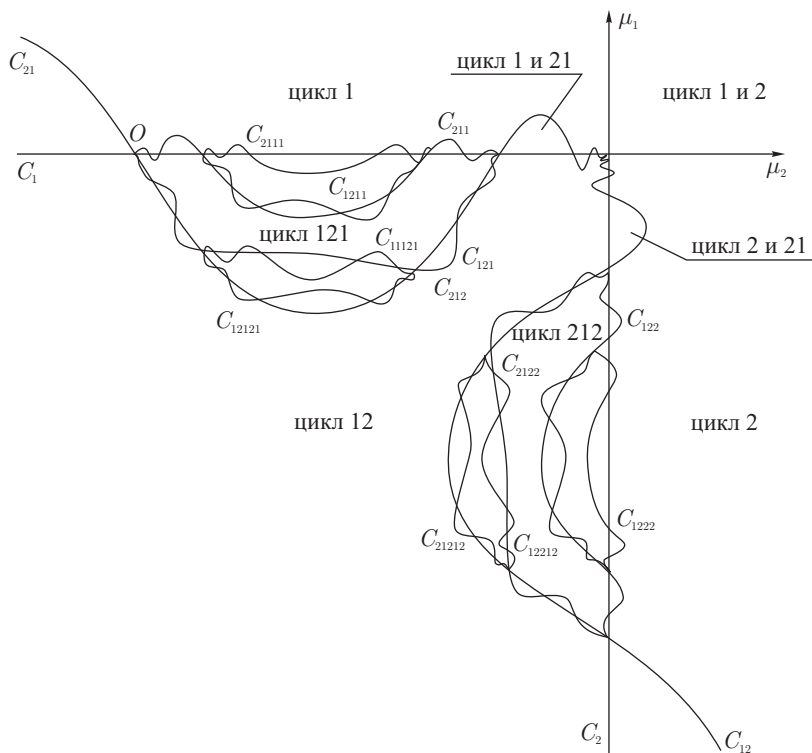


Рис. 13.7.5. Бифуркационная диаграмма для гомоклинической восьмерки седло-фокуса с отрицательной седловой величиной

В области, ограниченной этими дугами C_{ps} и C_{sp} , существует устойчивый предельный цикл с кодом $\{ps\}$. Напротив, если $h_p < h_s$ на промежутке между P и Q , то при этих значениях μ_2 не может быть гомоклинических петель с кодами, составленными из слов p и s . Более того, если $h_p < h_s$, то всюду в области, ограниченной сегментами кривых C_p и C_s между P и Q , существуют два устойчивых предельных цикла с кодами $\{p\}$ и $\{s\}$.

Квазимиимальные аттракторы соответствуют предельным точкам объединения кривых C_s .

В случае седла (ведущий характеристический показатель действительный) бифуркационная диаграмма зависит от знаков сепаратрисных величин A_1 и A_2 , а также от того, каким образом гомоклинические петли Γ_1

и Γ_2 входят в седло при $t = +\infty$. Сначала рассмотрим случай, когда Γ_1 и Γ_2 входят в седло, касаясь друг друга, т. е. бифуркации устойчивой гомоклинической бабочки.

При этом, если $A_1 > 0$ и $A_2 > 0$ (см. рис. 13.7.6), область $(\mu_1 > 0, \mu_2 > 0)$ отвечает существованию пары циклов с кодировками $\{1\}$ и $\{2\}$, а область $\mu_1 > 0, \mu_2 < 0$ отвечает существованию единственного цикла с кодировкой $\{1\}$. Область $(\mu_1 < 0, \mu_2 > 0)$ отвечает существованию единственного цикла с кодировкой $\{2\}$. В области $(\mu_1 < 0, \mu_2 < 0)$ бифуркационное множество является канторовым пучком кривых, выходящих из начала координат, и составленным из счетного числа кривых, отвечающих гомоклиническим петлям, и континуумом кривых, отвечающих квазимиинимальным множествам. Эта область имеет следующую структуру: для любой допустимой пары конечных слов (p, s) существуют кривые C_p и C_s ; в области, ограниченной C_p и C_s , кривые C_{ps} и C_{sp} расположены таким образом, что C_{sp} лежит между C_p и C_{ps} . Область, ограниченная кривыми C_{ps} и C_{sp} , отвечает существованию одного устойчивого предельного цикла с кодировкой $\{ps\}$. На каждой кривой C_s одна из неустойчивых сепаратрис образует гомоклиническую петлю с кодом s , в то время как вторая сепаратриса стремится к этой гомоклинической петле (т. е. она принадлежит устойчивому многообразию гомоклинической петли; см. конец параграфа 13.4).

Для каждой допустимой пары (p, s) бесконечных последовательностей существует кривая $C(p, s)$, отвечающая существованию квазимиинимального аттрактора с числом вращения $\beta(p) = \beta(s)$. Кривая $C(p, s)$ находится как

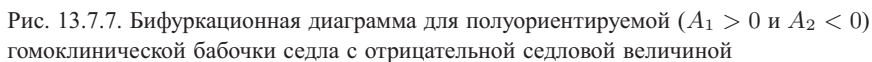
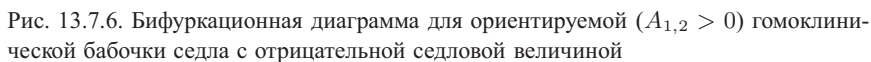
$$\lim C_{s_i} = \lim C_{p_i},$$

где (p_i, s_i) — последовательность допустимых пар конечных слов, аппроксимирующих (p, s) .

В остальных других случаях квазимиинимальные аттракторы не возникают. В случае $A_1 > 0$ и $A_2 < 0$ (см. рис. 13.7.7) существуют циклы только с кодировками $\{1\}$, $\{2\}$ и $\{21^k\}$, $k = 1, 2, \dots$ (здесь $\{1^k\}$ обозначает слово, состоящее из k единиц). Плоскость параметров разделена на счетное число областей кривыми $C_1, C_2, C_{12}, C_{21^k}$ и C_{121^k} ($k = 1, 2, \dots$). Отметим, что эти кривые накапливаются к отрицательной полуоси μ_2 , где сепаратриса Γ_1 образует простую гомоклиническую петлю, а сепаратриса Γ_2 стремится к ней при $t \rightarrow +\infty$.

В случае $A_1 < 0$ и $A_2 < 0$ (см. диаграмму, показанную на рис. 13.7.8) существуют циклы только с кодировками $\{1\}$, $\{2\}$ и $\{12\}$; плоскость параметров разделена на 6 областей.

Бифуркационная диаграмма для случая, когда Γ_1 и Γ_2 входят в седло с разных сторон, показана на рис. 13.7.9–13.7.11. В этом случае не может



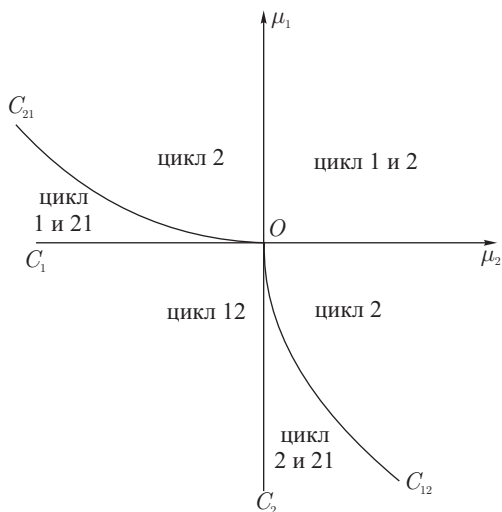


Рис. 13.7.8. Бифуркационная диаграмма для неориентируемой ($A_{1,2} < 0$) гомоклинической бабочки седла с отрицательной седловой величиной

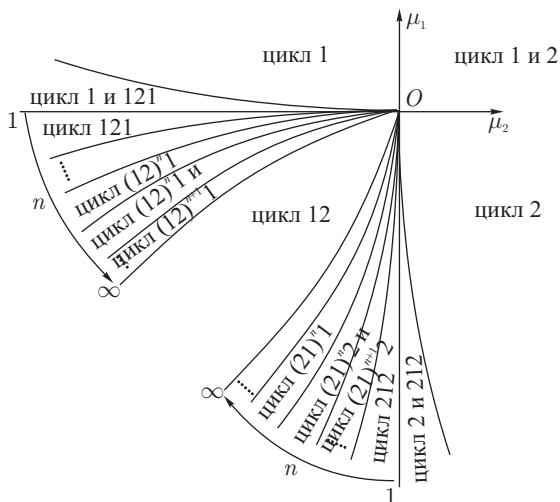


Рис. 13.7.9. Бифуркационная диаграмма для неориентируемой ($A_{1,2} < 0$) гомоклинической восьмерки седла с отрицательной седловой величиной

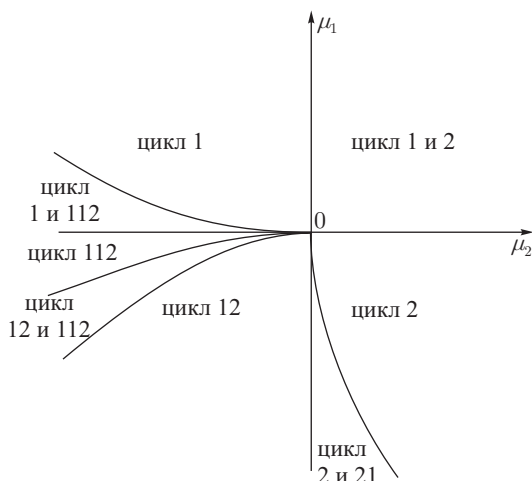


Рис. 13.7.10. Бифуркационная диаграмма для полуориентируемой ($A_1 > 0$ и $A_2 < 0$) гомоклинической восьмерки седла с отрицательной седловой величиной

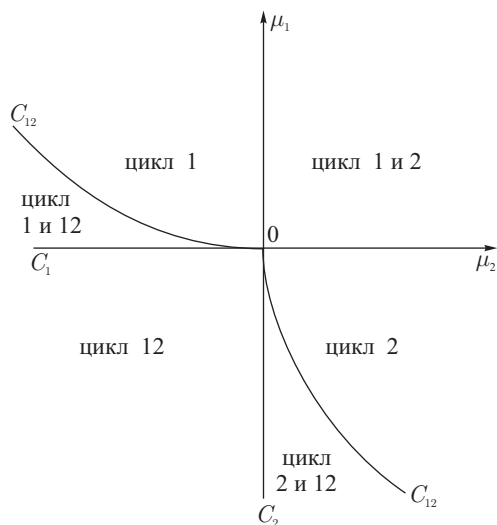


Рис. 13.7.11. Бифуркационная диаграмма для ориентируемой ($A_{1,2} > 0$) гомоклинической восьмерки седла с отрицательной седловой величиной

быть квазиминимальных аттракторов, а кодировки предельных циклов могут равняться только $\{1\}$, $\{2\}$, $\{12\}$, $\{1(21)^k\}$ и $\{2(12)^k\}$ ($k = 1, 2, \dots$). В случаях $A_1 > 0$, $A_2 > 0$ и $A_1 < 0$, $A_2 > 0$ бифуркационное множество состоит из конечного числа кривых. В случае $A_1 < 0$, $A_2 < 0$ оно состоит из счетного множества кривых, которые накапливаются к C_{12} и C_{21} . На кривых C_{12} и C_{21} одна из неустойчивых сепаратрис образует двухобходную гомоклиническую петлю, а другая сепаратриса стремится к ней при $t \rightarrow +\infty$.

Отметим, что систематическое изучение бифуркаций гомоклинических петель, которые являются предельным множеством для других сепаратрис, было проведено в [69].

Отметим также, что вышеприведенные результаты непосредственно обобщаются на случай седла с многомерным неустойчивым многообразием. А именно, если O имеет несколько характеристических показателей с положительными действительными частями, но ведущий характеристический показатель γ_1 является действительным, т. е.

$$\gamma_1 < \operatorname{Re} \gamma_j,$$

и если обе гомоклинические петли не принадлежат сильно неустойчивому многообразию W^{uu} и покидают седло в противоположных направлениях, и, кроме того, расширенное устойчивое многообразие трансверсально к неустойчивому многообразию в точках и той, и другой петли, то теорема 6.3 дает нам существование отталкивающего $(n+1)$ -мерного $\mathbb{C}^1$ -гладкого многообразия. Поскольку для системы на инвариантном многообразии у точки O имеется только один положительный характеристический показатель, то все вышеприведенные результаты остаются верными с единственным отличием в том, что предельные циклы и квазиминимальные множества уже не будут притягивающими, а вместо этого станут седлами.

Теперь рассмотрим случай гетероклинического цикла с двумя седлами O_1 и O_2 . Пусть неустойчивые многообразия седел одномерны, и пусть неустойчивая сепаратриса Γ_1 седла O_1 стремится к O_2 при $t \rightarrow +\infty$, а неустойчивая сепаратриса Γ_2 седла O_2 стремится к O_1 при $t \rightarrow +\infty$. Объединение $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup O_1 \cup O_2$ является гетероклиническим циклом. Задача о бифуркациях в малой окрестности U такого цикла детально рассматривалась в [121].

Мы полагаем здесь, что седловые величины отрицательны и в том, и в другом седле. В этом случае из гетероклинического цикла *при бифуркации может родиться не более одной периодической орбиты*. Кроме того, эта единственная орбита устойчива.

Когда система имеет симметрию и O_1 симметрична O_2 , а сепаратриса Γ_1 симметрична сепаратрисе Γ_2 , тогда бифуркации довольно просты: при расщеплении сепаратрис вовнутрь рождается устойчивая периодическая орбита, а когда сепаратрисы расщепляются наружу, все траектории (кроме $O_{1,2}$) покидают U .

В общем случае картина может быть более сложной в силу возникновения многообходных гетероклинических связей.

Возьмем гладкое двупараметрическое семейство $X_{\mu_1\mu_2}$, трансверсальное бифуркационной поверхности коразмерности два $\mathbb{C}^r$ -гладких ($r \geq 1$) систем с гетероклиническим циклом рассматриваемого типа. Пусть μ_1 и μ_2 — параметры расщепления, управляющие гетероклиническими орбитами Γ_1 и Γ_2 , так что гетероклиническая связка Γ_i расщепляется внутрь при $\mu_i > 0$.

На плоскости (μ_1, μ_2) лежат две кривые L_1 и L_2 , отвечающие гомоклиническим петлям седел O_1 и O_2 соответственно. Эти кривые являются графиками некоторых гладких функций $\mu_1 = h_1(\mu_2)$ и $\mu_2 = h_2(\mu_1)$ соответственно, которые определены при положительных μ и таковы, что $h(0) = 0$, $h'(0) = 0$. В области между L_1 и L_2 существует устойчивая периодическая орбита. Отметим, что многообходные гомоклинические петли не могут возникать, когда седловые величины отрицательны.

Бифуркационная диаграмма для семейства $X_{\mu_1\mu_2}$ может также содержать кривые C_{12}^k и C_{21}^k ($k = 1, \dots$) такие, что при $\mu \in C_{ij}^k$ неустойчивая сепаратриса Γ_i седла O_i ($i = \{1, 2\}$) совершает k полных оборотов вдоль U и входит в седло Q_j ($i \neq j$), образуя таким образом гетероклиническую связку. Кривые C_{ij}^k заданы уравнениями $\mu_j = h_{kij}(\mu_i)$, где h_{kij} — некоторая гладкая функция, определенная на открытом подмножестве положительной оси μ_i и такая, что первая производная h_{kij} равномерно (по k) стремится к нулю при $\mu_i \rightarrow 0$. Структура бифуркационного множества, отвечающая гетероклиническим связкам, меняется довольно значительно в зависимости от того, седлами или седло-фокусами являются состояния равновесия O_i .

Бифуркационная диаграмма для случая, когда O_1 и O_2 — седла, показана на рис. 13.7.12–13.7.15. Здесь, если обе сепаратрисные величины положительны, единственными возможными гетероклиническими связками являются исходные, которые существуют при $\mu_1 = 0$ или при $\mu_2 = 0$. Когда $A_1 > 0$ и $A_2 < 0$, единственной новой бифуркационной кривой является C_{21}^1 . В случае когда $A_1 < 0$ и $A_2 < 0$, существует бесконечное множество бифуркационных кривых, отвечающих всем возможным гетероклиническим связкам. Кривые C_{ij}^k накапливаются к кривой L_j : при $\mu \in L_j$ сепаратриса Γ_j образует простую гомоклиническую петлю к O_j , а сепаратриса Γ_i стремится к этой петле при $t \rightarrow +\infty$.

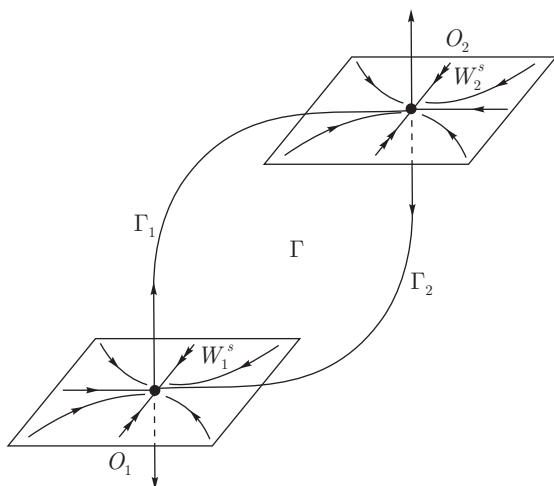


Рис. 13.7.12. Гетероклинический цикл с двумя седлами

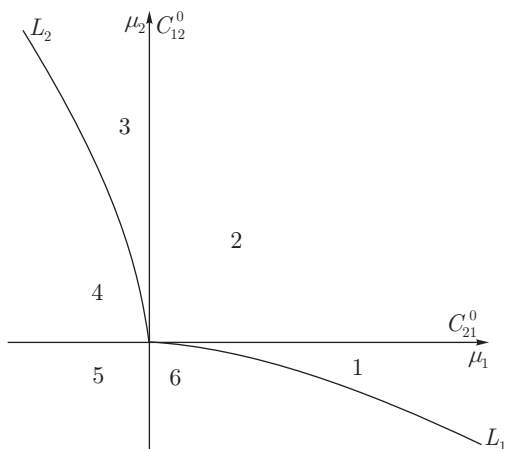


Рис. 13.7.13. Плоскость (μ_1, μ_2) для бифуркации гетероклинического цикла на рис. 13.7.12 для случая $A_1 > 0$, $A_2 > 0$ и $\nu_{1,2} > 1$. В областях 1, 2 и 3 существует только одна устойчивая периодическая орбита

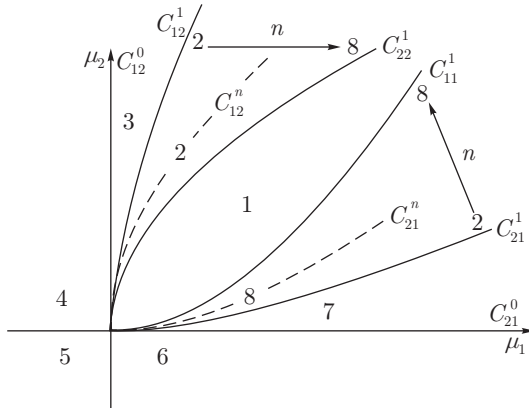


Рис. 13.7.14. То же, что и на рис. 13.7.13, но с $A_1 < 0$, $A_2 < 0$. Система имеет одну устойчивую периодическую орбиту в области 1

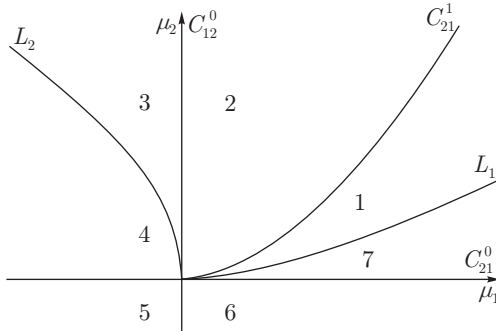


Рис. 13.7.15. То же, что и на рис. 13.7.13, но $A_1 > 0$, $A_2 < 0$. Система имеет одну устойчивую периодическую орбиту в областях 1–3

Сепаратрисные величины $A_{1,2}$ на гетероклинических орбитах определены таким же образом, что и в случае гомоклинических петель. Отметим, что случаи $\{A_1 > 0, A_2 > 0\}$ и $\{A_1 < 0, A_2 < 0\}$ возможны в системах на плоскости (см. рис. 13.7.16), но в последнем случае орбиты Γ_1 и Γ_2 блуждающие.

Бифуркационная диаграмма для случая, когда O_1 и O_2 являются седло-фокусами, показана на рис. 13.7.17. При этом кривые L_1 и L_2 , которые соответствуют гомоклиническим петлям, пересекают кривые C_{21}^0 :

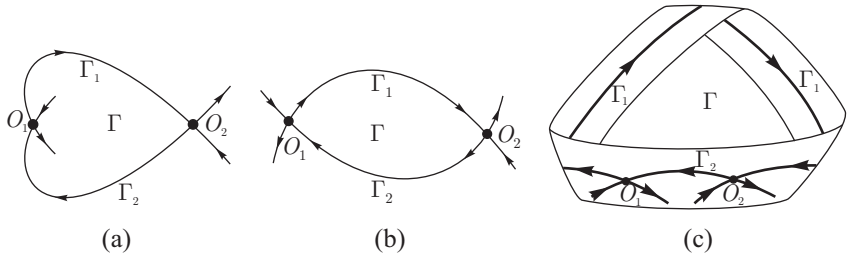


Рис. 13.7.16. Три типа гетероклинических циклов: (a) $A_{1,2} < 0$; (b) $A_{1,2} > 0$; (c) неориентируемое соединение между двумя седлами на ленте Мёбиуса $A_1 < 0$, $A_2 > 0$

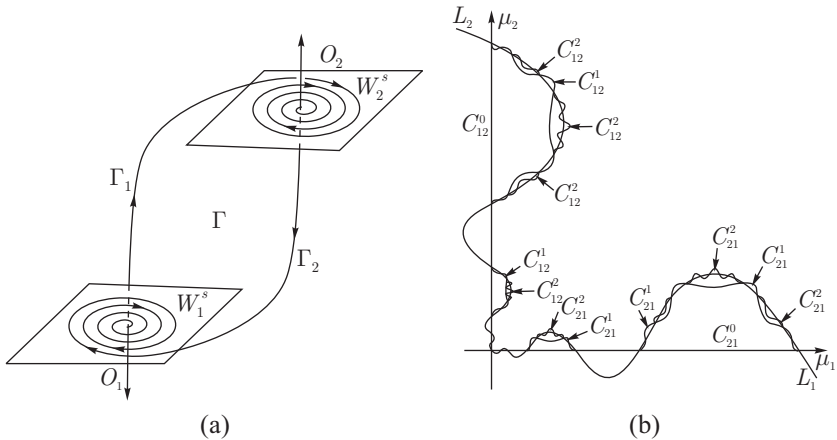


Рис. 13.7.17. (a) Гетероклинический цикл с двумя седло-фокусами. (b) Соответствующая бифуркационная диаграмма

$\{\mu_1 = 0\}$ и $C_{12}^0 : \{\mu_2 = 0\}$ бесконечно много раз. Далее, для каждого $k = 0, 1, 2, \dots$, для любых таких двух соседних точек пересечения L_1 со связной компонентой C_{21}^k (L_2 со связной компонентой C_{12}^k), когда между этими точками выполнено неравенство $h_1(\mu_2) > h_{k12}(\mu_2)$ (соответственно $h_2(\mu_1) > h_{k21}(\mu_1)$), существует компонента кривой C_{21}^{k+1} (соответственно, C_{12}^{k+1}), которая соединяет эти точки. В свою очередь, эта компонента пересекает L_1 (соответственно L_2) бесконечно много раз и т. д.

Предельные точки этого процесса отвечают существованию гомоклинической петли, которая является ω -предельным множеством для сепаратрисы другого седло-фокуса.

Бифуркационная диаграмма для случая, когда O_1 является седло-фокусом, а O_2 — седлом, показана на рис. 13.7.18 и 13.7.9. При этом картина зависит от знака сепаратрисной величины A_2 на гетероклинической орбите Γ_2 . При $A_2 > 0$ кривых C_{21}^k с $k \geq 1$ не существует. Когда $A_2 < 0$, кривая C_{21}^1 пересекает L_1 бесконечно много раз и структура множества кривых C_{21}^k для $A_2 < 0$ такая же, как и в случае, когда обе точки $O_{1,2}$ являются седло-фокусами.

Множество кривых C_{12}^k организовано следующим образом. Отметим, что кривая $L_2 : \mu_2 = h_2(\mu_1)$ пересекает линию $C_{12}^0 : \{\mu_2 = 0\}$ бесконечно много раз. Пусть $P(\mu'_1, 0)$ и $Q(\mu''_1, 0)$ — такие две соседние точки пересечения, что между этими точками $h_2 > 0$. Пусть $\mu'_1 > \mu''_1$. Тогда бесконечно много кривых C_{12}^k выходит из точки P , когда $A_2 > 0$ (или из точки Q , когда $A_2 < 0$), каждая из которых пересекает L_2 в одной точке. Кривая C_{12}^1 оканчивается в Q (в P , если $A_2 < 0$), кривая C_{12}^2 оканчивается в точке пересечения $C_{12}^1 \cap L_2$ и т.д.: кривая C_{12}^{k+1} оканчивается в точке $C_{12}^k \cap L_2$.

Все эти точки пересечения отвечают *неориентируемой* гомоклинической петле седла O_2 (т.е. сепаратрисная величина на петле отрицательна), и они накапливаются к точке, в которой сепаратрисная величина обращается в нуль на петле. Фрагмент кривой L_2 между этой точкой и точкой P (точкой Q при $A_2 < 0$) отвечает *ориентируемой* гомоклинической петле, на которую наматывается сепаратриса Γ_1 седла O_1 при $t \rightarrow +\infty$. Кривые C_{12}^k накапливаются к этому фрагменту слева.

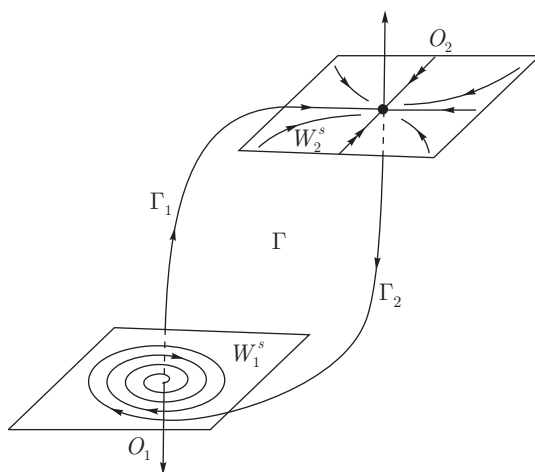
Надо отметить, что эта картина установлена, только если система по крайней мере $\mathbb{C}^3$ и при условии

$$2\rho\nu < \rho\bar{\nu} + 2.$$

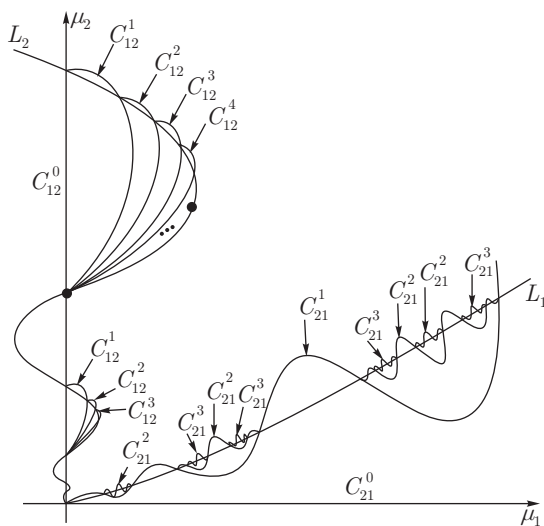
Здесь ρ — седловой индекс седло-фокуса O_1 , а ν — седловой индекс седла O_2 , и $\bar{\nu} = |\operatorname{Re} \lambda_2 / \gamma|$, где γ обозначает положительный характеристический показатель седла O_2 , а λ_2 — *неведущий* характеристический показатель седла O_2 , ближайший к мнимой оси (λ_1 является ведущим показателем, т.е. $\nu = |\lambda_1 / \gamma|$ и $1 < \nu < \bar{\nu}$; напомним также, что по условию $\rho > 1$ — т.к. седловые величины отрицательны).

Если это неравенство не выполнено, то структура множества кривых C_{12}^k может отличаться: по-прежнему будет существовать бесконечное множество кривых C_{12}^k , начинающихся из P или Q , но в некоторых случаях только конечное их число будет иметь пересечение с L_2 , а остальные кривые будут оканчиваться в последней точке пересечения.

Отметим, что все эти результаты (кроме тонкой структуры множества кривых C_{12}^k в случае, когда O_1 является седло-фокусом, а O_2 — седлом)



(a)



(b)

Рис. 13.7.18. (а) Гетероклинический цикл с седло-фокусом и седлом. Соответствующая бифуркационная диаграмма для случая $A_2 < 0$ (b) и $A_2 > 0$ (c)

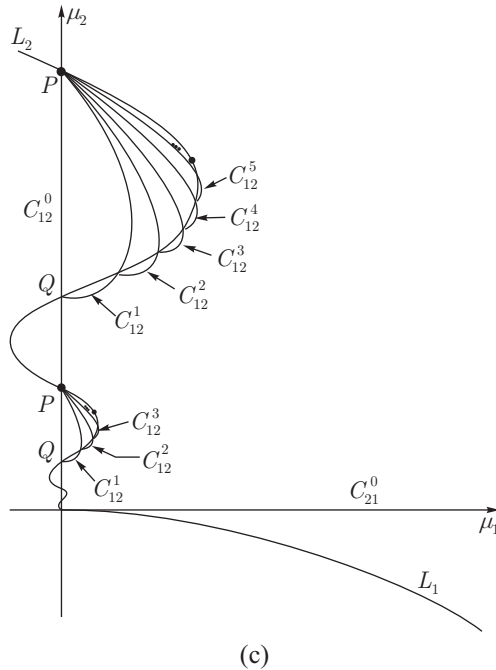


Рис. 13.7.18. Продолжение

доказаны для $\mathbb{C}^1$ -гладких систем. Таким образом, как и в случае гомоклинической восьмерки, эти результаты непосредственно обобщаются на случай, когда неустойчивые многообразия O_1 и O_2 многомерны (при этом они должны иметь одинаковую размерность), если выполнены условия теоремы 6.4 части I этой книги, которые обеспечивают существование инвариантного $\mathbb{C}^1$ -многообразия вблизи гетероклинического цикла.

Другой случай, изученный в [121], отвечает бифуркациям гетероклинического цикла, когда седловые величины имеют противоположные знаки в состояниях равновесия O_1 и O_2 (случай, когда оба седловых числа положительны, приводит либо к сложной динамике, если и O_1 и O_2 — седло-фокусы, или сводится к предыдущему обращением времени и редукцией на центральном многообразии). Основным предположением при этом является то, что и O_1 и O_2 — простые седла (не седло-фокусы).

В частности, пусть размерность устойчивого многообразия O_1 равна размерности неустойчивого многообразия O_2 . Кроме того, пусть и устой-

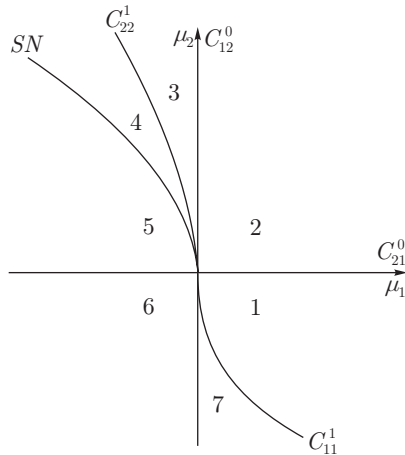


Рис. 13.7.19. Бифуркационная диаграмма для случая, когда оба состояния равновесия в гетероклиническом цикле — седла (см. рис. 13.7.12) при условии, что $A_{1,2} > 0$, $\nu_1 > 1$, $\nu_2 < 1$ и $\nu_1 \nu_2 > 1$. Система имеет один предельный цикл в областях 1–3, два предельных цикла в области 4 и ни одного в областях 5–7. На кривой SN из седла рождаются два предельных цикла; неустойчивый влипают в гомоклиническую петлю на кривой L_2 , в то время как устойчивый предельный цикл исчезает на L_1

чивый и неустойчивый ведущие характеристические показатели в O_1 и O_2 действительны. Предположим также, что обе гетероклинические орбиты $\Gamma_{1,2}$ входят и выходят из седел вдоль ведущих направлений. Мы также предполагаем, что расширенное неустойчивое многообразие каждого седла трансверсально к устойчивому многообразию другого седла в точках орбит $\Gamma_{1,2}$ и что расширенное устойчивое многообразие трансверсально к неустойчивому многообразию. При этих условиях теорема 6.4 дает существование двумерного инвариантного многообразия, которое содержит все орбиты, остающиеся в малой окрестности гетероклинического цикла при всех значениях времени. Таким образом, динамика, по существу, двумерная. Еще раз отметим, что так как инвариантное многообразие является в общем случае только $\mathbb{C}^1$ -гладким, чтобы изучить задачу, приходится выполнять вычисления для исходной многомерной системы.

Пусть ν_1 и ν_2 — седловые индексы в O_1 и O_2 соответственно. Предположим, что $\nu_1 \neq 1$, $\nu_2 \neq 1$ и $\nu_1 \nu_2 \neq 1$. Тогда при бифуркации рассматриваемого гетероклинического цикла может родиться не более двух периодических орбит.

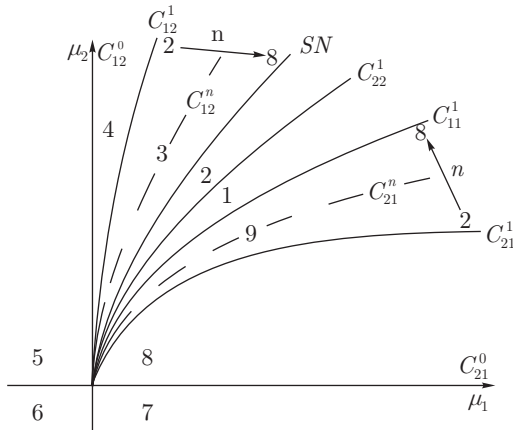


Рис. 13.7.20. Бифуркационная диаграмма для гетероклинического цикла на рис. 13.7.12 для случая $A_{1,2} < 0$, $\nu_1 > 1$, $\nu_2 < 1$ и $\nu_1 \nu_2 > 1$. Эта система имеет один предельный цикл в области «1», два предельных цикла в области «2», а в остальных областях — ни одного

Бифуркационные диаграммы показаны на рис. 13.7.20–13.7.23. Сепаратрисные величины A_1 и A_2 определяются как производные глобальных отображений вблизи гетероклинических орбит Γ_1 и Γ_2 на двумерном инвариантном многообразии. Отметим, что другие случаи сочетаний знаков $A_{1,2}$ и седловых величин могут быть получены обращением времени и перестановкой индексов «1» и «2».

Как мы видим, специфика этого случая, в противоположность тому, когда седловые величины имеют одинаковый знак, заключается в возможности бифуркаций седло-узла и бифуркации удвоения периода, а также в возникновении двухобходных гомоклинических петель.

Гетероклинические циклы с седлами, неустойчивые многообразия которых имеют *разные* размерности, впервые изучались в [34, 35]. Это исследование главным образом концентрировалось на системах со сложной динамикой. Тем не менее мы рассмотрим здесь случай с простой динамикой. Пусть трехмерная бесконечно гладкая система имеет два состояния равновесия O_1 и O_2 с действительными характеристическими показателями, соответственно $\gamma > 0 > \lambda_1 > \lambda_2$ и $\eta_2 > \eta_1 > 0 > \xi$ (т. е. неустойчивое многообразие O_1 одномерно, а неустойчивое многообразие O_2 двумерно). Предположим, что двумерные многообразия $W^s(O_1)$ и $W^u(O_2)$ имеют *трансверсальное* пересечение вдоль гетероклинической траектории Γ_1 (ко-

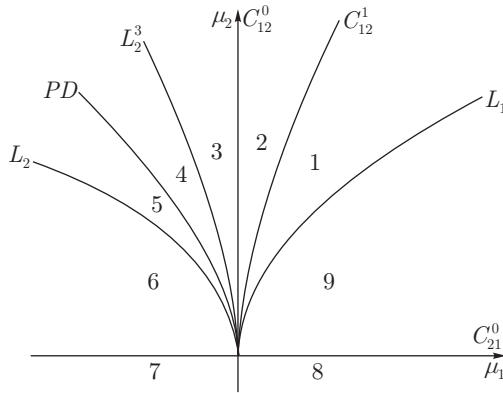


Рис. 13.7.21. Бифуркационная диаграмма для гетероклинического цикла на рис. 13.7.12, когда $A_1 > 0$, $A_2 < 0$, $\nu_1 > 1$, $\nu_2 < 1$ и $\nu_1 \nu_2 > 1$. Система имеет одну однообходную периодическую орбиту в областях 1, 2, 3 и 5, две периодические орбиты (одну однообходную и одну двухобходную) в области 4 и ни одной — в остальных областях. Устойчивая периодическая орбита теряет устойчивость на кривой PD , отвечающей бифуркации удвоения периода. Неустойчивый двухобходный предельный цикл влипает в двухобходную петлю сепаратрисы на L_2^2 . Устойчивый однообходный предельный цикл исчезает на L_1

торая не лежит ни в соответствующем сильно устойчивом многообразии, ни в сильно неустойчивом многообразии). Предположим также, что одномерная неустойчивая сепаратриса O_1 совпадает с одномерной устойчивой сепаратрисой O_2 , т. е. существует негрубая гетероклиническая орбита Γ_2 (рис. 13.7.24). Дополнительные условия невырожденности при этом заключаются в том, что седловые величины не равны нулю и что расширенное неустойчивое многообразие O_1 трансверсально к расширенному устойчивому многообразию O_2 в точках негрубой гетероклинической орбиты Γ_2 .

Эта бифуркация имеет коразмерность 2: в качестве управляющих параметров (μ_1, μ_2) при этом выбираются координаты точки пересечения одномерной неустойчивой сепаратрисы O_1 с некоторой секущей, трансверсальной к одномерной устойчивой сепаратрисе другого седла O_2 . Поскольку соответствующие бифуркационные диаграммы довольно сложные, мы не приводим их, а отсылаем читателя к исходным статьям [34, 35]. Заметим только, что из такого гетероклинического цикла рождается *не более двух периодических орбит (всегда седловых)*.

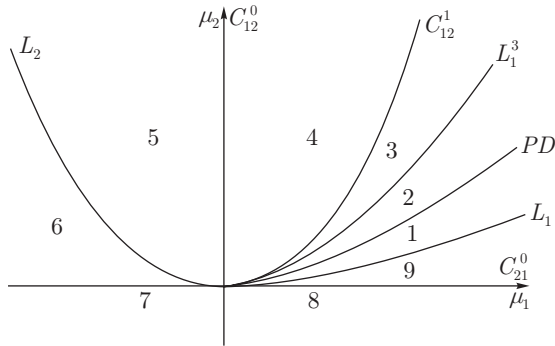


Рис. 13.7.22. Бифуркационная диаграмма для гетероклинического цикла на рис. 13.7.12, когда $A_1 > 0$, $A_2 < 0$, $\nu_1 < 1$, $\nu_2 > 1$ и $\nu_1 \nu_2 > 1$. Эта система имеет одну однообходную периодическую орбиту в областях 1, 2, 3 и 5, две периодические орбиты (одну однообходную и одну двухобходную) в области 4 и ни одной в остальных областях

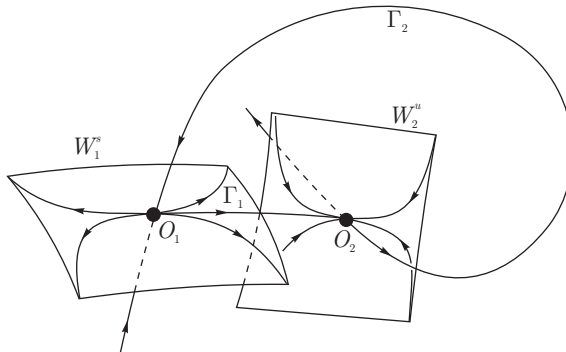


Рис. 13.7.23. Гетероклинический цикл с двумя седлами. Отметим, что гетероклиническая траектория Γ_1 , соединяющая O_1 с O_2 , является грубой

13.8. Оценки на поведение траекторий вблизи седлового состояния равновесия

В этом параграфе мы доказываем оценки на решения вблизи седлового состояния равновесия, которые мы использовали в этой главе.

Рассмотрим $\mathbb{C}^r$ -гладкую ($r \geq 3$) систему в окрестности седлового состояния равновесия с m -мерным устойчивым и n -мерным неустойчивым инвариантными многообразиями.

Пусть характеристические показатели седла равны $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ и $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, где $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ ($i = 1, \dots, m$) и $\operatorname{Re} \gamma_i > 0$ ($i = 1, \dots, n$). Предположим, что действительные части $(\lambda_1, \dots, \lambda_{m_1})$ равны некоторому $-\lambda < 0$, а остальные устойчивые характеристические показатели $(\lambda_{m_1+1}, \dots, \lambda_m)$ лежат строго слева от линии $\operatorname{Re}(\cdot) = -\lambda$. Относительно неустойчивых характеристических показателей мы предполагаем, что $\operatorname{Re} \gamma_1 = \dots = \operatorname{Re} \gamma_{n_1} = \gamma > 0$ и $\operatorname{Re} \gamma_i > \gamma$ при $i > n_1$.

Как показано в приложении А части I этой книги, систему в $\mathbb{R}^{n+m}$, удовлетворяющую данным условиям, можно $\mathbb{C}^{r-1}$ -преобразованием переменных привести к виду

$$\begin{aligned}\dot{x} &= B_1 x + f_{11}(x, y, v)x + f_{12}(x, u, y, v)u, \\ \dot{u} &= B_2 u + f_{21}(x, y, v)x + f_{22}(x, u, y, v)u, \\ \dot{y} &= C_1 y + g_{11}(x, u, y)y + g_{12}(x, u, y, v)v, \\ \dot{v} &= C_2 v + g_{21}(x, u, y)y + g_{22}(x, u, y, v)v,\end{aligned}\tag{13.8.1}$$

где собственными числами матрицы B_1 являются $(\lambda_1, \dots, \lambda_{m_1})$, собственными числами матрицы B_2 — $(\lambda_{m_1+1}, \dots, \lambda_m)$, матрицы C_1 — $(\gamma_1, \dots, \gamma_{n_1})$ и матрицы C_2 — $(\gamma_{n_1+1}, \dots, \gamma_n)$. Кроме того, $\mathbb{C}^{r-1}$ -гладкие функции f_{ij} и g_{ij} удовлетворяют

$$\begin{aligned}f_{11}(x, 0, 0) &\equiv 0, & g_{11}(0, 0, y) &\equiv 0, \\ f_{12}(x, u, 0, 0) &\equiv 0, & g_{12}(0, 0, y, v) &\equiv 0, \\ f_{j1}(0, y, v) &\equiv 0, & g_{j1}(x, u, 0) &\equiv 0, \\ f_{22}(0, 0, 0, 0) &= 0, & g_{22}(0, 0, 0, 0) &= 0.\end{aligned}\tag{13.8.2}$$

Пусть $\lambda_0 > 0$ и $\gamma_0 > 0$ таковы, что при всех $t \geq 0$

$$\|e^{B_1 t}\| \leq e^{-\lambda_0 t}, \quad \|e^{-C_1 t}\| \leq e^{-\gamma_0 t}.\tag{13.8.3}$$

Например, когда существует только один устойчивый ведущий характеристический показатель ($m_1 = 1$ и $\lambda_1 = -\lambda$ действительные) или если существует пара комплексно-сопряженных устойчивых ведущих характеристических показателей ($m_1 = 2$ и $\lambda_1 = \lambda_2^* = -\lambda + i\omega$ с $\omega \neq 0$), то $\lambda_0 = \lambda$. Аналогично $\gamma_0 = \gamma$, если $n_1 = 1$ или если $n_1 = 2$ и $\gamma_1 = \gamma_2^*$ не являются действительными.

Выберем также некоторые значения λ' и γ' , удовлетворяющие

$$0 < \lambda_0 < \lambda' < \min\{2\lambda_0, \lambda''\} \quad \text{и} \quad 0 < \gamma_0 < \gamma' < \min\{2\gamma_0, \gamma''\},\tag{13.8.4}$$

где λ'' и γ'' таковы, что при всех $t \geq 0$

$$\|e^{B_2 t}\| \leq e^{-\lambda'' t}, \quad \|e^{-C_2 t}\| \leq e^{-\gamma'' t}.\tag{13.8.5}$$

Мы также выберем некоторые $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\gamma}$ такие, что

$$0 < \lambda_0 < \tilde{\lambda} < \min\{\lambda', \lambda_0 + \gamma_0\} \quad \text{и} \quad 0 < \gamma_0 < \tilde{\gamma} < \min\{\gamma', \gamma_0 + \lambda_0\}. \quad (13.8.6)$$

Пусть две точки $M_0(x_0, u_0, y_0, v_0)$ и $M_1(x_1, u_1, y_1, v_1)$ лежат в малой окрестности седла, и пусть орбита точки M_0 попадает в M_1 в момент времени $t = \tau$, не покидая окрестность седла. В параграфе 2.8 доказано, что (y_0, v_0) и (x_1, u_1) определяются единственным образом для любых малых (x_0, u_0, y_1, v_1) и $\tau \geq 0$. Кроме того, (x_1, u_1, y_0, v_0) гладко зависят от $(x_0, u_0, y_1, v_1, \tau)$.

Лемма 13.5 (Овсянников–Шильников [101]). *Обозначим*

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{B_1\tau}x_0 + \xi_1(x_0, u_0, y_1, v_1, \tau), \\ y_0 &= e^{-C_1\tau}y_1 + \eta_1(x_0, u_0, y_1, v_1, \tau), \\ u_1 &= \xi_2(x_0, u_0, y_1, v_1, \tau), \\ v_0 &= \eta_2(x_0, u_0, y_1, v_1, \tau). \end{aligned} \quad (13.8.7)$$

Если тождества (13.8.7) выполнены, то верны следующие оценки:

$$\|\xi_1\|_{\mathbb{C}^{r-2}} = o(e^{-\tilde{\lambda}\tau}), \quad \|\eta_1\|_{\mathbb{C}^{r-2}} = o(e^{-\tilde{\gamma}\tau}), \quad (13.8.8)$$

$$\|\xi_2\|_{\mathbb{C}^{r-2}} = o(e^{-\lambda'\tau}), \quad \|\eta_2\|_{\mathbb{C}^{r-2}} = o(e^{-\gamma'\tau}), \quad (13.8.9)$$

где $\|\cdot\|_{\mathbb{C}^{r-2}}$ обозначает максимум нормы самой функции и норм всех ее производных вплоть до порядка $(r-2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$f_i = f_{i1}x + f_{i2}u \quad \text{и} \quad g_i = g_{i1}y + g_{i2}v. \quad (13.8.10)$$

Достаточно доказать (см. параграф 2.7), что при данных малых (x_0, u_0, y_1, v_1) решение $(x(t), u(t), y(t), v(t))$ системы

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{B_1t}x_0 + \int_0^t e^{B_1(t-s)}f_1(x(s), u(s), y(s), v(s))ds, \\ u(t) &= e^{B_2t}u_0 + \int_0^t e^{B_2(t-s)}f_2(x(s), u(s), y(s), v(s))ds, \\ y(t) &= e^{-C_1(\tau-t)}y_1 - \int_t^\tau e^{-C_1(s-t)}g_1(x(s), u(s), y(s), v(s))ds, \\ v(t) &= e^{-C_2(\tau-t)}v_1 - \int_t^\tau e^{-C_2(s-t)}g_2(x(s), u(s), y(s), v(s))ds \end{aligned} \quad (13.8.11)$$

удовлетворяет следующим оценкам:

$$\begin{aligned}
 \|x(t) - e^{B_1 t} x_0\| &\leq K_1 e^{-\lambda_0 t} e^{-(\tilde{\lambda} - \lambda_0)\tau}, \\
 \|u(t)\| &\leq K_2 e^{-\lambda' t}, \\
 \|y(t) - e^{-C_1(\tau-t)} y_1\| &\leq K_1 e^{-\gamma_0(\tau-t)} e^{-(\tilde{\gamma} - \gamma_0)\tau}, \\
 \|v(t)\| &\leq K_2 e^{-\gamma'(\tau-t)}
 \end{aligned} \tag{13.8.12}$$

при $t \in [0, \tau]$, где $K_{1,2}$ — некоторые константы¹⁶.

Кроме того, аналогичные оценки должны быть верны для всех производных от левых частей (13.8.12) по (x_0, u_0, y_1, v_1) , при этом значения коэффициентов K могут зависеть от порядка производных. Отметим, что нет необходимости вычислять производные по t и τ , потому что они связаны с другими производными простыми соотношениями (см. лемму 5.1 и объяснения в параграфе 5.2).

Как доказано в параграфе 2.8, решением системы (13.8.11) является предел последовательных приближений $(x^{(k)}(t), u^{(k)}(t), y^{(k)}(t), v^{(k)}(t))$ ($k \rightarrow +\infty$), вычисляемых по правилу

$$\begin{aligned}
 x^{(k+1)}(t) &= e^{B_1 t} x_0 + \int_0^t e^{B_1(t-s)} f_1(x^{(k)}(s), u^{(k)}(s), y^{(k)}(s), v^{(k)}(s)) ds, \\
 u^{(k+1)}(t) &= e^{B_2 t} u_0 + \int_0^t e^{B_2(t-s)} f_2(x^{(k)}(s), u^{(k)}(s), y^{(k)}(s), v^{(k)}(s)) ds, \\
 y^{(k+1)}(t) &= e^{-C_1(\tau-t)} y_1 - \int_t^\tau e^{-C_1(s-t)} g_1(x^{(k)}(s), u^{(k)}(s), y^{(k)}(s), v^{(k)}(s)) ds, \\
 v^{(k+1)}(t) &= e^{-C_2(\tau-t)} v_1 - \int_t^\tau e^{-C_2(s-t)} g_2(x^{(k)}(s), u^{(k)}(s), y^{(k)}(s), v^{(k)}(s)) ds,
 \end{aligned} \tag{13.8.13}$$

начиная с начального приближения $(x^{(1)}(t), u^{(1)}(t), y^{(1)}(t), v^{(1)}(t)) = 0$.

Таким образом, чтобы доказать какие-либо оценки на решения (13.8.11), мы можем предположить, что k -е последовательное приближение удовлетворяет этим оценкам, а затем, основываясь на этом предположении, мы

¹⁶Строго говоря, это дает оценки типа $O(\cdot)$ в правой части (13.8.8) и (13.8.9), но символ O можно заменить на o , просто сдвигая $\tilde{\lambda}$ слегка ближе к нулю.

должны проверить, что $(k+1)$ -е последовательное приближение также удовлетворяет им; конечно, оценки должны быть не зависящими от k .

Теперь допустим, что k -е приближение удовлетворяет (13.8.12) при некоторых $K_{1,2}$. Следовательно:

$$\|x^{(k)}(t)\| \leq 2\varepsilon e^{-\lambda_0 t}, \quad \|y^{(k)}(t)\| \leq 2\varepsilon e^{-\gamma_0(\tau-t)}, \quad (13.8.14)$$

вне зависимости от значения K_1 при условии, что τ достаточно велико; при этом ε обозначает размер рассматриваемой окрестности седла (то есть $\|x_0\| \leq \varepsilon$, $\|y_1\| \leq \varepsilon$).

В силу (13.8.2) функцию f_1 можно оценить как

$$\|f_1\| \leq \sup \|f''_{11x(y,v)}\| \cdot \|x\|^2 \|y, v\| + \sup \|f'_{12(y,v)}\| \cdot \|u\| \cdot \|y, v\|. \quad (13.8.15)$$

Таким образом, из предполагаемой справедливости (13.8.12) для k -го приближения и из (13.8.14) следует, что для достаточно малых ε

$$\begin{aligned} \|f_1(x^{(k)}(s), u^{(k)}(s), y^{(k)}(s), v^{(k)}(s))\| &\leq \\ &\leq e^{-2\lambda_0 s} e^{-\gamma_0(\tau-s)} + K_0 K_2^2 e^{-\lambda' s} e^{-\gamma_0(\tau-s)} \leq \\ &\leq (1 + K_0 K_2^2) e^{-\tilde{\lambda} s} e^{-\gamma_0(\tau-s)}, \end{aligned} \quad (13.8.16)$$

где K_0 — некоторая константа; отметим, что здесь мы использовали соотношения (13.8.4) и (13.8.6).

Аналогично, если ε достаточно мало, то

$$\|f_2(x^{(k)}(s), u^{(k)}(s), y^{(k)}(s), v^{(k)}(s))\| \leq (\varepsilon + \delta K_2) e^{-\lambda' s}, \quad (13.8.17)$$

где $\delta \equiv \sup \|f''_{22}\|$ можно выбрать настолько малым, насколько необходимо, посредством уменьшения размера окрестности седла.

Из (13.8.16) и (13.8.17) мы получаем соответственно

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t e^{\lambda_0 s} f_1(x^{(k)}(s), u^{(k)}(s), y^{(k)}(s), v^{(k)}(s)) ds \right\| &\leq \\ &\leq (1 + K_0 K_2^2) e^{-\gamma_0 \tau} \int_0^\tau e^{(\gamma_0 + \lambda_0 - \tilde{\lambda})s} ds \end{aligned}$$

и

$$\left\| \int_0^t e^{\lambda'' s} f_2(x^{(k)}(s), u^{(k)}(s), y^{(k)}(s), v^{(k)}(s)) ds \right\| \leq (\varepsilon + \delta K_2) \int_0^t e^{(\lambda'' - \lambda')s} ds.$$

Таким образом [см. (13.8.13), (13.8.3) и (13.8.5)], $(x, u)^{(k+1)}$ удовлетворяет (13.8.12) с теми же самыми K_1 и K_2 , если

$$K_1 \geq (1 + K_0 K_2^2) \frac{1}{\lambda_0 + \gamma_0 - \tilde{\lambda}}$$

и

$$K_2 \geq \varepsilon + (\varepsilon + \delta K_2) \frac{1}{\lambda'' - \lambda'}.$$

В силу симметрии задачи, мы немедленно получаем также и неравенства для $K_{1,2}$, которые достаточны, чтобы $(y, v)^{(k+1)}$ удовлетворяло (13.8.12). Все вместе это дает

$$\begin{aligned} K_1 &\geq (1 + K_0 K_2^2) \frac{1}{\lambda_0 + \gamma_0 - \max\{\tilde{\gamma}, \tilde{\lambda}\}}, \\ K_2 &\geq \varepsilon + (\varepsilon + \delta K_2) \max \left\{ \frac{1}{\gamma'' - \gamma'}, \frac{1}{\lambda'' - \lambda'} \right\}, \end{aligned} \quad (13.8.18)$$

где δ стремится к нулю при убывании размера ε окрестности седла.

Эти неравенства легко удовлетворить для некоторых $K_2 = O(\varepsilon)$ и $K_1 = O(1)$. Иными словами, действительно можно выбрать такие подходящие константы $K_{1,2}$, что оценки (13.8.12) выполнены. Для того чтобы завершить доказательство нашей леммы, мы должны убедиться, что аналогичные оценки верны для всех производных решения $(x(t), u(t), y(t), v(t))$ системы (13.8.11).

В параграфе 2.8 доказано, что последовательные приближения стремятся к решению краевой задачи вместе со всеми своими производными. Таким образом, мы можем *предположить*, что k -е приближение удовлетворяет¹⁷

$$\begin{aligned} \|D_p x^{(k)}(t) - D_p(e^{B_1 t} x_0)\| &\leq K_1^{(p)} e^{-\lambda_0 t} e^{-(\tilde{\lambda} - \lambda_0)\tau}, \\ \|D_p u^{(k)}(t)\| &\leq K_2^{(p)} e^{-\lambda' t}, \\ \|D_p y^{(k)}(t) - D_p(e^{-C_1(\tau-t)} y_1)\| &\leq K_1^{(p)} e^{-\gamma_0(\tau-t)} e^{-(\tilde{\gamma} - \gamma_0)\tau}, \\ \|D_p v^{(k)}(t)\| &\leq K_2^{(p)} e^{-\gamma'(\tau-t)} \end{aligned} \quad (13.8.19)$$

для некоторых $K_{1,2}$, которые не зависят от k , но могут зависеть от порядка p производной. Затем, основываясь на этом предположении, мы должны

¹⁷Мы используем обозначение $D_p = \frac{\partial^p}{\partial(x^0, u^0, y^1, v^1)^p}$.

доказать, что производные следующего приближения $(x^{(k+1)}(t), u^{(k+1)}(t), y^{(k+1)}(t), v^{(k+1)}(t))$ удовлетворяют тем же оценкам.

Фактически достаточно провести вычисления только для $x^{(k+1)}(t)$ и $u^{(k+1)}(t)$; формулы для $y^{(k+1)}(t)$ и $v^{(k+1)}(t)$ получаются как следствие симметрии задачи.

Дифференцирование (13.8.13) дает

$$\begin{aligned} D_p x^{(k+1)}(t) &= D_p (e^{B_1 t} x_0) + \int_0^t e^{B_1(t-s)} \times \\ &\quad \times D_p f_1(x^{(k)}(s), u^{(k)}(s), y^{(k)}(s), v^{(k)}(s)) ds, \\ D_p u^{(k+1)}(t) &= D_p (e^{B_2 t} u_0) + \int_0^t e^{B_2(t-s)} \times \\ &\quad \times D_p f_2(x^{(k)}(s), u^{(k)}(s), y^{(k)}(s), v^{(k)}(s)) ds. \end{aligned}$$

Из (13.8.3) и (13.8.5) мы имеем

$$\begin{aligned} \|D_p x^{(k+1)}(t) - D_p (e^{B_1 t} x_0)\| &\leq \\ &\leq e^{-\lambda_0 t} \int_0^t e^{\lambda_0 s} \|D_p f_1(x^{(k)}(s), u^{(k)}(s), y^{(k)}(s), v^{(k)}(s))\| ds, \\ \|D_p u^{(k+1)}(t)\| &\leq \\ &\leq e^{-\lambda'' t} \left[1 + \int_0^t e^{\lambda'' s} \|D_p f_2(x^{(k)}(s), u^{(k)}(s), y^{(k)}(s), v^{(k)}(s))\| ds \right]. \end{aligned} \quad (13.8.20)$$

Теперь мы проверим, что для производных $D_p f_{1,2}$ при любых p верны оценки, аналогичные (13.8.16) и (13.8.17):

$$\|D_p f_1(x^{(k)}(s), u^{(k)}(s), y^{(k)}(s), v^{(k)}(s))\| \leq \tilde{K}_1 e^{-\gamma_0(\tau-s)} e^{-\tilde{\lambda}s} \quad (13.8.21)$$

и

$$\|D_p f_2(x^{(k)}(s), u^{(k)}(s), y^{(k)}(s), v^{(k)}(s))\| \leq (\tilde{K}_2 + \delta K_2^{(p)}) e^{-\lambda' s}, \quad (13.8.22)$$

где δ можно выбрать произвольно малым, уменьшая размер окрестности седла; $\tilde{K}_2$ не зависит от выбора констант $K_{1,2}^{(p)}$ в (13.8.19), и $\tilde{K}_1$ не зависит от $K_1^{(p)}$ (однако $\tilde{K}_{1,2}$ может зависеть от $\tilde{K}_{1,2}$, соответствующих производным меньших порядков).

По правилу дифференцирования сложной функции, производные

$$D_p f_i(x^{(k)}(s), u^{(k)}(s), y^{(k)}(s), v^{(k)}(s))$$

оцениваются суммой

$$\begin{aligned} & \text{const} \cdot \sum_{q_1, q_2} \left\| \frac{\partial^p f_i}{\partial(x, u)^{q_1} \partial(y, v)^{q_2}}(x^{(k)}(s), u^{(k)}(s), y^{(k)}(s), v^{(k)}(s)) \right\| \times \\ & \times \|D_{l_1}(x^{(k)}(s), u^{(k)}(s))\| \dots \|D_{l_{q_1}}(x^{(k)}(s), u^{(k)}(s))\| \times \\ & \times \|D_{l_{q_1+1}}(y^{(k)}(s), v^{(k)}(s))\| \dots \|D_{l_{q_1+q_2}}(y^{(k)}(s), v^{(k)}(s))\|, \end{aligned} \quad (13.8.23)$$

где $q_{1,2}$ такие неотрицательные целые индексы, что $1 \leq q_1 + q_2 \leq p$, а l — такие положительные целые индексы, что $l_1 + \dots + l_{q_1+q_2} = p$.

По предположению, оценки на производные $\|D_l u^{(k)}(s)\|$ и $\|D_l v^{(k)}(s)\|$ даны формулами (13.8.19). Для больших τ оценки (13.8.19) влекут

$$\|D_l x^{(k)}(s)\| \leq 2e^{-\lambda_0 s}, \quad \|D_l y^{(k)}(s)\| \leq 2e^{-\gamma_0(\tau-s)}. \quad (13.8.24)$$

Таким образом, оценку (13.8.23) можно записать как

$$\begin{aligned} & \text{const} \cdot \sum_{q_1, q_2} \left\| \frac{\partial^p f_i}{\partial(x, u)^{q_1} \partial(y, v)^{q_2}}(x^{(k)}(s), u^{(k)}(s), y^{(k)}(s), v^{(k)}(s)) \right\| \times \\ & \times e^{-q_1 \lambda_0 s} e^{-q_2 \gamma_0(\tau-s)}. \end{aligned} \quad (13.8.25)$$

Очевидно, что в оценке для f_1 члены с $q_1 \geq 2$ и $q_2 \geq 1$ удовлетворяют (13.8.21) и все члены с $q_1 \geq 2$ в оценке для f_2 удовлетворяют (13.8.22). Отметим также, что

$$\frac{\partial^{q_2} f_i}{\partial(y, v)^{q_2}} \equiv \frac{\partial^{q_2} f_{i1}}{\partial(y, v)^{q_2}} \cdot x^{(k)}(s) + \frac{\partial^{q_2} f_{i2}}{\partial(y, v)^{q_2}} \cdot u^{(k)}(s) = O(e^{-\lambda' s}). \quad (13.8.26)$$

Здесь мы используем (13.8.12), (13.8.14), (13.8.4) и равенства (13.8.2), которые дают $\frac{\partial^{q_2} f_{i1}}{\partial(y, v)^{q_2}} = 0$ при $x = 0$. Поскольку $q_2 \leq r - 2$ и $f_{i1} \in \mathbb{C}^{r-1}$, производная от f_{i1} порядка q_2 является гладкой функцией. Таким образом, поскольку она обращается в нуль при $x = 0$, ее можно оценить как $\frac{\partial^{q_2} f_{i1}}{\partial(y, v)^{q_2}} = O(x)$.

Таким образом, из (13.8.26) следует, что члены с $q_1 = 0$ и $q_2 \geq 1$ в оценке (13.8.25) для f_1 и все члены с $q_1 = 0$ в оценке для f_2 также удовлетворяют (13.8.21) и (13.8.22) соответственно.

Аналогично, так как f_1 тождественно равна нулю при $(y, v) = 0$, то

$$\frac{\partial^{q_1} f_1}{\partial(x, u)^{q_1}} = O(e^{-\gamma_0(\tau-s)}).$$

Отсюда все члены с $q_1 \geq 2$ в оценке (13.8.25) для f_1 удовлетворяют (13.8.21).

Осталось рассмотреть следующие члены в (13.8.25) (при $q_1 = 1$):

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^{q_2} f_i}{\partial(y, v)^{q_2}} \right\| \cdot e^{-q_2 \gamma_0(\tau-s)} e^{-\lambda_0 s}$$

и

$$\left\| \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial^{q_2} f_i}{\partial(y, v)^{q_2}} \right\| \cdot e^{-q_2 \gamma_0(\tau-s)} e^{-\lambda' s}.$$

Отметим, что $f'_{ix} = 0$ при $(x, u) = 0$ [см. (13.8.2)]. Отсюда $f'_{ix} = O(x, u)$ вместе со всеми производными по (y, v) вплоть до порядка $q_2 \leq r - 3$. Таким образом, из (13.8.12), (13.8.14) и (13.8.4) следует, что оба вышеприведенных члена можно оценить как $\text{const} \cdot e^{-q_2 \gamma_0(\tau-s)} e^{-\lambda' s}$, т. е. они удовлетворяют (13.8.22), а если $q_2 \geq 1$, то они удовлетворяют (13.8.21).

Осталось рассмотреть случай $q_1 = 1, q_2 = 0$ для f_1 . Для того чтобы получить (13.8.21), необходимо доказать, что

$$e^{-\lambda_0 s} \frac{\partial f_1}{\partial(x, u)} = O(e^{-\gamma_0(\tau-s)} e^{-\bar{\lambda} s}),$$

а это следует из (13.8.14) и (13.8.12), так как $f_1 = f_{11}x + f_{12}u$ и f_{1i} обращаются в нуль при $(y, v) = 0$ [см. (13.8.2)].

Мы доказали, что производные $D_p f_i(x^{(k)}(s), u^{(k)}(s), y^{(k)}(s), v^{(k)}(s))$ удовлетворяют оценкам (13.8.21) и (13.8.22). Отметим, что для производных $x^{(k)}(s)$ и $y^{(k)}(s)$ мы используем только оценки (13.8.24), которые не зависят от выбора $K_{1,2}$ в (13.8.19). Таким образом, $\tilde{K}_1$ в (13.8.21) действительно не зависит от $K_1^{(p)}$. Единственными членами (13.8.23), которые могут внести в (13.8.22) вклад, зависящий от $K_{1,2}^{(p)}$, являются

$$\|f'_{2u}\| \cdot \|D_p u^{(k)}(s)\| \text{ и } \|f'_{2v}\| \cdot \|D_p v^{(k)}(s)\|.$$

Первый член оценивается как $\delta K_2^{(p)} e^{-\lambda' s}$, где δ можно выбрать произвольно малым, уменьшая размер ε рассматриваемой окрестности седла. Второй член можно оценить [см. (13.8.14), (13.8.12) и (13.8.18)] как

$$\begin{aligned} K_2^{(p)} e^{-\gamma'(\tau-s)} \cdot (\|f'_{21v}\| \|x^{(k)}(s)\| + \|f'_{22v}\| \|u^{(k)}(s)\|) = \\ = K_2^{(p)} \cdot O(\|x^{(k)}(s)\|^2 + \|u^{(k)}(s)\|) = K_2^{(p)} \cdot O(\varepsilon e^{-\lambda' s}), \end{aligned}$$

что находится в полном соответствии с (13.8.22).

Теперь справедливость оценок (13.8.19) для следующего приближения $(x^{(k+1)}(t), u^{(k+1)}(t), y^{(k+1)}(t), v^{(k+1)}(t))$ следует из (13.8.21), (13.8.22) точно таким же образом, как справедливость (13.8.12) следует из (13.8.16) и (13.8.17).

Это завершает доказательство леммы 13.5.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В точности повторяя процедуру, аналогичную приведенной в приложении В части I для траекторий вблизи седловой неподвижной точки диффеоморфизма, можно также доказать, что

$$\|\xi_{1,2}\|_{C^{r-1}} = o(e^{-\lambda_0 \tau}), \quad \|\eta_{1,2}\|_{C^{r-1}} = o(e^{-\gamma_0 \tau}), \quad (13.8.27)$$

и эта оценка также верна при $r = 2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Напомним, что когда система гладко ($\mathbb{C}^r$) зависит от некоторых параметров, преобразование координат, которое приводит систему к виду (13.8.1) и (13.8.2), зависит от параметров $\mathbb{C}^{r-2}$ -гладко (точнее, оно имеет непрерывные производные по всем переменным и параметрам вплоть до порядка $(r-1)$, кроме последней $(r-1)$ производной только по параметрам, которая может не существовать). В этом случае матрицы $B_{1,2}$ и $C_{1,2}$ являются $\mathbb{C}^{r-2}$ -гладкими функциями параметров.

Оценки леммы 13.5 остаются в этом случае в силе. Действительно, как видно из доказательства (сравните также с аналогичным утверждением в приложении В к части I), дополнительные q ($q \leq r-2$) дифференцирований по параметрам могут привести только к появлению коэффициента τ^q в правой части оценок (13.8.8) и (13.8.9), но этот коэффициент поглощается членами $o(e^{-\lambda \tau})$ и $o(e^{-\gamma \tau})$ при сдвиге λ и γ ближе к нулю.

Производные порядка $(r-1)$ от функций ξ и η можно оценить как $o(\tau^q e^{-\lambda_0 \tau})$ и $o(\tau^q e^{-\gamma_0 \tau})$ соответственно (доказательство точно такое же, как в приложении В). При этом $q = 0, \dots, r-2$ — число дифференцирований по параметрам; λ_0 и γ_0 в данном случае зависят от параметров таким образом, что удовлетворяются оценки (13.8.3).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Рассмотрим отдельно случай, когда неустойчивое многообразие седла одномерно. При этом нет переменных v и $y \in \mathbb{R}^1$. При помощи замены

времени систему (13.8.1) можно привести к виду

$$\begin{aligned}\dot{x} &= B_1 x + f_{11}(x, y)x + f_{12}(x, u, y)u, \\ \dot{u} &= B_2 u + f_{21}(x, y)x + f_{22}(x, u, y)u, \\ \dot{y} &= y,\end{aligned}\tag{13.8.28}$$

где все собственные числа $(\nu_1, \dots, \nu_{m_1})$ матрицы B_1 имеют одинаковую действительную часть $-\nu < 0$ и все собственные числа $(\nu_{m_1+1}, \dots, \nu_m)$ матрицы B_2 лежат слева от линии $\operatorname{Re}(\cdot) = -\nu'' < -\nu$. $\mathbb{C}^{r-1}$ -гладкие функции f_{ij} должны удовлетворять

$$f_{i1}(x, 0) \equiv 0, \quad f_{1j}(0, 0, y) \equiv 0.\tag{13.8.29}$$

Лемма 13.5 показывает, что решение краевой задачи имеет вид

$$\begin{aligned}y_0 &= e^{-\tau} y_1, \\ x_1 &= e^{B_1 \tau} x_0 + \xi_1(x_0, u_0, y_1, \tau), \\ u_1 &= \xi_2(x_0, u_0, y_1, \tau),\end{aligned}\tag{13.8.30}$$

где

$$\|\xi_1\|_{\mathbb{C}^{r-2}} = o(e^{-\tilde{\nu}\tau}), \quad \|\xi_2\|_{\mathbb{C}^{r-2}} = o(e^{-\nu'\tau}).\tag{13.8.31}$$

При этом

$$\nu < \nu' < \min\{2\nu, \nu''\}, \quad \nu < \tilde{\nu} < \min\{\nu', \nu + 1\}.\tag{13.8.32}$$

Оценки (13.8.27) можно записать следующим образом:

$$\|\xi_{1,2}\|_{\mathbb{C}^{r-1}} = o(e^{-\nu\tau}).\tag{13.8.33}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Можно получить немного более точные оценки для функций $\xi_{1,2}$ в (13.8.30). А именно пусть

$$\bar{\xi}_{1,2}(u_0, y_1, \tau) = \xi_{1,2}(0, u_0, y_1, \tau).\tag{13.8.34}$$

Функции $\bar{\xi}_{1,2}$ удовлетворяют более сильным оценкам, чем $\xi_{1,2}$ соответственно. Действительно, мы имеем

$$\|\bar{\xi}_1\|_{\mathbb{C}^{r-2}} = o(e^{-\bar{\nu}\tau}), \quad \|\bar{\xi}_2\|_{\mathbb{C}^{r-2}} = o(e^{-\hat{\nu}\tau}),\tag{13.8.35}$$

для $\bar{\nu}$ и $\hat{\nu}$ таких, что

$$\nu < \hat{\nu} < \min\{\nu'', 2(1 + \nu)\}, \quad \nu < \bar{\nu} < \min\{\nu'', 1 + \nu\}.\tag{13.8.36}$$

Для доказательства отметим, что $\bar{\xi}_1 = x(\tau)$ и $\bar{\xi}_2 = u(\tau)$, где $(x(t), u(t), y(t))$ — решение краевой задачи $\{x(0) = 0, u(0) = u_0, y(\tau) = y_1\}$ для системы (13.8.28). Оно удовлетворяет системе интегральных уравнений (см. (13.8.11)):

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t e^{B_1(t-s)} f_1(x(s), u(s), y_1 e^{s-\tau}) ds, \\ u(t) &= e^{B_2 t} u_0 + \int_0^t e^{B_2(t-s)} f_2(x(s), u(s), y_1 e^{s-\tau}) ds, \end{aligned} \quad (13.8.37)$$

которую можно решить методом последовательных приближений, начиная с $(x, u)(t) = 0$. Можно проверить (таким же способом, как была доказана лемма 13.5), что каждое последовательное приближение удовлетворяет неравенствам

$$\|x(t)\|_{C^{r-2}} \leq K_1 e^{-\bar{\nu}t}, \quad \|u(t)\|_{C^{r-2}} \leq K_2 e^{-\bar{\nu}t} \quad (13.8.38)$$

при всех $t \in [0, \tau]$, с некоторой постоянной K , одинаковой для каждого шага приближения. Таким образом, предел приближений удовлетворяет этим же неравенствам, и это дает (13.8.35) (см. комментарии к неравенствам (13.8.12)).

ГЛАВА 14

Безопасные и опасные границы устойчивости

Материал, представленный в этой книге до настоящего момента, включает теоретические основы анализа двух типов установившихся режимов: стационарных состояний и автоколебаний. Математическим образом первого является устойчивое состояние равновесия, а второго — устойчивая периодическая орбита. Теоретически наблюдаемое состояние системы, которое связано с положением представляющей точки в фазовом пространстве, не обязательно расположено точно в состоянии равновесия или на периодической орбите, но может быть бесконечно близко к ним¹. Необходимо также принимать во внимание возможные изменения параметров системы. Если параметр меняется достаточно медленно, то представляющая точка способна повторить эволюцию предельного режима внутри области устойчивости. Однако при изучении конкретной динамической системы и при выборе значений параметра необходимо заботиться не только о выполнении требования устойчивости, но и о других проблемах. Например, может оказаться, что оптимальные условия работы устройства отвечают границе его области устойчивости. Кроме того, параметры системы могут сами по себе квазистационарно двигаться в сторону границы устойчивости. Переход через эту границу может привести к очень нетривиальной динамике. Такая ситуация называется «на границе хаоса». Чтобы понять, что здесь может происходить, мы ставим основной вопрос этой последней главы: «Каким образом представляющая точка ведет себя при пересечении границы области устойчивости?»

¹Процесс сходимости к предельному состоянию называется переходным режимом. Формально нельзя провести четкую границу между переходным процессом и его предельным режимом. Тем не менее интуитивное понимание этой границы в каждой специфической области нелинейной динамики обычно не вызывает затруднений.

14.1. Основные границы области устойчивости состояний равновесия и периодических орбит

Чтобы ответить на этот вопрос, мы сначала перечислим основные главные типы границ областей устойчивости состояний равновесия и периодических орбит. Чтобы это сделать, мы должны систематически классифицировать информацию, полученную в предыдущих главах. Мы уделим особое внимание признакам, которые выделяют границы каждого типа.

Рассмотрим p -параметрическое семейство n -мерных систем вида

$$\dot{x} = X(x, \varepsilon), \quad \varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p). \quad (14.1.1)$$

Допустим, что система имеет состояние равновесия (для простоты, в начале координат, т. е. $X(0, \varepsilon) = 0$). Основными границами области устойчивости состояния равновесия в пространстве параметров $\mathbb{R}^p$ являются две поверхности коразмерности один, на которых состояние равновесия становится

(1) седло-узлом:

$$\begin{aligned} X(0, \varepsilon) = 0, \quad \Delta_n(\varepsilon) = 0, \\ \Delta_1(\varepsilon) > 0, \dots, \Delta_{n-1}(\varepsilon) > 0, \quad l_2(\varepsilon) \neq 0, \end{aligned}$$

где $\Delta_i(\varepsilon)$ — i -й минор Рауса–Гурвица, а $l_2(\varepsilon)$ — первая ляпуновская величина;

(2) слабым фокусом:

$$\begin{aligned} X(0, \varepsilon) = 0, \quad \Delta_{n-1}(\varepsilon) = 0, \\ \Delta_1(\varepsilon) > 0, \dots, \Delta_{n-2}(\varepsilon) > 0, \quad \Delta_n(\varepsilon) > 0, \quad L_1(\varepsilon) \neq 0, \end{aligned}$$

где $L_1(\varepsilon)$ — первая ляпуновская величина.

Если система (14.1.1) обладает устойчивой периодической орбитой в некоторой области параметров, то границы области устойчивости могут быть двух принципиально разных типов, в зависимости от того, существует ли периодическая орбита на границе или нет. Если периодическая орбита существует на границе устойчивости, то задача сводится к изучению условий устойчивости соответствующей неподвижной точки отображения Пуанкаре.

Пусть

$$\Xi(\rho, \varepsilon) \equiv \rho^{n-1} + a_1(\varepsilon)\rho^{n-1} + \dots + a_{n-1}(\varepsilon) = 0 \quad (14.1.2)$$

является характеристическим уравнением линеаризованного отображения в неподвижной точке. Тогда границы устойчивости первого типа задаются следующими условиями, которые отвечают

- (1) седло-узловой периодической орбите (бифуркация складки) $\Xi(+1, \varepsilon) = 0$, $l_2(\varepsilon) \neq 0$. При этом все корни характеристического уравнения (14.1.2), кроме $\rho = +1$, должны лежать строго внутри единичной окружности;
- (2) бифуркации удвоения периода $\Xi_n(-1, \varepsilon) = 0$, $l_3(\varepsilon) \neq 0$. Корни (14.1.2), кроме $\rho = -1$, должны лежать строго внутри единичной окружности;
- (3) рождению инвариантного тора $\Xi(e^{\pm i\omega}, \varepsilon) = 0$, $\omega \neq \{0, \pi/2, 2\pi/3, \pi\}$, $L_1(\varepsilon) \neq 0$. Все корни (14.1.2), кроме $\rho_{1,2} = e^{\pm i\omega}$, должны лежать строго внутри единичной окружности.

Также имеется 4 известных типа основных границ устойчивости, на которых периодическая орбита не существует:

- (4) периодическая орбита влипает в слабый фокус через бифуркацию Андронова–Хопфа (длина периодической орбиты стремится к нулю, по мере ее приближения к моменту бифуркации). Это совпадает с условием, задающим границу состояния равновесия с парой чисто мнимых характеристических чисел, если ляпуновская величина $L_1(\varepsilon) < 0$;
- (5) периодическая орбита влипает в гомоклиническую петлю $\Gamma(\varepsilon)$ к состоянию равновесия седло-узла O_ε , и $\Gamma(\varepsilon) \notin W^{ss}(O_\varepsilon)$;
- (6) периодическая орбита влипает в гомоклиническую петлю $\Gamma(\varepsilon)$ к седловому состоянию равновесия O_ε , характеристические показатели $\lambda_1(\varepsilon), \dots, \lambda_n(\varepsilon)$ которого удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \lambda_i(\varepsilon) < 0, \quad (i = 1, \dots, n-1), \quad \lambda_n(\varepsilon) > 0 \\ \max_{1 \leq i \leq n-1} \lambda_i(\varepsilon) + \lambda_n(\varepsilon) < 0. \end{aligned}$$

Период периодических орбит в этом и в предыдущем случае неограниченно возрастает, в то время как их длина остается конечной.

- (7) Четвертая и последняя граница отвечает «катастрофе голубого неба», т. е. когда и период, и длина периодической орбиты $\mathcal{L}_\varepsilon$ стремятся к бесконечности по мере приближения к границе устойчивости. Эта граница выделяется существованием седло-узловой периодической орбиты $\mathcal{L}^*$ при условии, что все траектории неустойчивого множества $W^u(\mathcal{L}^*)$ возвращаются к $\mathcal{L}^*$ при $t \rightarrow +\infty$, где $W^u(\mathcal{L}^*) \cap W^{ss}(\mathcal{L}^*) = \emptyset$. Траектории в $W^u(\mathcal{L}^*)$ задают так называемое существенное отображение f

(более подробно см. главу 12). Это отображение окружности; катастрофа голубого неба возникает при пересечении той части бифуркационной поверхности, отвечающей седло-узлу, где степень f равна нулю и $\max |f'| < 1$.

Алгоритмы компьютерного расчета для большинства этих бифуркаций (исключением является «катастрофа голубого неба») хорошо развиты; мы упомянем следующие пакеты программ, спроектированные для решения численных бифуркационных задач: LOCBIF [76], AUTO [46] и CONTENT [83].

14.2. Классификация границ областей устойчивости коразмерности один

Определение безопасных и опасных границ областей устойчивости было предложено Баутиным [24], который изучал границы устойчивости состояний равновесия.

Безопасные границы — это такие границы, пересечение которых приводит лишь к малым количественным изменениям состояния системы. Опасные границы — это такие границы, когда произвольно малые возмущения, выходящие за пределы области устойчивости, приводят к значительным и необратимым изменениям в поведении системы.

Здесь нужно отметить, что в случае безопасных границ медленный сдвиг параметров обратно внутрь области устойчивости вновь приводит систему в исходное состояние, в то время как в опасном случае это, вообще говоря, невозможно.

Очевидно, безопасные и опасные границы отличаются главным образом устойчивостью и неустойчивостью соответствующего состояния равновесия или периодической траектории на границе.

Определение 14.1. Точка ε_0 на границе устойчивости состояния равновесия O_ε называется безопасной, если O_{ε_0} асимптотически устойчиво.

Определение 14.2. Точка ε_0 на границе устойчивости периодической траектории L_ε называется безопасной, если L_{ε_0} асимптотически орбитально устойчива.

В последнем случае соответствующая неподвижная точка отображения Пуанкаре является асимптотически устойчивой.

На такой границе устойчивости состояние равновесия O_{ε_0} или периодическая траектория L_{ε_0} , которые претерпевают бифуркацию, по-прежнему

обладают областью притяжения. Таким образом, после пересечения границы малое притягивающее «облако» (размер которого зависит от того, насколько мы далеки от границы) будет наследовать устойчивость O_{ε_0} (или L_{ε_0}). Обратная эволюция параметров, которая возвращает к границе устойчивости, заставит облако вновь стянуться до точки (или периодической траектории).

В таком случае мы имеем так называемую *мягкую* потерю устойчивости. Вновь установившийся режим внутри притягивающего облака может быть либо новым состоянием равновесия, либо периодической траекторией, либо нерезонансным тором, либо даже странным аттрактором (в этом случае говорят о мгновенном рождении хаоса). Последний вариант возможен, когда O_{ε_0} имеет три нулевых собственных числа (см. [18] или [129] для систем с симметрией).

Определение 14.3. Точка ε_0 на границе устойчивости состояния равновесия O_ε называется опасной, если O_{ε_0} неустойчива по Ляпунову.

Определение 14.4. Точка ε_0 границы устойчивости периодической траектории L_ε называется опасной, если соответствующая неподвижная точка отображения Пуанкаре неустойчива по Ляпунову.

Отметим, что определения 14.2 и 14.4 относятся только к случаям, когда на границе устойчивости существует периодическая орбита.

При этом по мере приближения к границе устойчивости разворачиваются следующие сценарии: область притяжения $O_\varepsilon(L_\varepsilon)$ становится меньше и меньше, и в пределе $\varepsilon = \varepsilon_0$ вырождается в устойчивое множество $W^s(O_{\varepsilon_0})(W^s(L_{\varepsilon_0}))$. Это множество не пусто, так как, по определению, $O_{\varepsilon_0} \in W^s(O_{\varepsilon_0})(L_{\varepsilon_0} \subseteq W^s(L_{\varepsilon_0}))$. Однако оно может также состоять только из одной точки O_{ε_0} : это, например, происходит на плоскости, когда неустойчивый цикл стягивается в устойчивый фокус. В общем случае множество $W^s(O_{\varepsilon_0})(W^s(L_{\varepsilon_0}))$ может быть нетривиальным. Кроме того, в некоторых случаях оно может иметь полную размерность (размерность фазового пространства): например, если O_{ε_0} является седло-узлом.

После того как пройдена опасная точка, поведение представляющей точки может быть следующим.

- (1) Если в малой окрестности $O_{\varepsilon_0}(L_{\varepsilon_0})$ не возникает предельного множества, то представляющая точка уходит из окрестности. В таком случае мы имеем так называемую *жесткую* потерю устойчивости.
- (2) Если появляется новый аттрактор, то сохраняется возможность того, что представляющая точка все равно сможет выйти из окрестности, а не выберет один из устойчивых режимов, которые здесь возникли.

Последнее замечание отражает влияние шума, который всегда присутствует в реальных системах (кроме того, хорошо известно, что флуктуации вблизи бифуркационного порога усиливаются). Таким образом, представляющая точка может уйти от старого режима даже до того, как система достигнет опасной границы.

Из этих рассуждений следует, что вопрос о динамике системы при пересечении границы устойчивости зависит от поведения системы в критических случаях. Вот почему изучение критических случаев важно даже без последующего исследования соответствующих бифуркаций. Кроме того, в некоторых случаях (например, состояние равновесия с тремя характеристическими показателями на мнимой оси или периодическая траектория с тремя мультипликаторами на единичной окружности) полный бифуркационный анализ в принципе нереален (см. [80]).

В случае безопасных/опасных точек на границе устойчивости, где не существует периодических траекторий (случай глобальных бифуркаций), ситуация становится менее определенной и не может быть точно описана в самой общей постановке. Однако она вполне понятна в основных случаях (см. ниже).

До конца этого параграфа мы рассматриваем только безопасные и опасные границы устойчивости коразмерности один. Это позволяет нам использовать только один бифуркационный параметр. Следовательно, мы полагаем, что при $\varepsilon = 0$ система

$$\dot{x} = X(x, \varepsilon) \quad (14.2.1)$$

лежит на границе области устойчивости; когда $\varepsilon < 0$, она находится внутри области устойчивости, а когда $\varepsilon > 0$ — то вне ее.

14.2.1. Список безопасных границ

- (1) Пусть O_ε — состояние равновесия, и пусть $O_{\varepsilon=0}$ имеет пару чисто мнимых характеристических показателей. В этом случае система $X(\varepsilon)$ записывается в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \rho(\varepsilon)x - \omega(\varepsilon)y + (L_1(\varepsilon)x - \Omega_1(\varepsilon)y)(x^2 + y^2) + \dots, \\ \dot{y} &= \omega(\varepsilon)x + \rho(\varepsilon)y + (\Omega_1(\varepsilon)x + L_1(\varepsilon)y)(x^2 + y^2) + \dots, \\ \dot{z} &= (A(\varepsilon) + h(x, y, z, \varepsilon))z, \end{aligned} \quad (14.2.2)$$

где $x, y \in \mathbb{R}^1$, $z \in \mathbb{R}^{n-2}$, $\omega(0) \neq 0$, $\rho(0) = 0$, $\rho(\varepsilon)\varepsilon > 0$ при $\varepsilon \neq 0$; а собственные числа матрицы $A(\varepsilon)$ имеют отрицательные действительные части. Соответствующая граница S_1 безопасна, если ляпуновская

величина $L_1(0)$ отрицательна. Когда ε возрастает (начиная с нуля), из слабого фокуса $O_{\varepsilon=0}$ рождается единственная устойчивая периодическая траектория (см. рис. 14.2.1).

- (2) Пусть один мультипликатор периодической траектории на границе устойчивости равен -1 . Отображение Пуанкаре T на секущей к периодической траектории можно представить в виде:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \rho(\varepsilon)x + a_2(\varepsilon)x^2 + a_3(\varepsilon)x^3 + \dots, \\ \bar{y} &= (A(\varepsilon) + g(x, y, \varepsilon))y,\end{aligned}\tag{14.2.3}$$

где $x \in \mathbb{R}^1$, $y \in \mathbb{R}^{n-2}$ $\rho(0) = -1$, $|\rho(\varepsilon)| < 1$, когда $\varepsilon < 0$, $|\rho(\varepsilon)| > 1$, когда $\varepsilon > 0$, а собственные числа $A(\varepsilon)$ лежат строго внутри единичной окружности. Граница устойчивости S_2 является безопасной, если ляпуновская величина $l_2 = -a_3(0) - a_2^2(0)$ отрицательна.

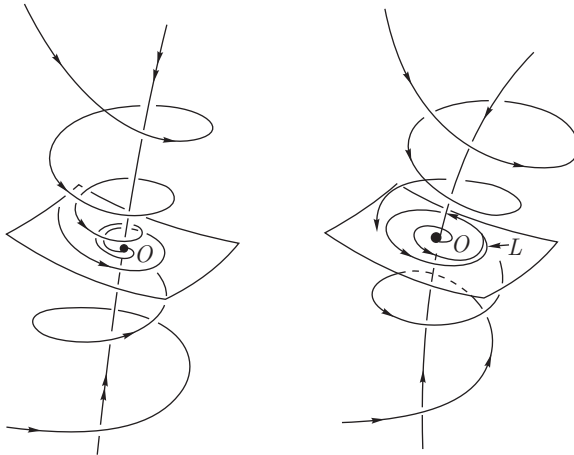


Рис. 14.2.1. На безопасной границе происходит надкритическая бифуркация Андронова–Хопфа

Из вида отображения Пуанкаре следует, что инвариантное центральное многообразие $y = 0$ в этом случае является лентой Мёбиуса, центральной линией которой выступает периодическая траектория. При $\varepsilon > 0$ рождается двухобходная периодическая траектория, которая наследует устойчивость исходной однообходной орбиты и притягивает все близкие траектории (см. рис. 14.2.2).

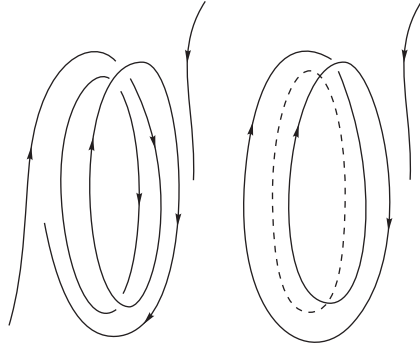


Рис. 14.2.2. Безопасная бифуркация удвоения периода

- (3) Пусть система имеет периодическую траекторию с парой мультипликаторов, равных $e^{\pm i\varphi(\varepsilon)}$, где $\varphi(0) \neq \{0, \pi/2, 2\pi/3, \pi\}$. Тогда отображение Пуанкаре записывается в виде

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \rho(\varepsilon)(x \cos \varphi(\varepsilon) - y \sin \varphi(\varepsilon)) + (L_1(\varepsilon)x - \Omega(\varepsilon)y)(x^2 + y^2) + \dots, \\ \bar{y} &= \rho(\varepsilon)(x \sin \varphi(\varepsilon) + y \cos \varphi(\varepsilon)) + (\Omega(\varepsilon)x + L_1(\varepsilon)y)(x^2 + y^2) + \dots, \\ \bar{z} &= (A(\varepsilon) + h(x, y, z, \varepsilon))z,\end{aligned}\tag{14.2.4}$$

где $x, y \in \mathbb{R}^1, z \in \mathbb{R}^{n-3}, |\rho(\varepsilon)| < 1$, когда $\varepsilon < 0$, $|\rho(\varepsilon)| > 1$, когда $\varepsilon > 0$, а собственные числа $A(\varepsilon)$ лежат строго внутри единичной окружности. В этом случае граница S_3 является безопасной при условии, что ляпуновская величина $L_1(0)$ отрицательна. По пересечении S_3 из периодической траектории рождается устойчивый двумерный инвариантный тор, «цикл теряет шкуру», как описывал эту бифуркацию Андронов (см. рис. 14.2.3). Это механизм, посредством которого осуществляется мягкий переход от автоколебаний к модуляциям в виде биений.

- (4) В этом случае пределом периодической траектории $\mathcal{L}_\varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ является гомоклинический цикл Γ^* , состоящий из простого седло-узловое равновесия и его сепаратрисы, см. рис. 14.2.4. Мы также предполагаем, что Γ^* является гладкой кривой (т.е. гомоклиническая траектория не лежит в неведущем многообразии седло-узла). Данная граница устойчивости S_4 является безопасной, т.к. кривая Γ^* устойчива (она притягивает каждую траекторию из своей малой окрестности). После бифуркации, когда $\varepsilon > 0$, возникает стационарный режим, отвечающий устойчивому состоянию равновесия.

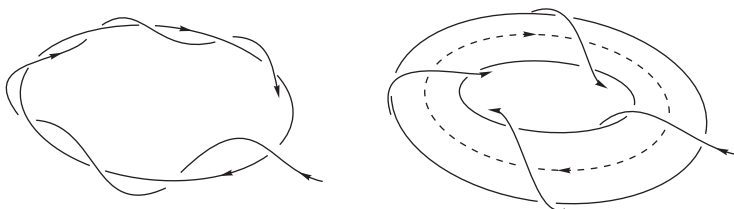


Рис. 14.2.3. Мягкое рождение инвариантного тора

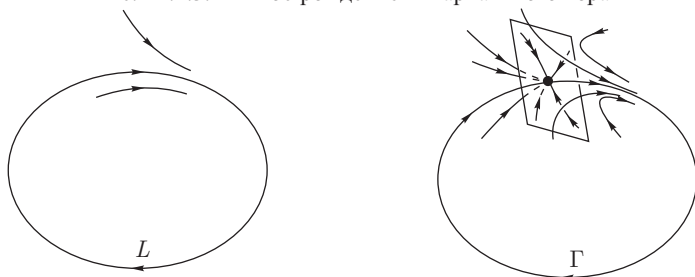


Рис. 14.2.4. Исчезновение устойчивого цикла может привести к появлению седло-узла с гомоклинической траекторией

- (5) Еще одна (коразмерности один) граница устойчивости периодических траекторий отвечает «катастрофе голубого неба» [152]. Она может возникать в n -мерных системах, где $n \geq 3$.

В этом случае топологический предел периодического движения $\mathcal{L}_\varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow -0$ содержит не точку равновесия, а периодическую траекторию $\mathcal{L}^*$ седло-узлов типа, которая исчезает при $\varepsilon < 0$. Траектория $\mathcal{L}^*$ является простым седло-узлом в том смысле, что она имеет только один мультипликатор, равный 1, и первая ляпуновская величина не равна нулю.

Для того чтобы определить границу устойчивости S_5 , необходимы следующие условия общего положения: обозначим неустойчивое множество $\mathcal{L}^*$ через $W_{\mathcal{L}^*}^u$. Оно локально гомеоморфно полуцилиндру $\mathbb{R}^1 \times S^1$. Мы полагаем, что все траектории в $W_{\mathcal{L}^*}^u$ стремятся к $\mathcal{L}^*$ при $t \rightarrow +\infty$ и ни одна не лежит в сильно устойчивом подмножестве $W_{\mathcal{L}^*}^{ss}$, т.е. $W_{\mathcal{L}^*}^{ss} \cap W_{\mathcal{L}^*}^u = \emptyset$. Дополнительно необходимо также, чтобы $W_{\mathcal{L}^*}^u$ подходило к $\mathcal{L}^*$ со стороны узловой области таким образом, как показано на рис. 14.2.5; кроме того, налагаются некоторые количественные ограничения, влекущие поперечное сжатие (более подробно см. параграф 12.4).

Граница S_5 является безопасной; когда $\varepsilon > 0$, периодическая орбита $\mathcal{L}^*$ разваливается на две: устойчивую $\mathcal{L}_\varepsilon^+$ и седловую $\mathcal{L}_\varepsilon^-$. Новый устойчивый предельный режим, таким образом, — это $\mathcal{L}_\varepsilon^+$.

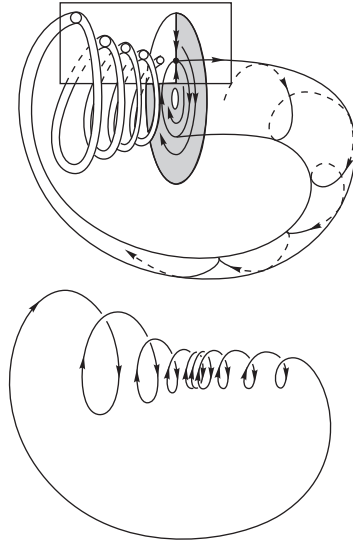


Рис. 14.2.5. Схема катастрофы голубого неба: периодическая орбита $L(\varepsilon)$ выглядит как пружина, сжимающаяся вокруг седло-узловой цикла

14.2.2. Список опасных границ

- (6) В этом случае топологическим пределом периодической траектории $\mathcal{L}_\varepsilon$ является петля сепаратрисы $\bar{\Gamma}$, двоякоасимптотическая к седловому состоянию равновесия. При этом корни $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ характеристического уравнения в седле таковы, что $\operatorname{Re} \rho_n \leq \dots \leq \operatorname{Re} \rho_2 < 0 < \rho_1$, и седловая величина $\sigma = \operatorname{Re} \rho_2 + \rho_1$ отрицательна. Граница S_6 является опасной, потому что петля $\bar{\Gamma}$ неустойчива: некоторые траектории выходят из ее малой окрестности при $t \rightarrow \pm\infty$, см. рис. 14.2.6.
- (7) Пусть один характеристический показатель состояния равновесия O_ε обращается в нуль при $\varepsilon = 0$. Тогда систему можно представить в виде

$$\begin{aligned}\dot{x} &= R(x, \varepsilon) + f(x, y, \varepsilon)y, \\ \dot{y} &= (A(\varepsilon) + g(x, y, \varepsilon))y,\end{aligned}\tag{14.2.5}$$

где $x \in \mathbb{R}^1$, $y \in \mathbb{R}^{n-2}$, $R(0, \varepsilon) = \varepsilon$, $R_x(0, \varepsilon) = 0$. Общий случай задается условием $l_2 = R_{xx}(0, 0) \neq 0$. Поскольку мы предположили, что переход через границу начинается с отрицательных значений ε ,

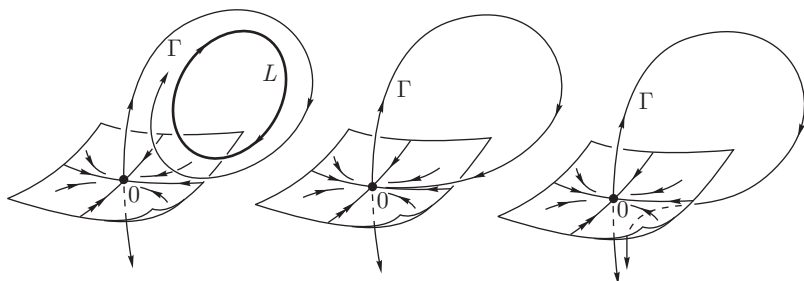


Рис. 14.2.6. Периодическая орбита превращается в гомоклиническую петлю к седлу с отрицательной седловой величиной

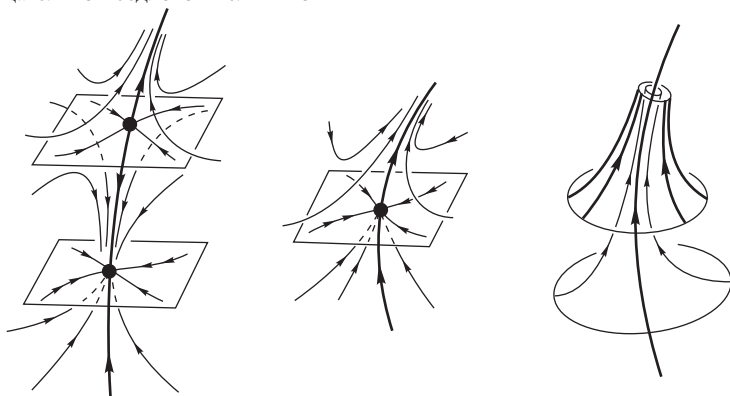


Рис. 14.2.7. Бифуркация седло-узла без гомоклинической траектории

мы имеем $l_2 > 0$. Соответствующая граница устойчивости S_7 является опасной: когда $\varepsilon \rightarrow -0$, к O_ε приближается другое состояние равновесия и сливается с ним при $\varepsilon = 0$. Когда $\varepsilon > 0$ ($R(x, \varepsilon) > 0$), седло-узел O^* исчезает и все траектории убегают, см. рис. 14.2.7.

- (8) Аналогично случаю 1, но с $L_1(0) > 0$. При $\varepsilon \rightarrow -0$ седловая периодическая траектория влипает в устойчивую точку O_ε . При переходе через $\varepsilon = 0$ состояние равновесия становится седло-фокусом с двумерным неустойчивым инвариантным многообразием через субкритическую бифуркацию Андронова–Хопфа (т. е. граница S_8 является опасной).
- (9) Этот случай такой же, как случай 2, но с $l_1 > 0$. Неустойчивость возникает, потому что седловая периодическая траектория периода два влипает в устойчивую периодическую орбиту. Когда $\varepsilon \geq 0$, последняя

становится седловой, и ее неустойчивое многообразие гомеоморфно ленте Мёбиуса.

- (10) То же самое, что и в случае 3, но $L_1(0) > 0$. Устойчивая периодическая орбита становится неустойчивой, когда неустойчивый двумерный инвариантный тор влипает в нее. Когда $\varepsilon \geq 0$, неустойчивое инвариантное многообразие W^u периодической траектории имеет размерность 3.
- (11) Пусть один мультипликатор периодической траектории $\mathcal{L}_\varepsilon$ становится равным $+1$ при $\varepsilon = 0$. Соответствующее отображение Пуанкаре можно представить в виде:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x + R(x, \varepsilon) \\ \bar{y} &= (A(\varepsilon) + g(x, y, \varepsilon))y,\end{aligned}\tag{14.2.6}$$

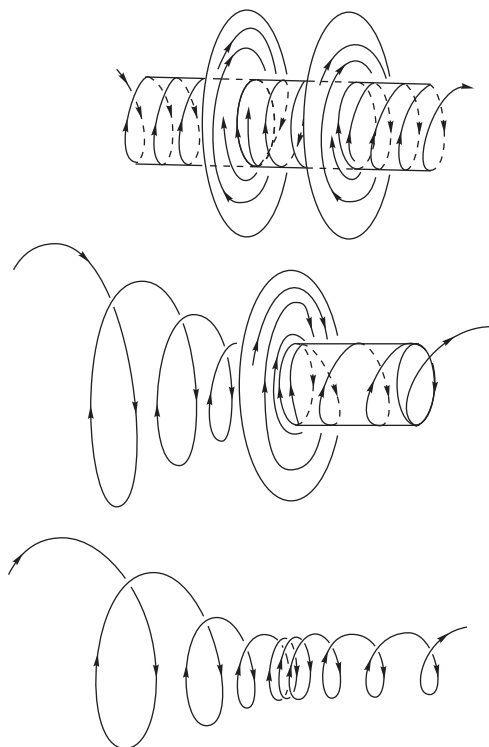
где $x \in \mathbb{R}^1$, $y \in \mathbb{R}^{n-2}$. Пусть $l_2 = R_{xx}(0, 0) > 0$. Тогда граница S_{11} опасная, потому что $\mathcal{L}_\varepsilon$ сливается с седловой периодической траекторией при $\varepsilon = 0$. Траектория $\mathcal{L}^*$ в момент бифуркации имеет тип седлоузла, ее неустойчивое инвариантное многообразие W^u гомеоморфно к цилиндру $S^1 \times \mathbb{R}^+$, см. рис. 14.2.8.

Резюме. Множество основных границ устойчивости состояний равновесия состоит из поверхностей трех типов: S_1 , S_7 и S_8 . Только S_1 является безопасной; среди границ устойчивости периодических траекторий S_6 , S_9 , S_{10} , S_{11} — опасные, в то время как S_2 , S_3 , S_4 , S_5 и $\tilde{S}_1$, $\tilde{S}_2$ — безопасные (последние две отвечают докритическим бифуркации Андронова–Хопфа и бифуркации удвоения периода).

14.3. Динамически определенные и неопределенные границы областей устойчивости

В этом параграфе мы попытаемся ответить на следующий вопрос: «Куда стремится представляющая точка по пересечении границы устойчивости?» Или другими словами: «Что представляет из себя ее Ω -предельное множество?»

Ответ очевиден, когда мы имеем дело с основными безопасными границами областей устойчивости: «Представляющая точка стремится к новому устойчивому режиму, который возникает при мягкой бифуркации». Ситуация разительно отличается, когда система проходит через опасную границу: точка удаляется от прежнего режима. В этой ситуации теория локальных бифуркаций не дает ответа на вышеприведенный вопрос. Чтобы

Рис. 14.2.8. Бифуркация седло-узловой периодической орбиты в $\mathbb{R}^3$

понять, что может произойти после бифуркации, полезно ввести два подтипа границ устойчивости: *динамически определенные* и *динамически неопределенные границы* [137, 26]. Рассмотрим для начала несколько примеров.

Первый пример иллюстрирует одну из наиболее распространенных бифуркаций, которая возникает в диссипативных системах; а именно устойчивая периодическая орбита L_1 влипает в гомоклиническую петлю седла. Обозначим неустойчивые сепаратрисы седла через Γ_1 и Γ_2 . Пусть Γ_1 образует в точке бифуркации гомоклиническую петлю. Обозначим предельное множество второй сепаратрисы через $\Omega(\Gamma_2)$. В общем случае $\Omega(\Gamma_2)$ является аттрактором; например, устойчивым состоянием равновесия, устойчивой периодической траекторией или устойчивым тором и т. д. Так как непосредственно после бифуркации представляющая точка будет двигаться вдоль Γ_2 , то $\Omega(\Gamma_2)$ станет ее новым аттрактором.

Во втором примере имеется устойчивое состояние равновесия, которое сливается с седлом, образуя седло-узел. Обозначим через Γ единственную неустойчивую траекторию, покидающую седло-узел при $t \rightarrow +\infty$, а ее предельное множество — через $\Omega(\Gamma)$. Если $\Omega(\Gamma)$ является аттрактором, то представляющая точка будет стремиться к нему после того, как исчезнет седло-узел. Однако возможен также и другой сценарий, а именно когда Γ стремится к тому же седло-узлу при $t \rightarrow \pm\infty$. Тогда мы получаем ситуацию, описанную в предыдущих параграфах: устойчивая периодическая траектория, которая возникает при бифуркации из $\bar{\Gamma}$, становится для представляющей точки новым предельным режимом.

И тот и другой случай имеют много общего в том смысле, что неустойчивое множество и того и другого состояния равновесия, претерпевающего бифуркацию, является одномерным. Если неустойчивое множество критического состояния равновесия имеет большую размерность, то картина может быть совершенно иной. Рисунок 14.3.1 изображает такую ситуацию. Когда неустойчивый цикл влипает в состояние равновесия, мы имеем дилемму: представляющая точка может скачком переместиться либо к устойчивому узлу O_1 , либо к устойчивому узлу O_2 . Таким образом, эту опасную границу можно классифицировать как *динамически неопределенную*.

Рассмотрим другой гипотетический пример. Пусть двумерный диффеоморфизм при $\varepsilon = 0$ имеет фазовый портрет, который показан на рис. 14.3.2. При этом O_2 и O_3 — устойчивые неподвижные точки, а O_1 — седло. Неустойчивое множество W_O^u седло-узла O трансверсально пересекает устойчивое многообразие $W_{O_1}^s$ седла. Когда седло-узел исчезает, имеется неопределенность в выборе нового режима для представляющей точки, потому что она может стремиться либо к O_2 , либо к O_3 .

Таким образом, мы можем говорить, что граница устойчивости является *динамически определенной*, если при пересечении границы поведение представляющей точки *определено единственным образом*. Такая ситуация возникает в случае, когда неустойчивое множество W^u состояния равновесия (периодической траектории) содержит ровно один аттрактор при критическом значении параметра.

И наоборот, если выбор нового режима для представляющей точки определен неоднозначно, то мы можем утверждать, что такая граница является *динамически неопределенной*. Это возникает, если границе неустойчивого множества принадлежат по крайней мере два аттрактора. Она также должна включать седла, неустойчивые инвариантные многообразия которых разделяют области притяжения.

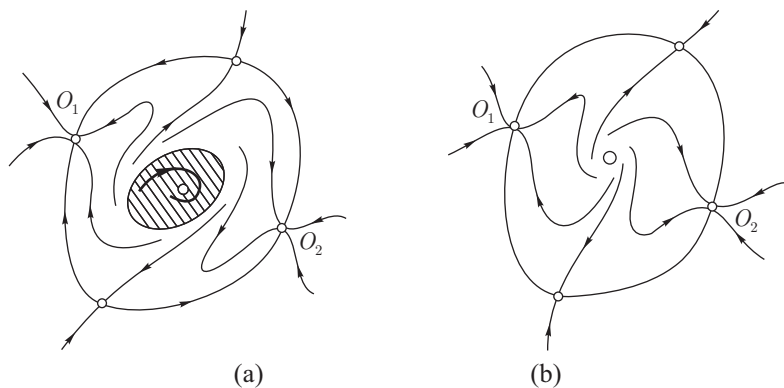


Рис. 14.3.1. Неопределенность возникает, когда неустойчивый цикл влипает в состояние равновесия в начале координат

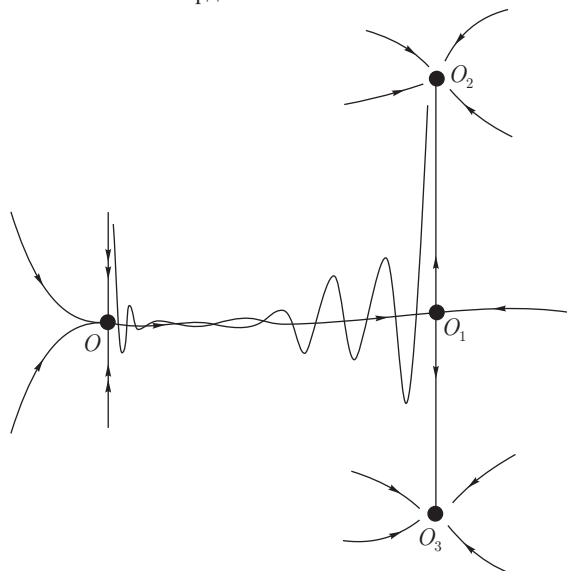


Рис. 14.3.2. Динамическая неопределенность из-за гетероклинических колебаний

Далее рассмотрим частный случай, типичный для симметричных систем. Например, рассмотрим семейство

$$\dot{x} = \varepsilon x - x^3,$$

инвариантное по отношению к $x \rightarrow -x$. Легко видеть, что граница устойчивости $\varepsilon = 0$ является безопасной для состояния равновесия в начале координат. Когда $\varepsilon > 0$, начало координат теряет свою устойчивость и ее наследуют две новые точки равновесия $O_1(x = \sqrt{\varepsilon})$ и $O_2(x = -\sqrt{\varepsilon})$. Таким образом, $\varepsilon = 0$ является динамически неопределенной безопасной границей.

Более сложный пример — уравнение маятникового типа

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, \varepsilon),$$

где $f(x, \dot{x}, \varepsilon)$ — периодическая функция по x и $f(x, \dot{x}, \varepsilon) = -f(-x, -\dot{x}, \varepsilon)$. Переход через границу области устойчивости колебательного предельного цикла в этом примере приводит к появлению двух устойчивых периодических орбит, которые охватывают цилиндр и отвечают двум противоположным направлениям вращения маятника. Здесь переход через границу происходит, когда колебательный цикл влипаёт в гетероклиническую связку между двумя седлами, как показано на рис. 14.3.3. Из рисунка видно, что такая граница является динамически неопределенной.

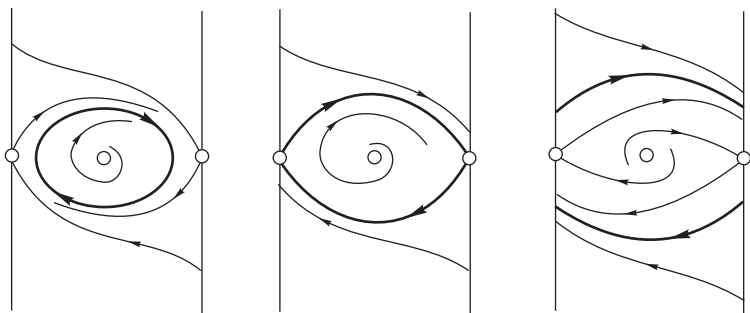


Рис. 14.3.3. Эволюция фазового цилиндра. Любой, кто катался на чертовом колесе на ярмарках, знает, каково это — находиться в самой верхней точке. В краткий момент, который кажется вечностью, нельзя сказать, в какую сторону колесо будет двигаться, когда помчится вниз: по часовой или против часовой стрелки. А.Л.Ш. лично проделал это однажды и таким образом существенно улучшил свое понимание поведения траекторий вблизи седловой точки

ПРИЛОЖЕНИЕ С

Примеры, задачи и упражнения

Мы надеемся, что примеры, представленные в этом приложении, послужат определенной педагогической иллюстрацией и одновременно продемонстрируют область применения качественной теории, изложенной в этой книге. Спектр задач колеблется от феноменологических примеров до прикладных проблем. Поскольку весьма небольшое количество нелинейных систем можно проанализировать без компьютеров, по необходимости мы будем приводить численные результаты. В этих местах наше изложение будет носить описательный характер, без технических деталей вычисления. При подготовке этого приложения были использованы два пакета программ: Content [182] и Dstool [164].

С.1. Качественное интегрирование

С.1.№1. Классифицируйте траектории, показанные на рис. 1.3.1, 1.3.2 и С.1.1, по следующим признакам: неблуждающие, устойчивые по Пуассону, периодические, гомоклинические. Каковы соответствующие α - и ω -предельные множества этих траекторий?

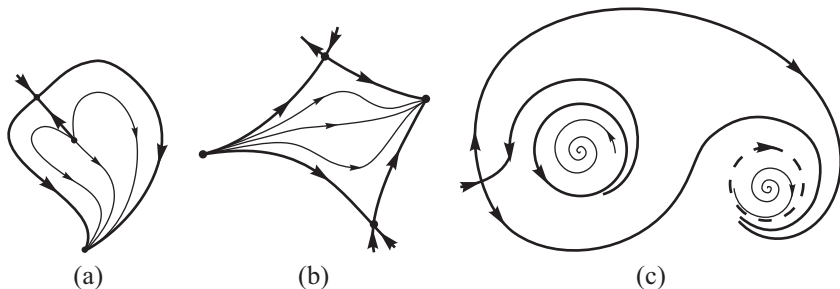


Рис. С.1.1. Примеры ячеек

С.1.№2. Постройте фазовые портреты для следующих систем на плоскости при различных значениях параметра a :

(а) $\dot{r} = r(a - r^2), \quad \dot{\varphi} = 1;$

(б)
$$\begin{cases} \dot{y} = x - (y^2 - 1) \left(\frac{x^2}{2} - y + \frac{y^3}{3} - \frac{2}{3} \right), \\ \dot{x} = 1 - y^2 - x \left(\frac{x^2}{2} - y + \frac{y^3}{3} - \frac{2}{3} \right); \end{cases}$$

(в) $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = 1 - ax^2 + y(x - 2);$

(г) уравнение Ван-дер-Поля:

$$\ddot{x} + a(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0;$$

(д) уравнение Дюффинга:

$$\ddot{x} + a\dot{x} + x - x^3 = 0;$$

(е) нормальная форма Богданова–Тakens:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + ay + x^2;$$

(ж) нормальная форма Хорозова–Тakens:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + ay + x^3.$$

□

С.1.№3. Обсудите фазовые портреты ячеек, показанных на рис. С.1.1. Какие траектории здесь особые?

С.2. Грубые состояния равновесия и границы устойчивости

С.2.1. Критерий Рауса–Гурвица

Здесь мы сформулируем правило, которое позволяет определить структурную устойчивость и топологический тип состояния равновесия, не решая характеристическое уравнение.

Основной вопрос здесь: «Сколько корней характеристического уравнения

$$\Xi(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n$$

лежит слева и справа от мнимой оси и сколько корней лежит на оси?»

Количество нулевых корней определяется легко: имеется s нулевых корней, если и только если $a_n = \dots = a_{n-s+1} = 0$ и $a_{n-s} \neq 0$. Таким образом, если мы имеем нулевой корень алгебраической кратности s , мы можем просто разделить характеристическое уравнение на λ^s и перейти к случаю, когда последний коэффициент характеристического уравнения не равен нулю, что мы и будем предполагать. На втором этапе составляется следующая матрица Рауса–Гурвица:

$$\begin{pmatrix} a_0; & & a_2; & a_4; & \dots \\ a_1; & & a_3; & a_5; & \dots \\ & \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}; & & \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}; & \dots & \dots \\ & \frac{\frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} a_3 - \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} a_1}{\frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}}; & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (\text{C.2.1})$$

Опишем алгоритм построения вышеприведенной матрицы более детально. Элементами первых двух строк служат коэффициенты $\Xi(\lambda)$ с четными и нечетными нижними индексами соответственно. K -ая строка строится следующим образом: член r_{kj} в j -ом столбце равен дроби

$$r_{kj} = \frac{r_{k-1,1} r_{k-2,j+1} - r_{k-2,1} r_{k-1,j+1}}{r_{k-1,1}},$$

числитель которой равен минус детерминанту матрицы (2×2) на пересечении двух предыдущих строк с первым столбцом и $(j+1)$ -ым столбцом, в то время как знаменателем служит член, расположенный в первом столбце предыдущей строки. Алгоритм применяется последовательно, пока общее количество строк матрицы не станет равным $(n+1)$.

Такое построение возможно, только если все члены первого столбца не равны нулю. Это *стандартный* случай. При этом количество корней $\Xi(\lambda)$ (считая с кратностями) с положительными действительными частями равно количеству q перемен знаков в первом столбце. Полином $\Xi(\lambda)$ в стандартном случае не имеет чисто мнимых корней. Таким образом, соответствующее состояние равновесия O в стандартном случае является грубым, а его топологический тип равен $(n-q, q)$.

Можно проверить, что первый столбец в (С.2.1) можно выразить через главные миноры Δ_i матрицы Рауса–Гурвица (2.1.10) следующим образом:

$$a_0, \quad \Delta_1, \quad \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \quad \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \dots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}.$$

В частности, если $a_0 > 0$ и $\Delta_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), то выполнено условие Рауса–Гурвица (см. параграф 2.1).

При построении матрицы (С.2.1) может оказаться, что некоторые члены $r_{m+1,1}$ ($1 \leq m \leq n$) первого столбца обращаются в нуль. В таком *нестандартном* случае необходимо найти первый не равный нулю член $r_{m+1,k+1}$ в $(m+1)$ -ой строке, а также последние не нулевые члены $r_{m,p}$ и $r_{m+1,s}$ в m -ой и $(m+1)$ -ой строках соответственно. Вычислим число недостаточности S_{m+1} по следующему правилу:

$$S_{m+1} = \begin{cases} k, & \text{если } k \leq s - p, \\ s - p, & \text{если } k > s - p \text{ и } (-1)^{s-p} r_{m,p} r_{m+1,s} < 0, \\ s - p + 1, & \text{если } k > s - p \text{ и } (-1)^{s-p} r_{m,p} r_{m+1,s} > 0. \end{cases}$$

Затем сдвинем $(m+1)$ -ую строку влево на k позиций таким образом, чтобы элемент $r_{m+1,k+1}$ стал первым, и умножим все прочие члены этого ряда на $(-1)^k$. Поскольку первый член не равен нулю, можно продолжать, как в стандартном случае. В конце концов количество корней $\Xi(\lambda)$ с положительными действительными частями будет равно количеству перемен знака в первом столбце, плюс сумма чисел недостаточности по всем нестандартным строкам.

Остается тем не менее специальный случай, когда при некотором m вся $(m+1)$ -я строка матрицы состоит из нулей, т. е. $r_{m+1,j} = 0$ при всех j . Это единственный случай, когда возможны чисто мнимые корни. Встретившись с таким случаем, следует заменить $(m+1)$ -ую строку строкой, состоящей из следующих чисел:

$$(p-1)r_{m,1}; \quad (p-2)r_{m,2}; \quad (p-3)r_{m,3}; \quad \dots,$$

где p — номер последнего не нулевого члена в m -ой строке, и действовать, как и ранее. Завершая построение (могут существовать и другие обращающиеся в нуль строки, которые также следует заменить), мы подсчитываем число перемен знака в первом столбце, плюс сумма чисел недостаточности (если были какие-либо нестандартные строки). Результат равен количеству корней с положительными действительными частями. Количество

чисто мнимых корней при этом равно $2(p - 1 - l)$, где p — порядковый номер последнего отличного от нуля члена в строке, которая предшествует первой нулевой строке, а l — количество перемен знака в первом столбце плюс сумма чисел недостаточности, рассчитанных после этой строки. Соответствующее состояние равновесия будет грубым, только если $p = l + 1$.

С.2.№4. Определите устойчивость и топологический тип состояния равновесия, характеристическое уравнение которого приведено ниже:

$$\Xi(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda^2 - 8\lambda - 20 = 0.$$

Решение. Соответствующая матрица Рауса–Гурвица задается как

$$\begin{array}{rrr} 1 & 1 & -20 \\ 2 & -8 & \\ 5 & -20 & (p = 2) \\ 5 & & (\text{нулевой член заменен на } (p - 1)r_{m,1} = 5) \\ -20 & & \end{array}$$

Здесь происходит одна переменна знака в первом столбце, т.е. $\Xi(\xi)$ имеет один корень в правой полуплоскости. Подсчитаем количество чисто мнимых корней: $2(p - 1 - l) = 2(2 - 1 - 1) = 0$. Таким образом, состояние равновесия грубое, и его топологический тип — седло (3, 1).

С.2.2. Трехмерный случай

Рассмотрим трехмерную систему

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= a_1^{(1)} y_1 + a_2^{(1)} y_2 + a_3^{(1)} y_3 + P_1(y_1, y_2, y_3), \\ \dot{y}_2 &= a_1^{(2)} y_1 + a_2^{(2)} y_2 + a_3^{(2)} y_3 + P_2(y_1, y_2, y_3), \\ \dot{y}_3 &= a_1^{(3)} y_1 + a_2^{(3)} y_2 + a_3^{(3)} y_3 + P_3(y_1, y_2, y_3), \end{aligned} \quad (\text{C.2.2})$$

где каждая функция P_i не содержит линейных членов. Характеристическое уравнение системы (С.2.2) задается как

$$\Xi(\lambda) = \begin{vmatrix} a_1^{(1)} - \lambda & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} - \lambda & a_3^{(2)} \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (\text{C.2.3})$$

Уравнение (С.2.3) можно записать в виде полинома третьей степени:

$$\lambda^3 + p\lambda^2 + q\lambda + r = 0, \quad (\text{С.2.4})$$

где

$$\begin{aligned} p &= -(a_1^{(1)} + a_2^{(2)} + a_3^{(3)}), \\ q &= \begin{vmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1^{(1)} & a_3^{(1)} \\ a_1^{(3)} & a_3^{(3)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2^{(2)} & a_3^{(2)} \\ a_2^{(3)} & a_3^{(3)} \end{vmatrix}, \\ r &= - \begin{vmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{С.2.5})$$

При этом условие устойчивости Рауса–Гурвица сводится к следующему соотношению:

$$p > 0, \quad q > 0, \quad r > 0 \quad \text{и} \quad R \equiv pq - r > 0. \quad (\text{С.2.6})$$

Границами области устойчивости являются две поверхности вида ($r = 0$, $p > 0, q > 0$) и ($R = 0, p > 0, q > 0$). Характеристическое уравнение имеет по крайней мере один нулевой корень на поверхности $r = 0$ и два чисто мнимых корня на поверхности ($R = 0, q > 0$).

С.2.№5. Докажите, что характеристические показатели состояния равновесия на бифуркационной поверхности $R = 0$ равны $(-p, i\sqrt{q}, -i\sqrt{q})$.

Количество действительных корней уравнения (С.2.4) зависит от знака дискриминанта уравнения третьей степени:

$$\Delta = -p^2q^2 + 4p^3r + 4q^3 - 18pqr + 27r^2. \quad (\text{С.2.7})$$

- (1) Если $\Delta > 0$, уравнение третьей степени имеет один действительный корень и два комплексно-сопряженных.
- (2) Если $\Delta < 0$, уравнение третьей степени имеет три разных действительных корня.
- (3) Когда $\Delta = 0$, уравнение имеет один действительный корень кратности 3, если $q = \frac{1}{3}p^2$ и $r = \frac{1}{27}p^3$, и два действительных корня (один кратности 2) в противном случае.

Уравнение $\Delta = 0$ можно преобразовать следующим образом:

$$r = \frac{1}{3}pq - \frac{2}{27}p^3 \pm \frac{2}{27}(p^2 - 3q)^{3/2}, \quad q \leq \frac{p^2}{3}.$$

Таким образом, все три корня характеристического уравнения действительны тогда и только тогда, когда

$$q \leq \frac{p^2}{3} \text{ и } r^-(p, q) \leq r \leq r^+(p, q), \quad (\text{C.2.8})$$

где мы обозначаем

$$r^\pm = \frac{1}{3}pq - \frac{2}{27}p^3 \pm \frac{2}{27}(p^2 - 3q)^{3/2}.$$

Когда топологически состояние равновесия является седлом, условие (C.2.8) различает случаи простого седла и седло-фокуса. Однако когда равновесие является устойчивым или вполне неустойчивым, наличие комплексных характеристических корней не обязательно означает, что это фокус. Действительно, если ближайший к мнимой оси (т.е. ведущий) характеристический корень является действительным, устойчивое (или вполне неустойчивое) состояние равновесия есть узел, вне зависимости от значений других характеристических корней.

Граница между действительными и комплексными характеристическими корнями образована частью поверхности $\Delta = 0$, которая соответствует двукратным корням, и поверхностью

$$r = \frac{p}{3} \left(q - \frac{2p^2}{9} \right), \quad q \geq \frac{p^2}{3}, \quad (\text{C.2.9})$$

которая примыкает к поверхности $\Delta = 0$ вдоль линии тройных корней. Эта поверхность соответствует существованию пары комплексно-сопряженных корней, действительные части которых равны третьему корню. Когда мы пересекаем эту поверхность в направлении возрастания $|r|$, эта пара передвигается дальше от мнимой оси, чем действительный корень, и состояние равновесия становится узлом. С другой стороны от этой поверхности комплексно-сопряженная пара ближе к мнимой оси, чем действительный корень, следовательно, состояние равновесия становится фокусом.

При изучении гомоклинических бифуркаций важной характеристикой седловых равновесий является знак *седловой величины* σ , определяемой как сумма действительных частей двух ведущих характеристических показателей, ближайших к мнимой оси слева и справа.

В случае седла, когда оба ведущих показателя $\lambda_{1,2}$ действительны, условие $\sigma = 0$ есть резонансное соотношение $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Это условие выписывается через коэффициенты характеристического уравнения третьей степени как

$$R \equiv pq - r = 0, \quad -p^2 < q < 0. \quad (\text{C.2.10})$$

Отметим, что, когда $q > 0$, поверхность $R = 0$ отвечает бифуркации Андронова–Хопфа, в то время как часть поверхности, где $q < -p^2$, отвечает обращающейся в нуль сумме ведущего показателя и неведущего с противоположным знаком.

В случае седло-фокуса трехмерной системы условие $\sigma = 0$ читается как $\lambda_1 + \text{Re}\lambda_2 = 0$, где λ_1 является действительным корнем, а $\lambda_{2,3}$ — пара комплексно-сопряженных корней. Это можно записать как

$$r = -p(q + 2p^2), \quad -p^2 < q. \quad (\text{C.2.11})$$

При пересечении этой поверхности в направлении роста r , седловая величина становится положительной.

Другая важная характеристика седловых равновесий трехмерных систем — *дивергенция* векторного поля в состоянии равновесия. Она равна сумме характеристических корней, т. е. $-p$.

Подводя итоги, мы можем классифицировать грубые состояния равновесия в $\mathbb{R}^3$ следующим образом:

- (1) случай $p > 0$ ($\text{div} < 0$) (см. таблицу С. 1);
- (2) случай $p < 0$ ($\text{div} > 0$) (см. таблицу С. 2);
- (3) случай $p = 0$ ($\text{div} = 0$) (см. таблицу С. 3).

С.2.№6. Нарисуйте соответствующие бифуркационные диаграммы на плоскости (q, r) при постоянном p .

Рассмотрим далее несколько примеров: систему Лоренца, цепь Чуа, модель Шимицу–Мориока и некоторые другие.

Цепь Чуа [179] задается как

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - f(x)), \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -by, \end{aligned} \quad (\text{C.2.12})$$

с нелинейностью третьей степени $f(x) = -x/6 + x^3/6$. При этом a и b — некоторые положительные параметры. Система (С.2.12) инвариантна относительно преобразования $(x, y, z) \leftrightarrow (-x, -y, -z)$.

Найдем состояния равновесия в (С.2.12), решив следующую систему:

$$\begin{aligned} 0 &= a(y + x/6 - x^3/6), \\ 0 &= x - y + z, \\ 0 &= -by. \end{aligned}$$

Из этих уравнений мы находим $y = 0$, $x = 0$ и $x(1 - x^2) = 0$. Таким образом, всегда имеется три состояния равновесия: $O(0, 0, 0)$ и $O_{1,2}(\pm 1, 0, \mp 1)$. Матрица Якоби в начале координат имеет вид

$$\begin{bmatrix} a/6 & a & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -b & 0 \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение в $O(0, 0, 0)$

$$\det \begin{bmatrix} a/6 - \lambda & a & 0 \\ 1 & -1 - \lambda & 1 \\ 0 & -b & -\lambda \end{bmatrix} = 0$$

или

$$\lambda^3 + (1 - a/6)\lambda^2 + (b - 7a/6)\lambda - ab/6 = 0. \quad (\text{С.2.13})$$

Поскольку постоянный член отрицателен, из критерия Рауса–Гурвица прямо следует, что начало координат является неустойчивым состоянием равновесия. Более того, при нулевых a и b оно не может иметь нулевых характеристических корней. Точку ($a = b = 0$) коразмерности 2 необходимо рассмотреть особо. Мы относим этот анализ в последний параграф, в котором мы рассматриваем бифуркации двух нулей в системах с симметрией.

Условие $R \equiv pq - r = 0$ читается как

$$b = 7a/6 - 7a^2/36.$$

Мы имеем $q = -7a^2/36 < 0$ при $R = 0$. Это означает, что точка в начале координат не может иметь чисто мнимых характеристических показателей. Таким образом, она всегда грубая при $(a, b) \neq 0$. В соответствии с вышеприведенной классификационной таблицей, она является топологическим седлом с двумерным устойчивым многообразием и одномерным неустойчивым однообразием.

Таблица С.1

Область параметров	Типы равновесия	σ	Собственные числа $\lambda_i, i = 1, 2, 3$
$0 < r < \begin{cases} r^+(p, q) \\ \frac{p}{3} \left(q - \frac{2p^2}{9} \right) \end{cases}$ при $0 < q \leq \frac{p^2}{3}$ при $q \geq \frac{p^2}{3}$	Устойчивый узел $\dim W^s = 3$ $\dim W^u = 0$	—	$0 > \lambda_1 > \operatorname{Re} \lambda_i$ ($i = 2, 3$)
$pq > r > \begin{cases} r^+(p, q) \\ \frac{p}{3} \left(q - \frac{2p^2}{9} \right) \end{cases}$ при $0 < q \leq \frac{p^2}{3}$ при $q \geq \frac{p^2}{3}$	Устойчивый фокус $\dim W^s = 3$ $\dim W^u = 0$	—	$0 > \operatorname{Re} \lambda_{1,2} > \lambda_3$
$r > \begin{cases} r^+(p, q) \\ pq \end{cases}$ при $q \leq 0$ при $q \geq 0$	Седло-фокус (1,2)	$\sigma < 0$	$\operatorname{Re} \lambda_{2,3} > 0 > \lambda_1$
$0 < r < r^+(p, q), q < 0$	Седло $\dim W^s = 1$ $\dim W^u = 2$	$\sigma < 0$	$\lambda_1 < 0 < \lambda_2 < \lambda_3$
$0 > r > \begin{cases} r^-(p, q) \\ pq \end{cases}$ при $q \leq -p^2$ при $-p^2 \leq q < 0$	Седло $\dim W^s = 2$ $\dim W^u = 1$	$\sigma > 0$	$\lambda_1 > 0 > \lambda_2 > \lambda_3$
$r^-(p, q) < r < \begin{cases} pq \\ 0 \end{cases}$ при $-p^2 < q \leq 0$ при $0 \leq q < \frac{p^2}{4}$	Седло $\dim W^s = 2$ $\dim W^u = 1$	$\sigma < 0$	$\lambda_1 > 0 > \lambda_2 > \lambda_3$
$-p(q + 2p^2) < r < \begin{cases} r^-(p, q) \\ 0 \end{cases}$ при $-p^2 < q \leq \frac{p^2}{4}$ при $q \geq \frac{p^2}{4}$	Седло-фокус (2,1)	$\sigma < 0$	$\lambda_1 > 0 > \operatorname{Re} \lambda_{2,3}$
$r < \begin{cases} r^-(p, q) \\ -p(q + 2p^2) \end{cases}$ при $q \leq -p^2$ при $q \geq -p^2$	Седло-фокус (2,1)	$\sigma > 0$	$\lambda_1 > 0 > \operatorname{Re} \lambda_{2,3}$

Таблица С.2

Область параметров	Типы равновесия	σ	Собственные числа $\lambda_i, i = 1, 2, 3$
$0 > r > \begin{cases} r^-(p, q) \\ \frac{p}{3} \left(q - \frac{2p^2}{9} \right) \end{cases}$ при $0 < q \leq \frac{p^2}{3}$ при $q \geq \frac{p^2}{3}$	Неустойчивый узел $\dim W^s = 0$ $\dim W^u = 3$	—	$0 < \lambda_1 < \operatorname{Re} \lambda_i$ ($i = 2, 3$)
$pq < r < \begin{cases} r^-(p, q) \\ \frac{p}{3} \left(q - \frac{2p^2}{9} \right) \end{cases}$ при $0 < q \leq \frac{p^2}{3}$ при $q \geq \frac{p^2}{3}$	Неустойчивый фокус $\dim W^s = 0$ $\dim W^u = 3$	—	$0 < \operatorname{Re} \lambda_{1,2} < \lambda_3$
$r < \begin{cases} r^-(p, q) \\ pq \end{cases}$ при $q \leq 0$ при $q \geq 0$	Седло-фокус (2, 1)	$\sigma > 0$	$\operatorname{Re} \lambda_{2,3} < 0 < \lambda_1$
$0 > r > r^-(p, q), q < 0$	Седло $\dim W^s = 2$ $\dim W^u = 1$	$\sigma > 0$	$\lambda_1 > 0 > \lambda_2 > \lambda_3$
$0 < r < \begin{cases} r^+(p, q) \\ pq \end{cases}$ при $q \leq -p^2$ при $-p^2 \leq q < 0$	Седло $\dim W^s = 1$ $\dim W^u = 2$	$\sigma < 0$	$\lambda_1 < 0 < \lambda_2 < \lambda_3$
$r^+(p, q) > r > \begin{cases} pq \\ 0 \end{cases}$ при $-p^2 < q \leq 0$ при $0 \leq q < \frac{p^2}{4}$	Седло $\dim W^s = 1$ $\dim W^u = 2$	$\sigma > 0$	$\lambda_1 < 0 < \lambda_2 < \lambda_3$
$-p(q + 2p^2) > r > \begin{cases} r^+(p, q) \\ 0 \end{cases}$ при $q \in \left(-p^2, \frac{p^2}{4} \right)$ при $q \geq \frac{p^2}{4}$	Седло-фокус (1, 2)	$\sigma > 0$	$\lambda_1 < 0 < \operatorname{Re} \lambda_{2,3}$
$r > \begin{cases} r^+(p, q) \\ -p(q + 2p^2) \end{cases}$ при $q \leq -p^2$ при $q \geq -p^2$	Седло-фокус (1, 2)	$\sigma < 0$	$\lambda_1 < 0 < \operatorname{Re} \lambda_{2,3}$

Таблица С.3

Область параметров	Тип равновесия	Собственные числа $\lambda_i, i = 1, 2, 3$	Размерность W^s и W^u
$0 < r < \frac{2}{9}\sqrt{3} q ^{3/2}, q < 0$	Седло	$\lambda_1 < 0 < \lambda_2 < \lambda_3$	$\dim W^s = 1$ $\dim W^u = 2$
$r > \begin{cases} \frac{2}{9}\sqrt{3} q ^{3/2} & \text{при } q \leq 0 \\ 0 & \text{при } q \geq 0 \end{cases}$	Седло-фокус (1,2)	$\lambda_1 < 0 < \operatorname{Re}\lambda_{2,3}$	$\dim W^s = 1$ $\dim W^u = 2$
$r < \begin{cases} -\frac{2}{9}\sqrt{3} q ^{3/2} & \text{при } q \leq 0 \\ 0 & \text{при } q \geq 0 \end{cases}$	Седло-фокус (2,1)	$\operatorname{Re}\lambda_{2,3} < 0 < \lambda_1$	$\dim W^s = 2$ $\dim W^u = 1$
$0 > r > -\frac{2}{9}\sqrt{3} q ^{3/2}, q < 0$	Седло	$\lambda_1 > 0 > \lambda_2 > \lambda_3$	$\dim W^s = 2$ $\dim W^u = 1$

С.2.№7. В плоскости параметров (a, b) найдите границу перехода седло $\rightarrow$ седло-фокус для начала координат и найдите уравнения для его линейных устойчивых и неустойчивых подпространств. Определите кривые в плоскости параметров, которые отвечают обращению в нуль седловой величины σ для состояния равновесия в начале координат. Найдите, где дивергенция векторного поля в седло-фокусе обращается в нуль. Постройте найденные кривые на плоскости (a, b) .

Рассмотрим далее устойчивость нетривиального равновесия $O_{1,2}(\pm 1, 0, \mp 1)$. Сначала мы линеаризуем систему либо в O_1 , либо в O_2 . Соответствующая матрица Якоби задается как

$$\begin{bmatrix} -a/3 & a & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -b & 0 \end{bmatrix}.$$

Характеристический полином имеет вид

$$\lambda^3 + (1 + a/3)\lambda^2 + (b - 2a/3)\lambda + ab/3 = 0. \quad (\text{С.2.14})$$

Как и O , равновесия $O_{1,2}$ не могут иметь нулевых характеристических показателей при $ab \neq 0$. Условие $R = 0$ читается как

$$b = 2/9a(3 + a).$$

Эта бифуркационная граница построена на рис. С.2.1. Мы имеем здесь $q = 2a^2/9 > 0$. Таким образом, при $R = 0$ равновесия $O_{1,2}$ имеют пару чисто мнимых характеристических показателей, а именно

$$\lambda_{1,2} = \pm i \frac{a\sqrt{2}}{3} \text{ и } \lambda_3 = -(1 + a/3)$$

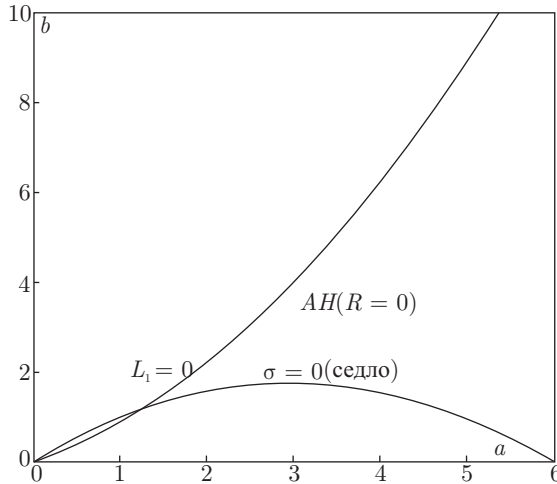


Рис. С.2.1. Часть бифуркационной диаграммы цепи Чуа; AH обозначает кривую бифуркации Андронова–Хопфа; $\sigma = 0$ отвечает обращению в нуль седловой величины, когда начало координат является седлом. В точке $L_1 = 0$ меняет знака ляпуновская величина на кривой AH

в момент бифуркации Андронова–Хопфа. Когда $R > 0$, равновесия $O_{1,2}$ являются устойчивыми фокусами, а когда $R < 0$, они являются седло-фокусами (1, 2). Устойчивость $O_{1,2}$ в критическом случае зависит от того, является ли соответствующая бифуркация Андронова–Хопфа до- или надкритической (см. параграфы 9.3 и 11.5), т. е. является ли слабый фокус $O_{1,2}$ устойчивым или неустойчивым. Чтобы различать эти случаи, нам нужно определить знак первой ляпуновской величины L_1 . Когда $L_1 < 0$, $O_{1,2}$ устойчива, и она неустойчива, если $L_1 > 0$. Если ляпуновская величина обращается в нуль на кривой бифуркации Андронова–Хопфа, необходимо вычислить знак следующей ляпуновской величины L_2 , и т. д (см. ниже).

Рассмотрим классическую систему Лоренца [87]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma(x - y), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy,\end{aligned}\tag{C.2.15}$$

где σ, r и b — положительные параметры; кроме того, мы также будем полагать, что $\sigma > b + 1$. Отметим, что эта система инвариантна относительно инволюции $(x, y, z) \leftrightarrow (-x, -y, z)$.

Найдем ее состояния равновесия, решив следующую систему:

$$\begin{aligned} 0 &= -\sigma(x - y), \\ 0 &= rx - y - xz, \\ 0 &= -bz + xy. \end{aligned}$$

Мы находим, что $x = y$, $x(r - 1 - z) = 0$ и $bz = x^2$. Подставляя последнее соотношение в среднее, мы приходим к уравнению для x -координаты состояний равновесия:

$$x(b(r - 1) - x^2) = 0. \quad (\text{C.2.16})$$

Как мы видим, система Лоренца всегда имеет одно состояние равновесия O в начале координат. Когда $r > 1$, помимо O существуют еще два состояния равновесия $O_{1,2}(x_{1,2} = y_{1,2} = \pm b^{1/2}(r - 1)^{1/2}, z_{1,2} = r - 1)$.

Матрица Якоби в начале координат имеет вид

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение

$$\det \begin{bmatrix} -\sigma - \lambda & \sigma & 0 \\ r & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -b - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

имеет три действительных корня

$$\lambda_1 = -b \text{ и } \lambda_{2,3} = \frac{-(\sigma + 1) \pm \sqrt{(\sigma + 1)^2 + 4\sigma(r - 1)}}{2}.$$

Таким образом, когда $r < 1$, начало координат является устойчивым состоянием равновесия. Когда $r = 1$, состояние равновесия имеет один нулевой корень. Когда $r > 1$, начало координат становится седлом с одномерным неустойчивым многообразием, а его устойчивость наследуют два устойчивых состояния равновесия $O_{1,2}$ (вопрос: почему два).

Неустойчивое многообразие W_O^u состоит из самой седловой точки и двух траекторий $\Gamma_{1,2}$, которые выходят из O при $t \rightarrow +\infty$. Устойчивое многообразие W_O^s двумерно. Ведущее устойчивое направление $\mathcal{E}_0^s$ задается собственным вектором, соответствующим наибольшему отрицательному характеристическому корню. В нашем случае это $\lambda_1 = -b$, а соответствующим собственным вектором является $(0, 0, 1)$. Отметим, что $x = y = 0$ — это инвариантная прямая в W_O^s (почему?).

С.2.№8. Найдите уравнения $\mathcal{E}_O^u$ и $\mathcal{E}_O^{ss}$ для седла в начале координат.

Проведем анализ устойчивости точек $O_{1,2}$. Мы можем выбрать любую из них, пусть это будет O_1 . Матрица Якоби для O_1 задана как

$$\begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z_1 & -1 & -x_1 \\ x_1 & y_1 & -b \end{bmatrix}.$$

Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2b\sigma(r - 1) = 0.$$

Граница устойчивости состояний равновесия $O_{1,2}$ определяется условием:

$$R \equiv b(\sigma + r)(\sigma + b + 1) - 2b\sigma(r - 1) = 0. \quad (\text{C.2.17})$$

Таким образом, при $\sigma > b + 1$ состояния равновесия $O_{1,2}$ устойчивы, когда

$$1 < r < \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma + b - 1}.$$

Они становятся седло-фокусами $(1, 2)$, когда $R \leq 0$. Это происходит справа от кривой AH бифуркации Андронова-Хопфа в плоскости параметров (r, σ) (рис. С.2.2).

Устойчивость состояний равновесия $O_{1,2}$ в критический момент $R = 0$ определяется по первой ляпуновской величине L_1 . Мы выведем ее аналитическое выражение в параграфе С.5.

С.2.№9. Найдите точку на плоскости параметров (r, a) на рис. С.2.3, в которой состояние равновесия асимметричной модели Лоренца [189]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -10(x - y), \\ \dot{y} &= rx - y - xz + a, \\ \dot{z} &= -\frac{8}{3}z + xy \end{aligned} \quad (\text{C.2.18})$$

имеет пару нулевых характеристических чисел.

Рассмотрим далее следующую систему третьего порядка из атмосферной физики [128] и [183], также называемой моделью Лоренца-84:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y^2 - z^2 - ax + aF, \\ \dot{y} &= xy - bxz - y + G, \\ \dot{z} &= bxy + xz - z, \end{aligned} \quad (\text{C.2.19})$$

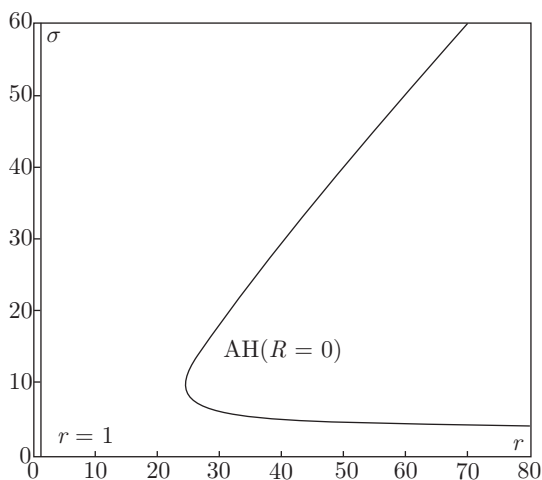


Рис. С.2.2. Кривая AH бифуркации Андронова–Хопфа, и линия $r = 1$ на плоскости (r, σ) для модели Лоренца при $b = 8/3$

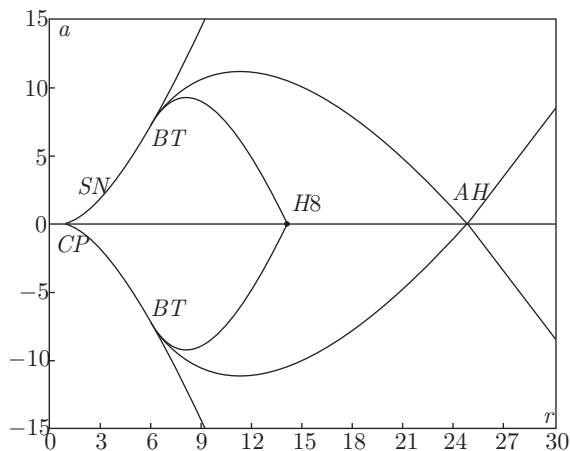


Рис. С.2.3. Часть бифуркационной диаграммы асимметричной модели Лоренца. CP — точка сборки, в BT система имеет состояние равновесия с двумя нулевыми характеристическими показателями (см. параграф 13.2)

где (a, b, F, G) — положительные параметры. Для того чтобы найти ее состояния равновесия (x_0, y_0, z_0) , мы приравняем правую часть (С.2.19) к нулю:

$$\begin{aligned} 0 &= -y_0^2 - z_0^2 - ax_0 + aF, \\ 0 &= x_0y_0 - bx_0z_0 - y_0 + G, \\ 0 &= bx_0y_0 + x_0z_0 - z_0. \end{aligned} \quad (\text{С.2.20})$$

Из второго и третьего уравнений получаем

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{G(1 - x_0)}{1 - 2x_0 + (1 + b^2)x_0^2}, \\ z_0 &= \frac{bGx_0}{1 - 2x_0 + (1 + b^2)x_0^2}. \end{aligned} \quad (\text{С.2.21})$$

Подставляя (С.2.21) в первое уравнение в (С.2.20), получаем

$$(1 + b^2)x_0^3 - [2 + (1 + b^2)F]x_0^2 + (1 + 2F)x_0 + \left(\frac{G^2}{a} - F\right) = 0. \quad (\text{С.2.22})$$

Далее, мы вводим новые параметры

$$B = \frac{1}{1 + b^2}, \quad G' = \frac{G^2}{a} - \frac{F}{1 + b^2}$$

и делаем преобразование

$$x_0 = \bar{x} + \frac{2B + F}{3}.$$

Тогда (С.2.22) преобразуется в каноническое уравнение третьего порядка

$$\bar{x}^3 + s\bar{x} + t = 0, \quad (\text{С.2.23})$$

где

$$\begin{aligned} t &= B(1 + 2F) - \frac{(2B + F)^2}{3}, \\ s &= \frac{B(1 + 2F)(2B + F)}{3} + G' - \frac{2(2B + F)^3}{27}. \end{aligned}$$

Дискриминант уравнения (С.2.23) задан как

$$\Delta = \frac{t^2}{4} + \frac{s^3}{27}.$$

Соответствующая бифуркационная кривая, определенная условием $\Delta = 0$, построена на рис. С.2.4. Она разбивает плоскость параметров (F, G) на области, где система (С.2.19) обладает одним и тремя состояниями равновесия (внутри клина на рис. С.2.4). Точка сборки, где все три состояния равновесия совпадают, определяется одновременным обращением в нуль s и t (точка, обозначенная CP). Это происходит, когда

$$G = \frac{2\sqrt{12b\sqrt{ab}}}{3(1+b^2)}, \quad F = \frac{1+\sqrt{3}b}{1+b^2}.$$

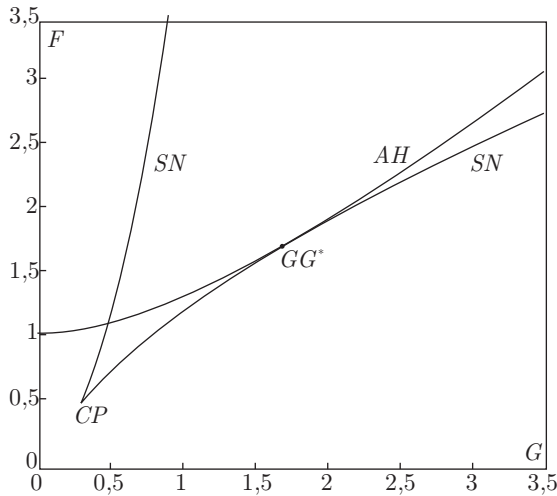


Рис. С.2.4. Фрагмент бифуркационного портрета на плоскости (F, G) , полученного при линейном анализе устойчивости для $a = 1/4$ и $b = 4$. Кривые SN и AH соответствуют седло-узловой бифуркации Андронова–Хопфа состояний равновесия в модели Лоренца-84

С.2.№10. Докажите, что система обладает состоянием равновесия с характеристическими показателями $(0, \pm i\omega)$ (бифуркация Гаврилова–Гукенхеймера) при

$$F^* = \frac{3a^2 + 3a^2b^2 + 12ab^2 + 12b^2 + 4a}{4(a + ab^2 + 2b^2)},$$

$$G^* = \frac{\sqrt{a}(a^2 + a^2b^2 + 4ab^2 + 4b^2)}{4\sqrt{a + ab^2 + 2b^2}}.$$

Подсказка: используйте то, что в этой точке и след, и детерминант матрицы Якоби должны одновременно обращаться в нуль (точка касания GG^* на рис. С.6.2).

С.2.№11. Проведите линейный анализ устойчивости следующей системы:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(\mu_1 + az + z^2), \\ \dot{z} &= \mu_2 + z^2 + br^2, \\ \dot{\varphi} &= \omega + cz,\end{aligned}$$

где r , φ и z — это цилиндрические координаты, $\mu_{1,2}$ — управляющие параметры, а a, b, c принимают значения ± 1 . Это усеченная нормальная форма для бифуркации Гаврилова–Гукенхеймера.

С.2.№12. Найдите замену координат и времени, которая приводит систему Лоренца (С.2.15) к виду

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x - xz - ay + Bx^3, \\ \dot{z} &= -b'(z - x^2).\end{aligned}\tag{С.2.24}$$

Подсказка: соответствующее соотношение между параметрами обеих систем:

$$b' = \frac{b}{\sqrt{\sigma(r-1)}}, \quad a = \frac{1+\sigma}{\sqrt{\sigma(r-1)}}, \quad B = \frac{b}{2b-\sigma}.$$

Система (С.2.24) является асимптотической нормальной формой, возникающей при изучении [129] локальной бифуркаций коразмерности 3 состояний равновесия и периодических орбит систем с Z_2 симметрией (см. параграф С.4). Когда $B = 0$, система (С.2.24) является моделью Шимицу–Мориока [127], [191]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x - xz - ay, \\ \dot{z} &= -bz + x^2,\end{aligned}\tag{С.2.25}$$

которую можно рассматривать как приближение к системе Лоренца при больших числах Рэлея r . В несколько ином виде ее можно получить также из уравнений в частных производных, описывающих магнитоконвекцию в [187].

Модель Шимицу–Мориока имеет три состояния равновесия при $b > 0$. Начало координат $O(0, 0, 0)$ имеет тип седла $(2, 1)$ с характеристическими показателями

$$\lambda_{1,2} = -a/2 \pm (a^2/4 + 1)^{1/2}, \quad \lambda_3 = -b.$$

Смена ведущего направления на $\mathcal{E}^s$ данного седла происходит на кривой $a = (b^2 - 1)/b$, где $\lambda_2 = \lambda_3$. Седловая величина $\sigma = \lambda_1 + \lambda_3$ обращается в нуль на кривой $a = (1 - b^2)/b$.

С.2.№13. Выпишите уравнения характеристических пространств $\mathcal{E}^s$, $\mathcal{E}^u$, $\mathcal{E}^{sL}$ для седла в начале координат.

Характеристическое уравнение для нетривиальных состояний равновесия $O_{1,2}(\pm\sqrt{b}, 0, 1)$ модели Шимицу–Мориока задано как

$$\lambda^3 + (a + b)\lambda^2 + ab\lambda + 2b = 0.$$

Кривая $АН$ бифуркации Андронова–Хопфа (рис. С.2.5) задана уравнением $(a + b)a - 2 = 0$. Характеристические показатели $O_{1,2}$ на кривой:

$$\lambda_3 = -2/a, \quad \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{2 - a^2}.$$

Выше кривой $АН$ состояния равновесия являются устойчивыми фокусами; ниже кривой они являются седло-фокусами типа $(1, 2)$.

Состояния равновесия в системе Ресслера [172, 188]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= bx - cz + xz,\end{aligned}$$

— это $O(0, 0, 0)$ и $O_1(c - ab, b - c/a, c/a - b)$. Характеристическое уравнение в O находится как

$$\lambda^3 + (c - a)\lambda^2 + (1 + b - ac)\lambda + (c - ab) = 0.$$

Оно имеет корни $(i\omega, -i\omega, \lambda)$, когда

$$a = \frac{(1 + c^2) + \sqrt{(1 + c^2)^2 - 4bc^2}}{2c}, \quad \sqrt{c^2 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} < b < \frac{(1 + c^2)^2}{4c^2}$$

или

$$a = \frac{(1 + c^2) - \sqrt{(1 + c^2)^2 - 4bc^2}}{2c}, \quad b < \begin{cases} \sqrt{c^2 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} & \text{для } c \geq \sqrt{2 + \sqrt{5}}, \\ \frac{(1 + c^2)^2}{4c^2} & \text{для } c \leq \sqrt{2 + \sqrt{5}}. \end{cases}$$

Состояние равновесия имеет один нулевой корень, когда $a = c/b$.

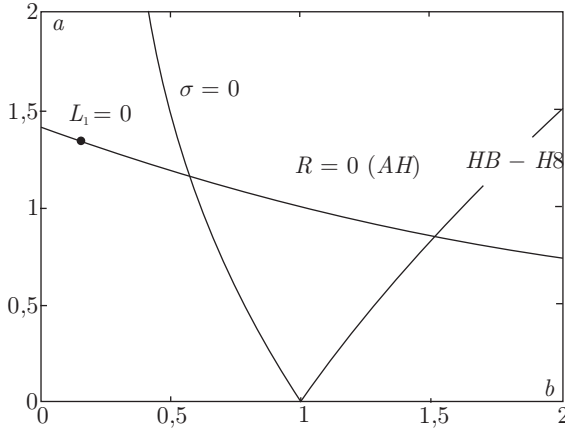


Рис. С.2.5. Бифуркационная диаграмма на плоскости (a, b) в системе Шимицу–Мориока, выведенная при анализе линейной устойчивости ее состояний равновесия. AH обозначает кривую бифуркации Андронова–Хопфа; $\sigma = 0$ отвечает нулевой седловой величине; $HB - H8$ соответствует смене ведущего направления седла в начале координат

Характеристическое уравнение в O_1 имеет вид

$$\lambda^3 + a(b-1)\lambda^2 + \left(1 + \frac{c}{a} - a^2b\right)\lambda + (ab - c) = 0.$$

Оно имеет пару чисто мнимых корней на кривой

$$c = \frac{a}{b} + (b-1)a^3, \quad a^2 < 1 + \frac{1}{b}.$$

Кроме того, это состояние равновесия может иметь единственный нулевой корень, когда $a = c/b$. Таким образом, состояния равновесия O_1 и O_2 сливаются, когда $ab = c$. Два других характеристических показателя этой вырожденной точки заданы как

$$\lambda_{1,2} = \frac{a(1-b) \pm \sqrt{a^2(b+1)^2 - 4(b+1)}}{2}.$$

Таким образом, показатели $\lambda_{1,2}$ становятся чисто мнимыми, когда

$$b = 1, \quad 0 < a < \sqrt{2}.$$

Система Ресслера и модель Лоренца-84 (С.2.19) замечательны тем, что обе имеют дважды вырожденное состояние равновесия, с характеристическими показателями $(0, \pm i\omega)$. Особенностью этой бифуркации Гаврилова–Гукенхеймера является то, что ее диаграмма может содержать бифуркационную кривую рождения тора и кривые, отвечающие гомоклиническим петлям к седло-фокусам, и, следовательно, в окрестности бифуркационного состояния равновесия может мгновенно возникать нетривиальная сложная динамика.

С.2.№14. Изучите состояния равновесия модели нейтронной активности Хиндмарша–Роуза [177]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - z - x^3 + 3x^2 + I, \\ \dot{y} &= -y - 2 - 5x^2, \\ \dot{z} &= \varepsilon(2(x + 1,6) - z),\end{aligned}\tag{С.2.26}$$

где I и ε — два управляющих параметра. Начните со случая $\varepsilon = 0$ (см. рис. С.2.6).

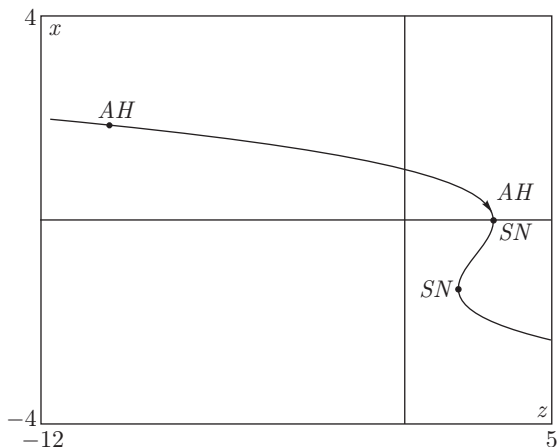


Рис. С.2.6. Зависимость координаты x состояния равновесия быстрой системы на плоскости от z при $I = 5$ и $\varepsilon = 0$. Точки AH и SN обозначают соответственно бифуркации Андронова–Хопфа и седло-узла для состояний равновесия

С.2.№15. Проведите анализ линейной устойчивости следующих систем, описывающих бифуркации состояний равновесия с тремя нулевыми характеристическими показателями в случаях, когда матрица Якоби имеет

полный жорданов блок [162, 163]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, & \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= z, & \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= ax - x^2 - by - z; & \dot{z} &= ax - x^3 - by - z. \end{aligned} \quad (\text{C.2.27})$$

Как член третьей степени изменяет свойства симметрии системы?

С.2.№16. Следующие повышающие размерность возмущения системы Лоренца и модели Шимицу–Мориока заданы системами

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma(x - y), & \dot{x} &= y, & \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= rx - y - xz, & \dot{y} &= -ay + x - xz, & \dot{y} &= -ay + x - xz, \\ \dot{w} &= z, & \dot{z} &= -bz + \mu w + x^2, & \dot{z} &= w, \\ \dot{z} &= -bw - az + xy, & \dot{w} &= -bw - \mu z, & \dot{w} &= -bw - \mu z + x^2 + cz^2. \end{aligned}$$

Найдите состояния равновесия этих систем и определите их типы.

С.2.№17. Каковы наименьшие размерности W^s и W^u состояния равновесия, показанного на рис. С.2.7?

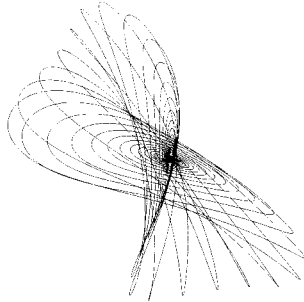


Рис. С.2.7. Траектория, гомоклиническая к седло-фокусу (2, 2)

С.3. Периодически возмущенные системы

Рассмотрим n -мерную систему

$$\dot{x} = Ax + f(t), \quad (\text{C.3.1})$$

где $f(t)$ — непрерывная периодическая функция периода 2π .

С.3.№18. Постройте отображение Пуанкаре плоскости $(x, y, t = 0)$ на плоскость $(x, y, t = 2\pi)$.

Решение. Методом вариации постоянной решение (С.3.1) получается как

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} f(\tau) d\tau.$$

Подставляя $t = 2\pi$, мы получаем отображение

$$x_1 = e^{2\pi A}x_0 + \int_0^{2\pi} e^{A(2\pi-\tau)} f(\tau) d\tau. \quad (\text{С.3.2})$$

С.3.№19. Определите условие, при котором вышеприведенное отображение имеет: (1) единственную неподвижную точку и (2) ни одной неподвижной точки.

Решение. Уравнение для неподвижной точки имеет вид

$$[I - e^{2\pi A}]x = C,$$

где C обозначает интеграл из (С.3.2). Рассмотрим два возможных случая:

- (1) $\det(I - e^{2\pi A}) \neq 0$. В этом случае существует только одна неподвижная точка.
- (2) $\det(I - e^{2\pi A}) = 0$. Тогда если ранг $(I - e^{2\pi A})$ равен рангу расширенной матрицы $(I - e^{2\pi A}|C)$, то существует бесконечное множество неподвижных точек. В противном случае неподвижные точки отсутствуют.

С.3.№20. Докажите, что корни $z_1, \dots, z_n$ характеристического уравнения $\det(zI - e^{2\pi A}) = 0$ равны $e^{2\pi\lambda_1}, \dots, e^{2\pi\lambda_n}$, где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — характеристические числа линейной системы

$$\dot{x} = Ax. \quad (\text{С.3.3})$$

С.3.№21. Докажите, что если в начале координат существует грубое состояние равновесие системы (С.3.3), то соответствующая неподвижная точка отображения (С.3.2) также грубая. Далее, докажите, что топологические типы состояния равновесия (С.3.3) и неподвижной точки (С.3.2) одинаковы.

С.3.№22. Докажите, что $\det(I - e^{2\pi A}) = 0$, если одно из характеристических чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ равно нулю или $i\omega$ с целым ω .

С.3.№23. Определите условие, при котором двумерная система

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\omega y + f(t), \\ \dot{y} &= \omega x + g(t),\end{aligned}\tag{С.3.4}$$

где f и g — непрерывные функции периода 2π , имеет бесконечное число периодических орбит периода $2\pi q$, где $q \geq 1$ — целое.

Решение. Отображение $T: t = 0 \rightarrow t = 2\pi$ можно записать в виде

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 \cos 2\pi\omega - y_0 \sin 2\pi\omega + C_1, \\ y_1 &= x_0 \sin 2\pi\omega + y_0 \cos 2\pi\omega + C_2,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}C_1 &= \int_0^{2\pi} (f(\tau) \cos \omega(2\pi - \tau) - g(\tau) \sin \omega(2\pi - \tau)) d\tau, \\ C_2 &= \int_0^{2\pi} (f(\tau) \sin \omega(2\pi - \tau) + g(\tau) \cos \omega(2\pi - \tau)) d\tau.\end{aligned}$$

Когда

$$\det \begin{pmatrix} \cos 2\pi\omega - 1 & -\sin(2\pi\omega) \\ \sin(2\pi\omega) & \cos(2\pi\omega) - 1 \end{pmatrix} = (\cos 2\pi\omega - 1)^2 + \sin^2 2\pi\omega \neq 0,$$

это отображение имеет единственную неподвижную точку. Это условие нарушается, когда ω — целое. В последнем случае отображение записывается в виде

$$x_1 = x_0 + C_1, \quad y_1 = y_0 + C_2.$$

Таким образом, если $C_1^2 + C_2^2 \neq 0$, то отображение не может иметь ни неподвижных, ни периодических точек; а если $C_1 = C_2 = 0$, — все точки являются неподвижными.

Далее рассмотрим случай, когда ω — не целое. Пусть (x^*, y^*) — координаты неподвижной точки. Применяя преобразование $x = x^* + \xi$ и $y = y^* + \nu$, мы перемещаем неподвижную точку в начало координат. В полярных координатах отображение принимает вид

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \rho_0, \\ \theta_1 &= \theta_0 + 2\pi\omega \pmod{2\pi}.\end{aligned}$$

Понятно, что при этом каждая окружность $r = \text{const}$ является инвариантной и что отображение на каждой окружности одинаково:

$$\theta_1 = \theta_0 + 2\pi\omega \pmod{2\pi}.$$

Последнее не имеет ни одной периодической точки, когда ω иррационально. Когда $\omega = p/q$ с целыми p и q , все точки являются периодическими периода q .

Рассмотрим далее квазилинейную систему

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + \mu f(x, y), \\ \dot{y} &= By + \mu g(x, y),\end{aligned}\tag{C.3.5}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ и $y \in \mathbb{R}^m$. Предполагается, что спектр A лежит на мнимой оси, а спектр B лежит в левой полуплоскости и $f, g \in \mathbb{C}^k$.

С.3.№24. Докажите следующую теорему, которая аналогична теореме о центральном многообразии:

Теорема С.1. Для любого $R > 0$ существует такое μ_0 , что при $|\mu| < \mu_0$ сфера $\|(x, y)\| \leq R$ содержит притягивающее инвариантное $\mathbb{C}^k$ -гладкое многообразие $y = \mu\varphi(x, \mu)$.

Из вышеприведенной теоремы следует, что изучение (C.3.5) сводится к изучению n -мерной системы

$$\dot{x} = Ax + \mu f(x, \mu\varphi(x, \mu)) = Ax + \mu\tilde{f}(x) + o(\mu),$$

где $\tilde{f}(x) = f(x, 0)$.

С.3.№25. Рассмотрите аналогичную задачу для квазилинейных отображений.

С.3.№26. Докажите аналог теоремы С.1 для следующей $(n + m)$ -мерной системы:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + h_1(t) + \mu f(x, y, t), \\ \dot{y} &= By + h_2(t) + \mu g(x, y, t),\end{aligned}\tag{C.3.6}$$

где все функции являются гладкими и 2π -периодическими. Предполагается, что спектры A и B лежат соответственно на мнимой оси и слева от нее.

Отметим, что укороченное уравнение

$$\dot{y} = By + h_2(t)$$

имеет единственное 2π -периодическое решение $y = \alpha(t)$. Таким образом, мы всегда можем сделать $h_2(t) \equiv 0$ (заменой $\tilde{y} \rightarrow y + \alpha(t)$).

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = \mu f(x, t), \quad (\text{C.3.7})$$

где $f(x, t) = f(x, t + 2\pi)$ — непрерывная по t и гладкая по x , $x \in \mathbb{R}^n$.

С.3.№27. Найдите отображение Пуанкаре вплоть до членов порядка μ .

Подсказка: решение находится из интегрального уравнения

$$x(t) = x_0 + \mu \int_0^t f(x(\tau), \tau) d\tau$$

методом последовательных приближений:

первое приближение задано как $x(t) = x_0$;

второе приближение равно $x(t) = x_0 + \mu \int_0^t f(x_0, \tau) d\tau$;

n -е приближение имеет вид $x_{n+1}(t) = x_0 + \mu \int_0^t f(x_0, \tau) d\tau + O(\mu^2)$.

Решение:

$$x_1 = x_0 + \mu \int_0^{2\pi} f(x_0, \tau) d\tau + O(\mu^2), \quad (\text{C.3.8})$$

где $f_0(x) = \int_0^{2\pi} f(x, \tau) d\tau$.

С.3.№28. Докажите, что сдвиг по времени на 2π вдоль траекторий системы

$$\dot{x} = \frac{\mu}{2\pi} f_0(x) \quad (\text{C.3.9})$$

совпадает с (C.3.8) вплоть до членов порядка μ . Система (C.3.9) называется *усредненной системой*.

С.3.№29. Докажите следующую теорему.

Теорема С.2. Грубые состояния равновесия усредненной системы соответствуют грубым периодическим орбитам исходной системы: если x^* — грубое состояние равновесия в (C.3.9), то отображение Пуанкаре (C.3.8) для системы (C.3.7) имеет грубую неподвижную точку, близкую к x^* при всех достаточно малых μ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x^* — грубое состояние равновесия системы (С.3.9), т. е.

$$f_0(x^*) = 0$$

и корни $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ характеристического уравнения не лежат на мнимой оси. Полагая $\lambda = \frac{\mu}{2\pi}\sigma$, получаем

$$\det \left(\frac{\partial f_0}{\partial x}(x^*) - \sigma I \right) = 0. \quad (\text{С.3.10})$$

Неподвижные точки (С.3.8) находятся из уравнения

$$f_0(x) + O(\mu) = 0.$$

Поскольку $f_0(x^*) = 0$ и $|\frac{\partial f_0}{\partial x}(x^*)| \neq 0$ (т. к. (С.3.10) не имеет нулевых корней), то существует неподвижная точка $x = x^* + O(\mu)$. Соответствующее характеристическое уравнение в этой точке записывается в виде

$$\det \left(I + \mu \frac{\partial f_0}{\partial x}(x^*) + O(\mu^2) - zI \right) = 0.$$

Будем искать корни этого уравнения в виде $z = 1 + \mu\sigma$. Получаем

$$\det \left(\frac{\partial f_0}{\partial x}(x^*) + O(\mu) - \sigma I \right) = 0.$$

Таким образом, для всех малых μ корни σ будут близки к корням (С.3.10). Таким образом, неподвижная точка будет грубой. Кроме того, она имеет тот же топологический тип, что и состояние равновесия усредненной системы. ■

С.3.№30. Докажите, что в общем случае

$$\dot{x} = Ax + \mu f(x, t),$$

где $f(x, t)$ — непрерывная функция времени, гладкая относительно x , соответствующее отображение Пуанкаре имеет вид

$$x_1 = e^{2\pi A} x_0 + \mu \int_0^{2\pi} e^{A(2\pi-\tau)} f(e^{A\tau} x_0, \tau) d\tau + O(\mu^2).$$

С.3.№31. Докажите, что если $\det(e^{2\pi A} - I) \neq 0$, то для любого даного R , если μ достаточно мала, в сфере радиуса R имеется единственная неподвижная точка $x^*(\mu)$ такая, что $x^*(\mu) \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow 0$.

Рассмотрим систему двух уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\omega y + \mu f(x, y, t), \\ \dot{y} &= \omega x + \mu g(x, y, t).\end{aligned}\tag{C.3.11}$$

С.3.№32. Вычислите отображение Пуанкаре вплоть до членов порядка μ .

Решение:

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 \cos 2\pi\omega - y_0 \sin 2\pi\omega + \mu\Phi_1(x_0, y_0) + \mu^2(\dots), \\ y_1 &= x_0 \sin 2\pi\omega + y_0 \cos 2\pi\omega + \mu\Phi_2(x_0, y_0) + \mu^2(\dots),\end{aligned}\tag{C.3.12}$$

где

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \int_0^{2\pi} [f(x_0 \cos \omega\tau - y_0 \sin \omega\tau, x_0 \sin \omega\tau + y_0 \cos \omega\tau, \tau) \cos \omega\tau + \\ &\quad + g(x_0 \cos \omega\tau - y_0 \sin \omega\tau, x_0 \sin \omega\tau + y_0 \cos \omega\tau, \tau) \sin \omega\tau] d\tau \\ \Phi_2 &= \int_0^{2\pi} [-f(x_0 \cos \omega\tau - y_0 \sin \omega\tau, x_0 \sin \omega\tau + y_0 \cos \omega\tau, \tau) \sin \omega\tau + \\ &\quad + g(x_0 \cos \omega\tau - y_0 \sin \omega\tau, x_0 \sin \omega\tau + y_0 \cos \omega\tau, \tau) \cos \omega\tau] d\tau.\end{aligned}$$

С.3.№33. Запишите систему (С.3.11) в полярных координатах $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$.

Решение:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \mu R(r, \theta, t), \\ \dot{\theta} &= \omega + \mu \Psi(r, \theta, t),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}R &= f(r \cos \theta, r \sin \theta, t) \cos \theta + g(r \cos \theta, r \sin \theta, t) \sin \theta, \\ \Psi &= \frac{1}{r} [-f(r \cos \theta, r \sin \theta, t) \sin \theta + g(r \cos \theta, r \sin \theta, t) \cos \theta].\end{aligned}$$

С.3.№34. Пусть

$$\begin{aligned}R(r, \theta, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}(r) e^{i(m\theta + nt)} \\ \Psi(r, \theta, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} b_{nm}(r) e^{i(m\theta + nt)}.\end{aligned}$$

Постройте отображение Пуанкаре вплоть до $O(\mu^2)$ для случая, когда ω — целое.

Решение:

$$r_1 = r_0 + 2\pi\mu \sum_{m\omega+n=0} a_{nm}(r_0)e^{im\theta_0} + \mu^2(\dots),$$

$$\theta_1 = \theta_0 + 2\pi\mu \sum_{m\omega+n=0} b_{nm}(r_0)e^{im\theta_0} + \mu^2(\dots).$$

Если ω — целое, отображение (С.3.12) можно представить следующим образом:

$$x_1 = x_0 + \mu\Phi_1(x_0, y_0) + \mu^2(\dots),$$

$$y_1 = y_0 + \mu\Phi_2(x_0, y_0) + \mu^2(\dots),$$

С.3.№35. Докажите следующую теорему:

Теорема С.3 (теорема усреднения). Если ω — целое, то для достаточно малых $\mu > 0$ грубые состояния равновесия системы

$$\dot{x} = \frac{\mu}{2\pi}\Phi_1(x, y),$$

$$\dot{y} = \frac{\mu}{2\pi}\Phi_2(x, y)$$

будут соответствовать грубым неподвижным точкам отображения Пуанкаре. Кроме того, устойчивые состояния равновесия соответствуют устойчивым неподвижным точкам.

В полярных координатах усредненная система задана как

$$\dot{r} = \mu \sum_{m\omega+n=0} a_{nm}(r)e^{im\theta} = \mu R_0(r, \theta),$$

$$\dot{\theta} = \mu \sum_{m\omega+n=0} b_{nm}(r)e^{im\theta} = \mu \Psi_0(r, \theta).$$

Здесь следует принимать во внимание сингулярность при $r = 0$.

С.3.№36. Найдите соответствующую усредненную систему для уравнения Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} + \mu(1 - x^2)\dot{x} + \omega^2 x = \mu A \sin t$$

при условии, что $\omega^2 = 1 + \mu\Delta$ (где Δ называется расстройкой). Определите тип состояний равновесия при изменении A и Δ .

Теперь рассмотрим случай, когда ω не целое. В соответствии с С.3.№31, в этом случае отображение (С.3.12) имеет единственную неподвижную точку, близкую к нулю.

С.3.№37. Найдите периодическое движение $(x^*(t), y^*(t))$, соответствующее этой неподвижной точке, и найдите уравнения системы после распрямления этого периодического решения (переместите начало координат в $(x^*(t), y^*(t))$).

Решение:

$$\dot{x} = -\omega y + \mu F(x, y, t) + \mu^2(\dots),$$

$$\dot{y} = \omega x + \mu G(x, y, t) + \mu^2(\dots),$$

где

$$F(x, y, t) = f(x, y, t) - f(0, 0, t),$$

$$G(x, y, t) = g(x, y, t) - g(0, 0, t).$$

Теперь предположим, что $\omega = p/q$, где p и q — целые, $q > 1$. В этом случае мы ищем периодические движения периода $2\pi q$, которые соответствуют неподвижным точкам отображения T^q . Это отображение записывается в виде

$$x_q = x_0 + \mu \Phi_1(x_0, y_0) + \mu^2(\dots),$$

$$y_q = y_0 + \mu \Phi_2(x_0, y_0) + \mu^2(\dots),$$

где

$$\Phi_1 = \int_0^{2\pi q} [f(\cdot) \cos \omega \tau + g(\cdot) \sin \omega \tau] d\tau,$$

$$\Phi_2 = \int_0^{2\pi q} [-f(\cdot) \sin \omega \tau + g(\cdot) \cos \omega \tau] d\tau,$$

где $(\cdot)$ обозначает $(x_0 \cos \omega \tau - y_0 \sin \omega \tau, x_0 \sin \omega \tau + y_0 \cos \omega \tau)$, как и выше в (С.3.12), и $\omega = \frac{p}{q}$.

Таким же образом, как и в предыдущем случае, мы можем рассмотреть усредненную систему

$$\dot{x} = \frac{\mu}{2\pi q} \Phi_1(x, y),$$

$$\dot{y} = \frac{\mu}{2\pi q} \Phi_2(x, y).$$

В полярных координатах отображение T^q можно записать как

$$\begin{aligned} r_q &= r_0 + 2\pi q\mu \sum_{mp+nq=0} a_{nm}(r_0)e^{im\theta_0} + \mu^2(\dots), \\ \theta_q &= \theta_0 + 2\pi q\mu \sum_{mp+nq=0} b_{nm}(r_0)e^{im\theta_0} + \mu^2(\dots). \end{aligned}$$

Здесь усредненная система задается как

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \mu R_0(r, \theta), \\ \dot{\theta} &= \mu \Psi_0(r, \theta), \end{aligned}$$

где $R_0 = \sum_{mp+nq=0} a_{nm}(r)e^{im\theta}$ и $\Psi_0 = \sum_{mp+nq=0} b_{nm}(r)e^{im\theta}$. Заметим, что в этом случае $f(0, 0, t) \equiv 0$ и $g(0, 0, t) \equiv 0$, т. е. усредненная система в полярных координатах более не имеет сингулярности при $r = 0$.

С.3.№38. Рассмотрите случай иррационального ω . Как и выше, можно положить $f(0, 0, t) \equiv 0$, $g(0, 0, t) \equiv 0$ в (С.3.11). Система в полярных координатах принимает вид

$$\dot{r} = \mu \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}(r)e^{i(m\theta+nt)}, \quad \dot{\theta} = \omega + \mu \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} b_{nm}(r)e^{i(m\theta+nt)}$$

с невырожденными (гладкими) коэффициентами a_{nm} , b_{nm} . Докажите, что для любых заданных N , M существует гладкое преобразование координат, которое приводит систему к виду

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \mu a_{00}(r) + O(\mu^2) + \mu \sum_{n=N}^{\infty} \sum_{m=M}^{\infty} a_{nm}(r)e^{i(m\theta+nt)}, \\ \dot{\theta} &= \omega + \mu b_{00}(r) + O(\mu^2) + \mu \sum_{n=N}^{\infty} \sum_{m=M}^{\infty} b_{nm}(r)e^{i(m\theta+nt)}. \end{aligned}$$

Отметим, что так как ряды здесь стремятся к нулю при $N, M \rightarrow +\infty$, то для любого произвольно малого δ отображение T в подходящих координатах можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} r_1 &= r_0 + 2\pi\mu a_{00}(r_0) + \delta O(\mu), \\ \theta_1 &= \theta_0 + 2\pi\omega + 2\pi\mu b_{00}(r_0) + \delta O(\mu). \end{aligned}$$

С.3.№39. Исследуйте укороченное отображение

$$\begin{aligned} r_1 &= r_0 + 2\pi\mu a_{00}(r_0), \\ \theta_1 &= \theta_0 + 2\pi\omega + 2\pi\mu b_{00}(r_0). \end{aligned}$$

Докажите, что кроме тривиальной неподвижной точки $(0, 0)$ вышеприведенное отображение может иметь инвариантные замкнутые кривые, отвечающие нулям уравнения

$$a_{00}(r_0) = 0.$$

С.3.№40. Докажите, что для малых $\mu > 0$ каждый корень r^* уравнения

$$a_{00}(r_0) = 0,$$

для которого

$$a'_{00}(r^*) < 0$$

отвечает устойчивой инвариантной замкнутой кривой $r = r^*(\mu) = r^* + O(\mu)$.

Подсказка: возьмите достаточно малое δ и примените принцип кольца.

В случае иррационального ω усредненная система задается как

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \mu a_{00}(r), \\ \dot{\theta} &= \omega + \mu b_{00}(r). \end{aligned}$$

При этом $r = 0$ — состояние равновесия, в то время как ненулевые корни $a_{00}(r) = 0$ отвечают предельным циклам.

С.3.№41. Следующая задача почти эквивалентна предыдущей: докажите, что для малых $\mu > 0$ устойчивые (неустойчивые) предельные циклы усредненной системы отвечают устойчивым (неустойчивым) инвариантным торам исходной системы.

Вернемся к резонансному случаю ($\omega = p/q, q \geq 1$). Соответствующую усредненную систему можно записать как

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \mu R_0(r, \theta), \\ \dot{\theta} &= \mu \Psi_0(r, \theta). \end{aligned}$$

Допустим, что система

$$\begin{aligned} \dot{r} &= R_0(r, \theta), \\ \dot{\theta} &= \Psi_0(r, \theta) \end{aligned} \tag{С.3.13}$$

имеет грубую периодическую орбиту $L : \{r = \alpha(t), \theta = \beta(t)\}$ с периодом τ , и пусть

$$\lambda = \int_0^\tau \left[\frac{\partial R_0}{\partial \tau}(\alpha(t), \beta(t)) + \frac{\partial \Psi_0}{\partial \tau}(\alpha(t), \beta(t)) \right] d\tau < 0.$$

Это означает, что усредненная система имеет периодическое решение $\{r = \alpha(\mu t), \theta = \beta(\mu t)\}$ периода τ/μ .

С.3.№42. Докажите, что исходная система при малых $\mu > 0$ имеет устойчивый инвариантный тор.

Подсказка: сначала преобразуйте (С.3.13): введите нормальные координаты (u, φ) вблизи L (см. параграф 3.10). Система записывается в виде

$$\begin{aligned} \dot{u} &= A(\varphi)u + O(u^2), \\ \dot{\varphi} &= 1 + O(u), \end{aligned}$$

где правая часть является периодической функцией периода τ_0 . Отметим, что

$$\lambda = \int_0^\tau A(\varphi) d\varphi$$

и, следовательно,

$$A(\varphi) = \lambda + A_0(\varphi),$$

где $\int_0^\tau A_0(\varphi) d\varphi = 0$. После замены $v = ue^{-\int A_0(\varphi) d\varphi}$ система принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \lambda v + O(v^2), \\ \dot{\varphi} &= 1 + O(v). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что усредненную систему в новых координатах (v, φ) можно записать как

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \mu[\lambda v + O(v^2)], \\ \dot{\varphi} &= \mu[1 + O(v)]. \end{aligned}$$

Соответствующее отображение сдвига на $2\pi q$ имеет вид

$$\begin{aligned} v_1 &= v_0 + \mu[2\pi q \lambda v_0 + O(v_0^2)] + O(\mu^2), \\ \varphi_1 &= \varphi_0 + 2\pi q \mu + O(\mu v_0) + O(\mu^2). \end{aligned}$$

Такой же вид имеет отображение сдвига на $2\pi q$ для исходной системы (С.3.11). Положим $v = \mu w$, после чего отображение Пуанкаре приобретает вид

$$\begin{aligned}w_1 &= w_0 + 2\pi q \mu \lambda w_0 + O(\mu^2), \\ \varphi_1 &= \varphi_0 + 2\pi q \mu + O(\mu^2).\end{aligned}$$

Чтобы завершить решение, используйте принцип кольца.

С.3.№43. Исследуйте уравнение Матъе:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\omega^2(1 + \varepsilon \cos \omega_0 t)x. \quad (\text{С.3.14})$$

Докажите, что области неустойчивости, которые отвечают параметрическим колебаниям, примыкают к точкам $\omega/\omega_0 = k/2$ ($k = 1, 2, \dots$) в плоскости $(\omega/\omega_0, \varepsilon)$ при $\varepsilon = 0$ [20].

Решение (С.3.14), начинающееся в точке (x_0, y_0) , при $\varepsilon = 0$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{y_0}{\omega_0} \sin \omega t + x_0 \cos \omega t, \\ y(t) &= y_0 \cos \omega t - \omega x_0 \sin \omega t.\end{aligned} \quad (\text{С.3.15})$$

Теперь построим отображение плоскости $(x, y, t = 0)$ на плоскость $(x, y, t = \tau = 2\pi/\omega_0)$. Чтобы сделать это, мы подставляем $t = 2\pi/\omega_0$ в (С.3.15) и заменяем $(x(t), y(t))$ на $(\bar{x}, \bar{y})$, а (x_0, y_0) на (x, y) . Итоговый оператор $(x, y) \mapsto (\bar{x}, \bar{y})$ задается через

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\pi \frac{\omega}{\omega_0} & \frac{1}{\omega} \sin 2\pi \frac{\omega}{\omega_0} \\ -\omega \sin 2\pi \frac{\omega}{\omega_0} & \cos 2\pi \frac{\omega}{\omega_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (\text{С.3.16})$$

Характеристическим уравнением (С.3.16) является

$$\rho^2 + p\rho + q = 0,$$

где

$$p \equiv \text{tr } T = -2 \cos 2\pi \frac{\omega}{\omega_0} \text{ и } q \equiv \det T = 1.$$

Это *сохраняющее площадь отображение*. Мультипликаторы неподвижной точки $O(x = y = 0)$ удовлетворяют соотношениям

$$\rho_1 + \rho_2 = -p \text{ и } \rho_1 \rho_2 = q = 1.$$

Следовательно, когда $|p| < 2$, данное отображение является вращением на угол $2\pi\omega/\omega_0$ так, что все его траектории устойчивы.

Найдите поправку первого порядка по ε для формулы (С.3.15) (используйте С.3.№30). Отметим, что начало координат возмущенной системы становится седлом, когда $|p| > 2$. Кроме того, оно является седлом $(+, +)$ или седлом $(-, -)$ при $p > 2$ и $p < -2$ соответственно.

С.3.№44. [166]. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1 &= \omega_1, \\ \dot{\psi}_2 &= \omega_2,\end{aligned}$$

где $\omega_{1,2} > 0$, эти уравнения можно интерпретировать как пару двух невзаимодействующих гармонических колебаний.

Эту систему можно свести к одному уравнению

$$\frac{d\psi_1}{d\psi_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \triangleq r.$$

Мы всегда можем предполагать, что $r < 1$. Данная система имеет решение $\psi_1 = r\psi_2 + \psi_2^0$. Вводя нормализованные координаты $\theta = \psi_2^0/2\pi$ и $\bar{\theta} = (r2\pi + \psi_2^0)/2\pi$, получаем отображение окружности

$$\bar{\theta} = \theta + r, \quad \text{mod } 1, \quad (\text{С.3.17})$$

которое также можно представить как следующее отображение на интервале $[0, 1]$:

$$\bar{\theta} = \begin{cases} \theta + r & \text{при } 0 \leq \theta \leq 1 - r, \\ \theta - (1 - r) & \text{при } 1 - r \leq \theta \leq 1, \end{cases} \quad (\text{С.3.18})$$

где конечные точки $\theta = 0$ и $\theta = 1$ отождествлены.

Пусть r — рациональное число, т. е. $r = p/q$, где p и q — некоторые взаимно простые целые. Разделим сегмент $[0, 1]$ на q интервалов длиной $1/q$: $[0, 1/q], [1/q, 2/q], \dots, [(q-1)/q, 1]$. Выберем начальную точку $\theta_0 \in [0, 1/q]$. Положительная полутраектория (С.3.17), начинающаяся в θ_0 , дается последовательностью итераций

$$\left(\theta_0, \theta_1 = \theta_0 + \frac{p}{q} (\text{mod } 1), \theta_2 = \theta_0 + \frac{2p}{q} (\text{mod } 1), \dots, \theta_i = \theta_0 + \frac{ip}{q} (\text{mod } 1), \dots \right).$$

Цикл периода n задан как

$$\left\{ \theta_0 = \theta_0 + \frac{np}{q} \quad \text{mod } 1, \quad \theta_i \neq \theta_0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \right\}.$$

Очевидно, минимальный период $n = q$. Таким образом, в цикле существует только одна точка на каждом интервале $[(k-1)/q, k/q]$, $k = 1, \dots, q$, потому

что и число точек в цикле, и число интервалов равно q . Поскольку θ_0 — произвольная точка на $[0, 1/q]$, весь отрезок $[0, 1]$ заполнен q -периодическими циклами. Таким образом, когда число вращения является рациональным, в рассматриваемой системе имеется континуум сосуществующих циклов периода q .

Если число r иррационально, его можно представить как

$$r = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{p_l}{q_l},$$

где $q_l \rightarrow \infty$ при $l \rightarrow \infty$. Кроме того, количество интервалов $[(k-1)/q_l, k/p_l]$ на $[0, 1]$ также неограниченно возрастает. Следовательно, длина каждого интервала уменьшается, и при $l \rightarrow \infty$ весь сегмент $[0, 1]$ заполнен квазипериодическими траекториями.

С.3.№45. Исследуйте отображение окружности:

$$\bar{\theta} = \theta + \omega + k \sin \theta \pmod{2\pi}, \quad (\text{С.3.19})$$

где ω — частота и k — некоторый параметр.

Численно найдите число вращения $R(\omega)$:

$$R = \frac{1}{2\pi} \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (\theta_{n+1} - \theta_n)$$

при $\omega \in [0, 2\pi]$.

Подсказка: вычислите итерации следующего двумерного отображения

$$\begin{aligned} \theta_{n+1} &= (\theta_n + \omega + k \sin \theta_n) \pmod{2\pi}, \\ R_{n+1} &= \frac{1}{n+1} \left(nR_n + \omega + \frac{\theta_{n+1} - \theta_n}{2\pi} \right) \end{aligned} \quad (\text{С.3.20})$$

при ω , меняющемся от 0 до 2π .

При $n \rightarrow +\infty$ итерации R_n стремятся к числу вращения R для заданного ω . Далее постройте график зависимости для R от ω , как на рис. С.3.1.

С.4. Приведение к нормальной форме

В этом параграфе мы обсудим некоторые алгоритмы построения нормальных форм. В силу принципа редукции, достаточно построить нормальную форму только для системы на центральном многообразии. Таким образом, чтобы исследовать бифуркации состояния равновесия с *единственным нулевым* характеристическим корнем, нужно вывести одномер-

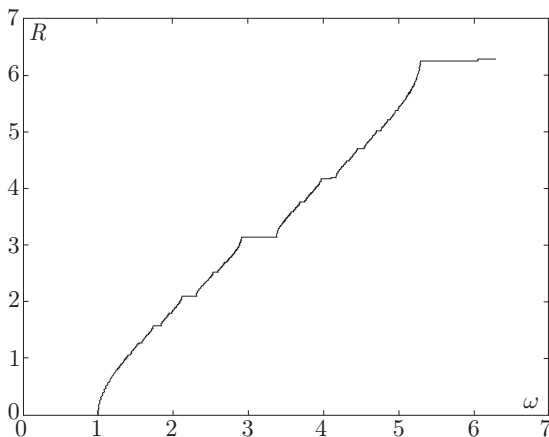


Рис. С.3.1. «Канторова лестница» для (С.3.20)

ную нормальную форму. Если есть пара нулевых характеристических показателей, исследуют соответствующее семейство двумерных нормальных форм, и т. д.

В определенных ситуациях нужно принимать во внимание глобальные свойства исходной системы. Так, например, если исходная система, ограниченная на центральное многообразие, имеет симметрию, соответствующая нормальная форма также наследует это свойство. По существу, нормальная форма для заданной бифуркации — это зависящая от параметров система дифференциальных или, в зависимости от задачи, разностных уравнений с правой частью простейшего возможного вида, достаточная для описания основных бифуркаций.

Для того чтобы изучить бифуркации вблизи границы устойчивости, необходимо ввести малые управляющие параметры, число которых равно по крайней мере порядку вырождения линейной задачи, или же это число может быть даже больше при условии, что существуют дополнительные вырождения в нелинейных членах. Поскольку управляющие параметры малы, орбиты на центральном многообразии могут оставаться в малой окрестности состояния равновесия в течение длительного времени (т. е. на центральном многообразии не существует быстрой неустойчивости, поскольку все характеристические показатели приведенной линеаризованной системы близки к нулю). Следовательно, разумно отмасштабировать параметры и фазовые переменные так, чтобы они принимали конечные (т. е. не малые) значения, также необходимо сделать нормировку времени.

Этот подход является достаточно общим. Его достоинство заключается в том, что после нормировки многие резонансные мономы исчезают. Наиболее тривиальным примером является бифуркация седло-узла с единственным нулевым собственным числом. В этом случае центральное многообразие одномерно. Ряд Тейлора для этой системы вблизи состояния равновесия можно записать в следующем виде:

$$\dot{x} = \mu + x^2 + l_3 x^3 + \dots,$$

где μ — малый управляющий параметр. Нормировка $x \rightarrow \sqrt{|\mu|}x$, $t \rightarrow t/\sqrt{|\mu|}$ приводит систему к виду

$$\dot{x} = \pm 1 + x^2 + O(\sqrt{|\mu|}),$$

таким образом, только мономы второй степени сохраняются в пределе $\mu \rightarrow 0$.

Аналогичный алгоритм можно использовать в многомерном случае. Когда управляющие параметры стремятся к нулю, предел перемасштабированной системы позволяет получить описание в главном порядке для поведения системы вблизи точки бифуркации. Такая предельная система называется *асимптотической нормальной формой*.

Асимптотические нормальные формы, которые возникают при изучении состояний равновесия с одним или двумя нулевыми собственными числами, являются одно- или двумерными соответственно. Как правило, такие системы допускают исчерпывающий анализ, поэтому наибольшие усилия прилагаются для установления соответствия между динамикой в асимптотической нормальной форме и динамикой в исходной системе [20, 64]. Однако анализ бифуркаций в двумерной нормальной форме может также потребовать изучения некоторых глобальных бифуркаций, иногда коразмерности 2. Кроме того, влияние опущенных членов более высокого порядка может также разрушить идеализированную картину, возникающую в усеченной нормальной форме. Наиболее очевидный пример дает бифуркация состояния равновесия с показателями $(0, \pm i\omega)$, для которой нормальная форма обладает вращательной симметрией. Если в исходной системе такая симметрия отсутствует, простая динамика в укороченной нормальной форме может вызвать хаос в исходной системе.

Совершенно другая ситуация возникает при изучении нормальных форм более высоких размерностей. Трехмерная асимптотическая нормальная форма сама может демонстрировать нетривиальную динамику. Например, гомоклиническая петля к седло-фокусу была найдена в асимптотиче-

ской нормальной форме

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= -z - by + ax - x^2,\end{aligned}$$

соответствующей бифуркации трех нулевых собственных чисел с полным жордановым блоком [163]. Примечательно, что уравнения многих асимптотических нормальных форм совпадают с некоторыми хорошо известными моделями из различных приложений: уравнение Дюффинга третьего порядка, цепь Чуа, система Шимицу–Мориока, система Лоренца.

С.4.№46. Выведите нормальную форму для уравнения Шимицу–Мориока в виде [187]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= ax - ky - xz, \\ \dot{z} &= -z + x^2,\end{aligned}\tag{C.4.1}$$

вблизи точки ($k = a = 0$) коразмерности 2.

Сначала найдем характеристические показатели в начале координат. Очевидно, что это пара нулевых показателей и один, равный -1 . Характеристическое пространство, отвечающее нулевой паре, — это $\{z = 0\}$. Центральное инвариантное многообразие, касательное к этой плоскости в начале координат, записывается как

$$z = x^2 - 2xy + 2y^2 + \dots,$$

где точки обозначают члены третьего и более высоких порядков по (x, y, z, a, k) . Система на центральном многообразии, таким образом, принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= ax - ky - x^3 + 2x^2y - 2xy^2 + \dots,\end{aligned}\tag{C.4.2}$$

где точки обозначают члены по крайней мере четвертого порядка.

Далее, проведем нормировку

$$(x, y, t, k, a) \rightarrow (\varepsilon x_{\text{new}}, \varepsilon^2 y_{\text{new}}, t_{\text{new}}/\varepsilon, \varepsilon k_{\text{new}}, \varepsilon^2 a_{\text{new}}).$$

Система записывается в виде

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= ax + ky - x^3 + 2\varepsilon x^2y + O(\varepsilon^2),\end{aligned}\tag{C.4.3}$$

где новые параметры k_{new} и a_{new} могут теперь принимать произвольные значения. Заметим, что симметрия $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$ в (С.4.3) наследуется из исходной системы (С.4.1). В силу этого, ряд Тейлора для функций в правой части не содержит квадратичных членов (и других членов четного порядка) по (x, y) . В отличие от общей бифуркации Богданова–Тakensа, которую мы рассматривали в параграфе 13.2, бифуркация в симметричных системах несколько другая: состояние равновесия в начале координат существует всегда, и оно претерпевает бифуркацию вилки, вместо бифуркации седло-узла. Бифуркационная диаграмма для симметричных систем также содержит дополнительную кривую, которая отвечает восьмерочной устойчивой периодической орбите с мультипликатором, равным $+1$. Знаки ляпуновских величин на границе устойчивости Андронова–Хопфа для начала координат и для нетривиальных состояний равновесия определяются знаком ε . Отметим, что, когда $\varepsilon = 0$ и $k = 0$, система (С.4.3) становится интегрируемой с гамильтонианом

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}.$$

С.4.№47. Рассмотрим следующую разновидность цепи Чуа [168]:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \beta(g(y - x) - f(x)), \\ \dot{y} &= g(x - y) + z, \\ \dot{z} &= -y,\end{aligned}$$

где α, β и g — некоторые положительные параметры. Здесь $f(x) = \alpha x(x^2 - 1)$ — приближение третьей степени для нелинейного элемента, и, следовательно, эта система имеет нечетную симметрию $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$. Когда $g > \alpha$, существует одно состояние равновесия O в начале координат. Когда $g < \alpha$, существует еще пара симметричных состояний равновесия $O_{1,2}(\pm\sqrt{1 - g/a}, 0, \mp g\sqrt{1 - g/a})$. На линии $g = \alpha$ характеристическое уравнение O имеет один нулевой корень, когда $\beta \neq 1/g^2$, и два нулевых корня при $\beta = 1/g^2$ (третий корень в этом случае равен $-g$). Как и в случае системы Шимицу–Мориока, структура бифуркационного множества на плоскости, трансверсальной к этой кривой в пространстве параметров, определена симметричной нормальной формой Хорозова–Тakensа. Схема редукции к этой нормальной форме на двумерном центральном многообразии рассматривается ниже.

Матрица Якоби, соответствующая двум нулевым корням, имеет вид:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \end{pmatrix}.$$

При $\alpha = g = 1/\sqrt{\beta}$ линейная часть системы сводится к виду

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

преобразованием

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \xi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 0 \\ g \\ g^2 \end{pmatrix} + \zeta \begin{pmatrix} 1 \\ -g^2 \\ -g \end{pmatrix}.$$

Можно легко проверить, что в этих координатах система принимает вид

$$\dot{\xi} = \eta + \left(1 - \frac{1}{g^2}\right) F,$$

$$\dot{\eta} = \frac{1}{g} F,$$

$$\dot{\zeta} = \frac{1}{g^2} F,$$

где

$$F = \gamma_1 \xi + \gamma_2 \eta + (\gamma_1 - g\gamma_2) \zeta - \beta \alpha (\xi + \zeta)^3$$

и $\gamma_{1,2}$ — малые параметры:

$$\gamma_1 = \beta(\alpha - g), \quad \gamma_2 = \beta g^2 - 1.$$

Центральное многообразие имеет вид

$$\zeta = \frac{\gamma_1}{g^3} \xi + \left(\frac{\gamma_2}{g^3} - \frac{\gamma_1}{g^4} \right) \eta + \dots,$$

где точки обозначают члены третьего и более высоких порядков по $(\xi, \eta, \gamma_1, \gamma_2)$. Система на центральном многообразии записывается как

$$\dot{\xi} = \eta \left(1 + \left(1 - \frac{1}{g^2} \right) \left(\gamma_2 + (\gamma_1 - g\gamma_2) \left(\frac{\gamma_2}{g^3} - \frac{\gamma_1}{g^4} \right) \right) \right) +$$

$$\begin{aligned}
& +\xi \left(1 - \frac{1}{g^2}\right) \left(\gamma_1 + (\gamma_1 - g\gamma_2) \frac{\gamma_1}{g^3}\right) - \frac{1}{g} \left(1 - \frac{1}{g^2}\right) \xi^3 + \dots, \\
\dot{\eta} = & \eta \frac{1}{g} \left(\gamma_2 + (\gamma_1 - g\gamma_2) \left(\frac{\gamma_2}{g^3} - \frac{\gamma_1}{g^4}\right)\right) + \xi \frac{1}{g} \left(\gamma_1 + (\gamma_1 - g\gamma_2) \frac{\gamma_1}{g^3}\right) - \\
& - \frac{1}{g^2} \xi^3 + \dots,
\end{aligned}$$

где точки обозначают члены порядка выше третьего по $(\xi, \eta, \gamma_1, \gamma_2)$. Последним шагом является такая замена переменной η , в результате которой первое уравнение примет вид $\dot{\xi} = \eta$. Окончательно система записывается как

$$\begin{aligned}
\dot{\xi} &= \eta, \\
\dot{\eta} &= \varepsilon_1 \xi + \varepsilon_2 \eta - \frac{1}{g^2} \xi^3 + 3 \frac{1 - g^2}{g^3} \xi^2 \eta + \dots,
\end{aligned}$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{\gamma_1}{g} \left(1 + \gamma_1 \frac{1}{g^3} + \gamma_2 \left(1 - \frac{2}{g^2}\right)\right)$$

и

$$\varepsilon_2 = \gamma_1 - (\gamma_1 - g\gamma_2) \frac{g^3 + 1}{g^5} - (\gamma_1 - g\gamma_2)^2 \frac{1}{g^5}.$$

С.4.№48. Уравнение цепи Чуа можно перепараметризовать так, чтобы система записывалась в виде

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= a(y + c_0 x - c_1 x^3), \\
\dot{y} &= x - y + z, \\
\dot{z} &= -by.
\end{aligned} \tag{C.4.4}$$

Тогда y в пределе $(a, b) \rightarrow 0$ становится быстрой переменной, и динамика исходной системы (С.4.4) ограничивается на медленное многообразие $y = x + z$. Соответствующая медленная система задается как

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \gamma(x + z + c_0 x - c_1 x^3), \\
\dot{z} &= -x - z,
\end{aligned} \tag{C.4.5}$$

где $\gamma = a/b$ — параметр. Выразим z из первого уравнения:

$$z = \dot{x}/\gamma - x - c_0 x + c_1 x^3$$

и подставим это выражение во второе уравнение в (С.4.5):

$$\dot{z} = -\dot{x}/\gamma + c_0x - c_1x^3.$$

Поскольку

$$\dot{z} = \ddot{x}/\gamma - (1 + c_0 - 3c_1x^2))\dot{x},$$

мы получаем

$$\ddot{x} - (\gamma(1 + c_0 - 3c_1x^2) - 1)\dot{x} + \gamma(c_0x - c_1x^3) = 0.$$

Положив $\dot{x} = u$, мы можем переписать это уравнение в виде

$$\dot{x} = u,$$

$$\dot{u} = c_0x + (\gamma - 1 + \gamma c_0)u - 3\gamma c_1x^2u - \gamma c_1x^3,$$

что совпадает с нормальной формой Хорозова–Такенса.

С.4.№49. Вывод нормальной формы для состояния равновесия с тремя характеристическими показателями в модели лазера с насыщающимся поглотителем [191]:

$$\begin{aligned}\dot{E} &= -E + P_1 + P_2, \\ \dot{P}_1 &= -\delta_1 P_1 - E(m_1 + M_1), \\ \dot{P}_2 &= -\delta_2 P_2 - E(m_2 + M_2), \\ \dot{M}_1 &= -\rho_1 M_1 + EP_1, \\ \dot{M}_2 &= -\rho_2 M_2 + \beta EP_2.\end{aligned}\tag{C.4.6}$$

Здесь E , P_1 и P_2 — медленные огибающие электрического поля и поляризации в активной и пассивной средах. M_1 и M_2 — отклонения населенности в активной и пассивной средах от их значений $m_1 < 0$ и $m_2 > 0$ в отсутствие лазерного поля. δ_1 и δ_2 (ρ_1 и ρ_2) — скорости трансверсальной (продольной) релаксации в активной и пассивной средах, нормализованные на скорость релаксации резонатора, β — отношение интенсивностей насыщения для внутрирезонаторных сред.

Линейная устойчивость тривиального состояния равновесия

$$E = P_1 = P_2 = M_1 = M_2 = 0$$

определяется собственными числами матрицы Якоби

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -m_1 & -\delta_1 & 0 & 0 & 0 \\ -m_2 & 0 & -\delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho_2 \end{pmatrix},$$

которые являются корнями характеристического уравнения

$$(\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0)(\lambda + \rho_1)(\lambda + \rho_2),$$

где

$$\begin{aligned} a_2 &= 1 + \delta_1 + \delta_2, \\ a_1 &= m_1 + m_2 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_1\delta_2, \\ a_0 &= m_2\delta_1 + m_1\delta_2 + \delta_1\delta_2. \end{aligned}$$

Пусть $\delta_1 - \delta_2 > 0$, тогда в точке коразмерности 3, заданной условиями

$$\begin{aligned} m_1 = m_{01} &= -\frac{\delta_1^2(1 + \delta_2)}{\delta_1 - \delta_2} < 0, \\ m_2 = m_{02} &= \frac{\delta_2^2(1 + \delta_1)}{\delta_1 - \delta_2} > 0, \quad \rho_1 = 0, \end{aligned} \tag{C.4.7}$$

матрица Якоби J имеет трижды вырожденное нулевое собственное число геометрической кратности 2:

$$\lambda_{1,2,3} = 0, \quad \lambda_4 = \rho_2, \quad \lambda_5 = -\Lambda = -(1 + \delta_1 + \delta_2).$$

После линейной замены координат

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} E \\ P_1 \\ P_2 \\ M_1 \\ M_2 \end{pmatrix},$$

где

$$U = \begin{pmatrix} 1 + \delta_2 & \frac{\delta_1(1 + \delta_2) - \delta_2}{\delta_1^2} & 1 & 0 & 0 \\ \delta_2 & \frac{\delta_2}{\delta_1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -(1 + \delta_1) & \frac{1 + \delta_1}{1 + \delta_2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

такова, что

$$\mathbf{U}\mathbf{J}\mathbf{U}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho_2 \end{pmatrix},$$

система (С.4.6) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - \frac{1}{\Lambda^2} \left[\frac{\delta_1 - \delta_2(1 - \delta_1)}{\delta_1^2} (x_3 + \xi_1) + (x_5 + \xi_2) \right] S(x_1, x_2, x_4), \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{\Lambda^2} \left(\frac{\delta_2}{\delta_1} (x_3 + \xi_1) + (x_5 + \xi_2) \right) S(x_1, x_2, x_4), \\ \dot{x}_3 &= -\rho_1 x_3 - \frac{m_{01}}{\Lambda^4} [\Lambda x_1 - (1 + \Lambda)x_2 + x_4] S(x_1, x_2, x_4), \\ \dot{x}_4 &= -\Lambda x_4 - \frac{1}{\Lambda^2} \left(\frac{1 + \delta_1}{1 + \delta_2} (x_3 + \xi_1) + (x_5 + \xi_2) \right) S(x_1, x_2, x_4), \\ \dot{x}_5 &= -\rho_2 x_5 - \frac{\beta}{\Lambda^4} \left[\frac{m_{02}}{\delta_2^2} (\Lambda \delta_1 \delta_2 x_1 - (\Lambda \delta_1 - \delta_2)(1 + \delta_2)x_2) - \frac{\delta_2^2 m_{01}}{\delta_1^2} x_4 \right] \times \\ &\quad \times S(x_1, x_2, x_4). \end{aligned}$$

Здесь m_{01} и m_{02} даны в (С.4.7), $\xi_1 = m_1 - m_{01}$, $\xi_2 = m_2 - m_{20}$, и ρ_1 — малые параметры, и

$$S(x_1, x_2, x_4) = \delta_1 \Lambda (x_1 - x_2) + (1 + \delta_2)(x_2 - x_4).$$

После редукции на центральное многообразие (мы просто подставляем $x_4 = x_5 = 0$ в первые три уравнения) получаем (точки обозначают члены порядка 3 и выше):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + ax_1(x_3 + \xi_1) + bx_2(x_3 + \xi_1) + \xi_2 s(x_1, x_2) + \dots, \\ \dot{x}_2 &= -cx_1(x_3 + \xi_1) + dx_2(x_3 + \xi_1) + \xi_2 s(x_1, x_2) + \dots, \\ \dot{x}_3 &= -\rho_1 x_3 + ex_1^2 + fx_1 x_2 + gx_2^2 + \dots, \end{aligned}$$

где

$$s(x_1, x_2) = -\frac{\delta_1}{\Lambda} x_1 - \frac{1 + \delta_2 - \delta_1 \Lambda}{\Lambda^2} x_2, \quad a = -\frac{\delta_1 - (1 - \delta_1)\delta_2}{\Lambda \delta_1},$$

$$b = \frac{(\delta_1 - (1 - \delta_1)\delta_2)(\Lambda\delta_1 - (1 + \delta_2))}{\Lambda^2\delta_1^2}, \quad c = \frac{\delta_2}{\Lambda},$$

$$d = \frac{\delta_2(\Lambda\delta_1 - 1 - \delta_2)}{\Lambda^2\delta_1}, \quad e = -\frac{\delta_1 m_{01}}{\Lambda^2}$$

и

$$f = \frac{m_{01}(\delta_1(1 + 2\Lambda) - 1 - \delta_2)}{\Lambda^3}, \quad g = -\frac{m_{01}(1 + \Lambda)(\Lambda\delta_1 - 1 - \delta_2)}{\Lambda^4}.$$

После преобразования координат

$$x_1 = z_1,$$

$$x_2 = z_2 - az_1(z_3 + \xi_1) - bz_2(z_3 + \xi_1) - \xi_2 s(z_1, z_2),$$

$$x_3 = z_3 + \frac{f}{2}z_1^2 + gz_2z_1$$

получаем

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 + \dots, \\ \dot{z}_2 &= \epsilon_1 z_1 + \epsilon_2 z_2 - cz_1 z_3 + d' z_2 z_3 + \dots, \\ \dot{z}_3 &= -\rho_1 z_3 + ez_1^2 + \dots, \end{aligned} \quad (\text{C.4.8})$$

где

$$c = \frac{\delta_2}{\Lambda}, \quad e = -\frac{\delta_1 m_{01}}{\Lambda^2}, \quad d' = -\frac{1 + \delta_1}{\Lambda^2}$$

и малые параметры $\epsilon_{1,2}$ задаются как

$$\epsilon_1 = -\frac{\xi_1 \delta_2 + \delta_1 \xi_2}{\Lambda}, \quad \epsilon_2 = -\frac{(1 + \delta_1)\xi_1 + (1 + \delta_2)\xi_2}{\Lambda^2}.$$

Мы изменим масштаб малых параметров следующим образом:

$$\epsilon_1 = \varepsilon^2, \quad \epsilon_2 = \mu\varepsilon, \quad \rho_1 = \rho\varepsilon.$$

Отбрасывая члены третьего порядка и изменяя масштаб переменных $z_1 = x\varepsilon^{3/2}/\sqrt{ce}$, $z_2 = y\varepsilon^{5/2}/\sqrt{ce}$, $z_3 = z\varepsilon^2/c$, мы приходим к следующей асимптотической нормальной форме:

$$\frac{dx}{d\tau} = y, \quad \frac{dy}{d\tau} = x + \mu y - xz, \quad \frac{dz}{d\tau} = -\rho z + x^2, \quad (\text{C.4.9})$$

которая совпадает с моделью Шимицу–Мориока.

С.4.№50. Пусть якобиан системы, линеаризованной в состоянии равновесия, имеет три нулевых собственных числа. Кроме того, пусть система на центральном многообразии имеет симметрию $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$, где координаты y, z — это проекции на собственные векторы, а x — проекция на присоединенный вектор. Тогда, в общем случае, эту систему можно свести к следующему виду:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x[\bar{\mu} - az(1 + g(x, y, z)) - a_1(x^2 + y^2)(1 + \dots)] - \\ &\quad - y[\bar{\alpha} + a_2z(1 + \dots) + a_3(x^2 + y^2)(1 + \dots)], \\ \dot{z} &= -\bar{\beta} + z^2(1 + \dots) + b(x^2 + y^2)(a + \dots),\end{aligned}\tag{C.4.10}$$

где $a_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3$ и $b \neq 0$. Здесь $\bar{\mu}$, $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ — малые параметры, а g и точки обозначают члены, которые обращаются в нуль в начале координат. Предположим, что $ab > 0$. Пусть $\tau^2 = \mu + a\sqrt{\beta}(1 + g(0, 0, -\sqrt{\beta})) > 0$, $\bar{\beta} > 0$. Нормировкой времени $t \rightarrow s/\tau$ и заменой координат

$$x \rightarrow x\sqrt{\frac{\tau^3}{ab}}, \quad y \rightarrow \tau y\sqrt{\frac{\tau^3}{ab}}, \quad z \rightarrow -\sqrt{\bar{\beta}} + \frac{\tau^2}{a}z$$

а также вводя новые параметры $\bar{\alpha} = \alpha\tau$ и $\bar{\beta} = (\beta\tau/2)^2$, мы получим следующую систему:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x(1 - z) - \alpha y + O(\tau), \\ \dot{z} &= -\beta z + x^2 + O(\tau),\end{aligned}\tag{C.4.11}$$

где α и β — параметры, но уже не малые. Отбрасывая члены порядка τ , мы получаем модель Шимицу–Мориока.

С.4.№51. Дополнительно к условиям предыдущего случая, пусть система инвариантна по отношению к инволюции $(x, y, z) \rightarrow (x, y, -z)$, т.е. она обладает двумя симметриями. Тогда систему в нормальной форме можно записать как

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x[\bar{\mu} - az^2(1 + g(x, y, z^2)) - b(x^2 + y^2)(1 + \dots)] - \\ &\quad - y[\bar{\alpha} + a_1z^2(1 + \dots) + b_1(x^2 + y^2)(1 + \dots)], \\ \dot{z} &= z(\bar{\beta} - cz^2(1 + \dots) + d(x^2 + y^2)(a + \dots)).\end{aligned}\tag{C.4.12}$$

Предположим, что $c > 0$ и $ad > 0$. В области параметров $\tau^2 = \bar{\mu} - a\bar{\beta}c(1 + g(0, 0, \bar{\beta}/c)) > 0$ и $\beta > 0$ проведем ренормализацию:

$$t \rightarrow s/\tau, \quad x \rightarrow x\tau\sqrt{\frac{c}{ad}}, \quad y \rightarrow \tau^2 y\sqrt{\frac{c}{ad}}, \quad z \rightarrow \sqrt{\frac{\bar{\beta}}{c} + \frac{\tau^2}{a}}z$$

и $\bar{\alpha} = \tau\alpha$, $\bar{\beta} = \tau\beta/2$. Обозначив $B = \frac{bc}{ad}$ и опустив члены порядка τ , мы приходим к следующей системе:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x(1 - z) - \alpha y + Bx^3, \\ \dot{z} &= -\beta(z - x^2). \end{aligned} \tag{C.4.13}$$

Вышеприведенная система примечательна тем, что к ней сводится система Лоренца при $r > 1$. Соотношение между параметрами двух систем задается как

$$\beta = \frac{b}{\sigma(r-1)}, \quad \alpha = \frac{1+\sigma}{\sigma(r-1)}, \quad B = \frac{b}{2\sigma-b}.$$

Из этих соотношений следует, что область положительных параметров (r, b, σ) в уравнении Лоренца ограничена плоскостью $\beta = 0$ и поверхностью $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{2}(\frac{1}{B} + 1)$, которая стремится к $\beta = 0$ при $B \rightarrow 0$.

Надо также отметить, что система Шимицу–Мориока является частным случаем (т. е. $B = 0$) системы Лоренца в виде (C.4.13).

С.4.№52. *Бифуркация периодической орбиты с тремя мультипликаторами, равными +1.* На центральном многообразии мы вводим координаты (x, y, z, ψ) , где ψ — угловая координата, а (x, y, z) — нормальные координаты (см. параграф 3.10). При предположении, что инвариантно преобразования $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$ нормальная форма, укороченная до членов второго порядка, имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x(\bar{\mu} - az) - y(\bar{\alpha} + a_2z), \\ \dot{z} &= -\bar{\beta} + z^2 + b(x^2 + y^2), \\ \dot{\psi} &= 1. \end{aligned} \tag{C.4.14}$$

Эта система аналогична системе Шимицу–Мориока, т. к. первые три уравнения в вышеприведенной системе не зависят от четвертого.

С.4.№53. Ниже мы приводим (следуя [185]) список асимптотических нормальных форм, которые описывают поведение траекторий около трижды вырожденного состояния равновесия вблизи границы устойчивости в системах с дискретной симметрией. Мы говорим, что имеется *тройная неустойчивость*, когда динамическая система имеет такое состояние равновесия, что соответствующая линеаризованная задача имеет три нулевых собственных числа. В таком случае анализ сводится к трехмерной системе на центральном многообразии. Обозначим через (x, y, z) координаты на трехмерном центральном многообразии и предположим, что состояние равновесия, претерпевающее бифуркацию, находится в начале координат. Мы полагаем также, что наша система эквивариантна по отношению к преобразованию $(x, y, z) \leftrightarrow (-x, -y, z)$.

Отметим, что ниже перечисленные системы имеют физический смысл и возникают в практических прикладных задачах, например, в приведенных выше лазерных уравнениях. Таким образом, этот метод можно рассматривать как способ исключения посторонних членов в нелинейности, а также выбора тех нелинейных членов, которые ответственны за конкретные детали поведения.

В дополнение к предположению симметрии, мы будем также предполагать, что линейная часть системы вблизи начала координат O , ограниченная на инвариантную плоскость $z = 0$, имеет полный жорданов блок. Тогда систему в ограничении на центральном многообразии можно локально записать в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x(az + F(x^2, xy, y^2, z)) + yG(y^2, z), \\ \dot{z} = H(x^2, xy, y^2, z), \end{cases} \quad (\text{C.4.15})$$

где ни $H(0, 0, 0, z)$, ни $F(0, 0, 0, z)$ не содержат линейных членов.

Рассмотрим трехпараметрическое возмущение вида

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x(\mu_1 + az + F(x^2, xy, y^2, z)) + y(-\mu_2 + G(y^2, z)), \\ \dot{z} = -\mu_3 z + H(x^2, xy, y^2, z), \end{cases} \quad (\text{C.4.16})$$

где $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ — малые параметры, а функции F , G и H также могут зависеть от μ .

Предположим, что

$$a \neq 0. \quad (\text{C.4.17})$$

Тогда очевидно, что замена координаты z приводит (С.4.16) к следующему виду (с некоторыми новыми функциями G и H):

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x(\mu_1 - z) + y(-\mu_2 + G(y^2, z)), \\ \dot{z} = -\mu_3 z + H(x^2, xy, y^2, z). \end{cases} \quad (\text{С.4.18})$$

Изменим масштаб переменных и времени:

$$x \rightarrow \delta_x x, \quad y \rightarrow \delta_y y, \quad z \rightarrow \delta_z z, \quad t \rightarrow t/\tau,$$

где $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ и τ — малые множители. Мы полагаем, что $\mu_1 \neq 0$ и

$$\delta_y = \tau \delta_x, \quad \delta_z = \tau^2 = |\mu_1|.$$

Тогда (С.4.18) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x(\pm 1 - z) - \lambda y + O(\tau), \\ \dot{z} = -\alpha z + H(\delta_x^2 x^2, \tau \delta_x^2 xy, \tau^2 \delta_x^2 y^2, \tau^2 z)/\tau^3, \end{cases} \quad (\text{С.4.19})$$

где α и λ — перемасштабированные параметры, уже не малые:

$$\alpha = \mu_3/\sqrt{|\mu_1|}, \quad \lambda = \mu_2/\sqrt{|\mu_1|}.$$

Асимптотической нормальной формой является конечный предел системы (С.4.19) при $\mu \rightarrow 0$. Отметим, что различный выбор соотношения между масштабными факторами δ_x и τ дает различные нормальные формы.

В последнем уравнении (С.4.19) члены, которые содержат z^2, y^3 и yz , стремятся к нулю при $\tau \rightarrow 0$. Таким образом, отбрасывая малые члены, мы преобразуем (С.4.19) в

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x(\pm 1 - z) - \lambda y, \\ \dot{z} = -\alpha z + \delta_x^2 x^2 H_1(\delta_x^2 x^2)/\tau^3 + \delta_x^2 xy H_2(\delta_x^2 x^2)/\tau^2 + \\ \quad + \delta_x^2 y^2 H_3(\delta_x^2 x^2)/\tau + \delta_x^2 z x^2 H_4(\delta_x^2 x^2)/\tau. \end{cases} \quad (\text{С.4.20})$$

Правая часть (С.4.20) должна быть конечной, т. е. если разложение Тейлора для функций H_i начинается с x^{2m_i} при нулевых значениях параметров

возмущения μ_1, μ_2 и μ_3 , то должны выполняться следующие неравенства:

$$\begin{aligned}\delta_x^{2(m_1+1)} / \tau^3 &< \infty, \\ \delta_x^{2(m_2+1)} / \tau^2 &< \infty, \\ \delta_x^{2(m_3+1)} / \tau &< \infty, \\ \delta_x^{2(m_4+1)} / \tau &< \infty.\end{aligned}$$

Отсюда мы можем выбрать τ так, что

$$\tau \sim \delta_x^\beta, \quad (\text{C.4.21})$$

где

$$\beta = \min \left\{ \frac{2}{3}(m_1 + 1), m_2 + 1, 2(m_3 + 1), 2(m_4 + 1) \right\}. \quad (\text{C.4.22})$$

Например, в наименее вырожденном случае, когда $H_i(0) \neq 0$ ($i = 1, \dots, 4$), показатель $\beta = 2/3$ в (C.4.21) и (C.4.22). Тогда система (C.4.20) сводится к

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x(\pm 1 - z) - \lambda y, \\ \dot{z} = -\alpha z + x^2 H_1(0) + O(\tau). \end{cases} \quad (\text{C.4.23})$$

В пределе $\tau \rightarrow 0$ эта система становится моделью Шимицу–Мориока, где параметры α и λ могут принимать произвольные конечные значения.

Теперь рассмотрим дополнительное выражение: $H_1(0) = 0$ и $H'_1(0) \neq 0$. Чтобы изучать бифуркации в этом случае, надо добавить новый независимый управляющий параметр, которым является постоянный член в разложении Тейлора для H_1 . Если мы в соответствие с (C.4.22) положим $\beta = 1$, то система (C.4.20) сведется к следующей асимптотической форме:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x(\pm 1 - z) - \lambda y, \\ \dot{z} = -\alpha z + x^2 \tilde{h}_{10} + H_2(0)xy, \end{cases} \quad (\text{C.4.24})$$

которая эквивалентна системе Лоренца. При этом $\tilde{h}_{10} = H_1(0)/\tau$ — отмасштабированный третий управляющий параметр, который может принимать произвольные конечные значения.

Следующее вырождение $H_2(0) = 0$, $H'_2(0) \neq 0$ изменяет третье уравнение в (С.4.24) таким образом:

$$\dot{z} = -\alpha z + x^2 \tilde{h}_{10} + \tilde{h}_{20}xy + H'_1(0)x^4, \quad (\text{С.4.25})$$

где $\tilde{h}_{10} = H_1(0)/\tau^{3/2}$ и $\tilde{h}_{20} = H_2(0)/\tau^{1/2}$. Здесь $\beta = 4/3$.

Повторяя эту процедуру, мы получаем иерархию асимптотических нормальных форм. Обозначим

$$H_i(x^2) = \sum_j^{\infty} H_{ij}x^{2j}.$$

Пусть в момент бифуркации значения H_{ij} с $j = 0, \dots, m_i - 1$ обращаются в нуль. Как и ранее, мы можем рассматривать эти ненулевые H_{ij} в качестве дополнительных независимых малых параметров.

Очевидно, что в отнормированной системе (С.4.20) ненулевые коэффициенты будут только у тех членов, которые соответствуют таким m_i , для которых достигается минимум в (С.4.22); все члены более высокого порядка обращаются в нуль в пределе $\tau \rightarrow 0$. Члены степени, меньше чем $2m_i$, которые появляются в H_i при ненулевых значениях параметра, также сохраняются после нормировки; их отнормированные коэффициенты рассматриваются как независимые параметры, которые могут принимать произвольные конечные значения.

Таким образом, если мы избавимся от всех асимптотически стремящихся к нулю членов, система (С.4.20) примет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x(\pm 1 - z) - \lambda y, \\ \dot{z} = -\alpha z + x^2 \tilde{H}_1(x^2) + xy \tilde{H}_2(x^2) + y^2 \tilde{H}_3(x^2) + zx^2 \tilde{H}_4(x^2), \end{cases} \quad (\text{С.4.26})$$

где $\tilde{H}_i$ — такие полиномы степени n , для которых

$$\begin{aligned} \max \left\{ \frac{2}{3}(n_1 + 1), n_2 + 1, 2(n_3 + 1), 2(n_4 + 1) \right\} = \\ = \frac{1}{\beta} < \min \left\{ \frac{2}{3}(n_1 + 2), n_2 + 2, 2(n_3 + 2), 2(n_4 + 2) \right\} \end{aligned} \quad (\text{С.4.27})$$

(если какой-то из $\tilde{H}_i$ обращается в нуль тождественно, то мы полагаем $n_i = -1$). Коэффициенты многочленов $\tilde{H}_{ij}$ задаются следующим образом:

$$\tilde{h}_{ij} = H_{ij}/\tau^{s_i - \frac{2(j+1)}{\beta}},$$

где $s_1 = 3, s_2 = 2, s_3 = s_4 = 1$.

Непосредственно из (С.4.27) следует, что $n_3 = n_4$, т.е. степени $\tilde{H}_3$ и $\tilde{H}_4$ всегда равны. Следовательно, список асимптотических нормальных форм, (С.4.26), (С.4.27), можно упорядочить по возрастанию общей степени $n (= n_3 = n_4)$.

Первыми в списке стоят системы (С.4.23), (С.4.24) и (С.4.25), что соответствует $n = -1$. Для каждой большей степени n есть 4 приведенных ниже случая. Каждый последующий случай отвечает дополнительным вырождением. Этот список цикличен: после четвертого случая мы возвращаемся к началу с $n = n + 1$ и так далее.

- (1) $n_1 = 3n + 2, n_2 = 2n + 1$; в момент бифуркации первые $(n - 1)$ коэффициентов обращаются в нуль как у H_3 , так и у H_4 , первые $2n$ и $(3n + 1)$ коэффициентов обращаются в нуль у H_2 и H_1 соответственно.
- (2) $n_1 = 3n + 3, n_2 = 2n + 1$; в момент бифуркации первые n коэффициентов обращаются в нуль как у H_3 , так и у H_4 , первые $(2n + 1)$ и $(3n + 2)$ коэффициентов обращаются в нуль у H_2 и H_1 соответственно.
- (3) $n_1 = 3n + 3, n_2 = 2n + 2$; в момент бифуркации первые n коэффициентов обращаются в нуль как у H_3 , так и у H_4 , первые $(2n + 1)$ и $(3n + 3)$ коэффициентов обращаются в нуль у H_2 и H_1 соответственно.
- (4) $n_1 = 3n + 4, n_2 = 2n + 2$; в момент бифуркации первые n коэффициентов обращаются в нуль как у H_3 , так и у H_4 , первые $(2n + 2)$ и $(3n + 3)$ коэффициентов обращаются в нуль в H_2 и H_1 соответственно.

С.5. Поведение на границах устойчивости

С.5.№54. Устойчивый предельный цикл рождается из бесконечности в системе

$$\dot{x} = x - y - a(x^2 + y^2)x, \quad (С.5.1)$$

$$\dot{y} = x + y - a(x^2 + y^2)y$$

при $a = 0$. При этом значении a система становится линейной:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - y, \\ \dot{y} &= x + y, \end{aligned} \quad (С.5.2)$$

и имеет неустойчивый фокус в начале координат. Можно составить функцию Ляпунова $V(x, y) = x^2 + y^2$ и убедиться, что все орбиты уходят на бесконечность (т.е. бесконечность является устойчивой), поскольку производная от функции Ляпунова по времени $\dot{V}(x, y) = 2(x^2 + y^2)$ положительна и, следовательно, каждый уровень $(x^2 + y^2) = C$ является кривой без контакта и каждая траектория должна выходить вонне каждой такой кривой при возрастании времени.

Когда $a \neq 0$, мы имеем

$$\frac{d(x^2 + y^2)}{dt} = 2(x^2 + y^2)(1 - a(x^2 + y^2)).$$

Очевидно, что $\dot{V}(x, y) < 0$, если $x^2 + y^2 > 1/a$, и $\dot{V}(x, y) > 0$, когда $V < 1/a$. Таким образом, $x^2 + y^2 = 1/a$ — устойчивая инвариантная кривая (предельный цикл), и все траектории (за исключением состояния равновесия в начале координат) стремятся к ней при $t \rightarrow +\infty$.

С.5.№55. [25]. Объясните, как устойчивый предельный цикл (рис. С.5.1) для системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - x(ax^2 + y^2 - 1), \\ \dot{y} &= -ay - y(ax^2 + y^2 - 1) \end{aligned} \quad (\text{С.5.3})$$

эволюционирует при $a \rightarrow +0$.

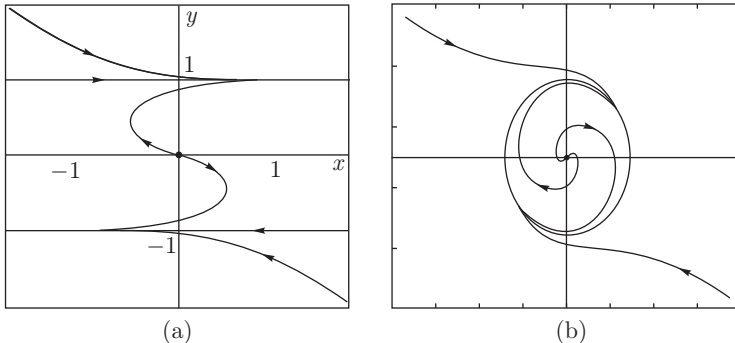


Рис. С.5.1. Предельный цикл в (С.5.3) для $a > 0$ (b) и при $a = 0$ (a)

С.5.№56. Найдите функцию Ляпунова для нормальной формы Хорозова–Тakensа.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x^3 - x^2 y. \end{aligned}$$

С.5.№57. Объясните роль y^3 для асимптотической устойчивости следующей системы: найдите подходящую функцию Ляпунова.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= ay + x - x^3 - by^3. \end{aligned}$$

Здесь a и b — некоторые управляющие параметры.

С.5.№58. Докажите глобальную асимптотическую устойчивость системы Лоренца

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma(x - y), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy\end{aligned}\tag{С.5.4}$$

при $r < 1$, $\sigma > 0$ и $b > 0$.

Следующая функция

$$V_0(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + \sigma y^2 + \sigma z^2)$$

является функцией Ляпунова, поскольку ее производная по времени

$$\dot{V}_0 = -\sigma(x^2 - (1 - r)xy + y^2 + bz^2)$$

— отрицательно определенная квадратная форма.

С.5.№59. Докажите, что в системе Лоренца бесконечность неустойчива.

Решение. Производная функции

$$V(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + (z - r - \sigma)^2$$

по времени имеет вид

$$\dot{V}(x, y, z) = x\dot{x} + y\dot{y} + (z - \sigma - r)\dot{z} = -\sigma x^2 - y^2 - b\left(z - \frac{r + \sigma}{2}\right)^2 + \frac{b}{4}(r + \sigma)^2.$$

Условие $\dot{V} = 0$ определяет эллипсоид, вне которого производная отрицательна. Таким образом, все «внешние» положительные полутраектории системы Лоренца входят внутрь поверхности

$$\sigma x^2 + y^2 + b\left(z - \frac{r + \sigma}{2}\right)^2 = \frac{b}{4}(r + \sigma)^2.$$

С.5.№60. Докажите, что в цепи Чуа, заданной уравнением

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(y + x/6 - x^3/6), \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -by,\end{aligned}\tag{С.5.5}$$

бесконечность неустойчива. Используйте функцию Ляпунова

$$V_0(x, y, z) = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2b}$$

и исследуйте ее производную по времени

$$\dot{V}_0 = \frac{x\dot{x}}{a} + y\dot{y} + \frac{z\dot{z}}{b} = \frac{1}{6}(x^2 - x^4) + 2xy - y^2$$

при больших x и y .

С.5.№61. Рассмотрите следующее возмущение в нормальной форме Богданова–Тakensа

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \mu y - \varepsilon^2 x + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + Q(x, y),\end{aligned}\tag{C.5.6}$$

где μ и ε малы, а $Q(x, y)$ начинается с членов третьего порядка. Легко видеть, что начало координат $O(0, 0)$ — слабый фокус при $\mu = 0$ и малых $\varepsilon \neq 0$: характеристические корни равны $\pm i\varepsilon$. Для того чтобы определить устойчивость слабого фокуса, сначала отнормируем переменные $x \mapsto \varepsilon^2 x$, $y \mapsto \varepsilon^3 y$ и время $t \mapsto \varepsilon^{-1}t$. Система примет вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x + a_{20}x^2 + \varepsilon a_{11}xy + O(\varepsilon^2).\end{aligned}\tag{C.5.7}$$

Следующее нормализующее преобразование координат

$$x_{\text{new}} = x - \frac{a_{20}}{3}(x^2 + 2y^2) + \frac{\varepsilon}{3}a_{11}xy, \quad y_{\text{new}} = \dot{x}_{\text{new}}$$

приводит систему к виду

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x + 2a_{20}^2 \left(x^3 - \frac{4}{3}xy^2 \right) + \varepsilon a_{20}a_{11} \left(5x^2y - \frac{4}{3}y^3 \right) + O(\varepsilon^2) + \dots,\end{aligned}$$

где точки обозначают члены порядка выше третьего. Таким образом, мы убили все квадратичные члены (вплоть до членов $O(\varepsilon^2)$), и теперь можно непосредственно вычислять первую ляпуновскую величину. Так, мы введем комплексную переменную $z = x + iy$ так, что система запишется как

$$\dot{z} = -iz + \left(\frac{\varepsilon}{8}a_{20}a_{11} + i\frac{5}{12}a_{20}^2 + O(\varepsilon^2) \right) z^2 z^* + \dots,$$

где точки обозначают члены третьего и более высоких порядков. Первая ляпуновская величина равна действительной части коэффициента при $z^2 z^*$, т. е.

$$L_1 = \frac{\varepsilon}{8}[a_{20}a_{11} + O(\varepsilon)].$$

Следовательно, при малых ε слабый фокус устойчив, если $a_{20}a_{11} < 0$, и неустойчив, если $a_{20}a_{11} > 0$. При условии, что $a_{20}a_{11} \neq 0$, из слабого фокуса при $\varepsilon \neq 0$ рождается только один предельный цикл.

С.5.№62. Дадим общую формулу для первой ляпуновской величины слабого фокуса трехмерной системы

$$\ddot{\xi} + P\dot{\xi} + Q\xi + R\xi = f(\xi, \dot{\xi}, \ddot{\xi}),$$

где f — нелинейность (т. е. ее ряд Тейлора в начале координат начинается с квадратичных членов), а коэффициенты, P , Q , R удовлетворяют соотношению

$$PQ = R, \quad Q > 0.$$

Обозначая $y \equiv (y_1, y_2, y_3) = (\xi, \dot{\xi}, \ddot{\xi})$, мы можем переписать данное уравнение как

$$\dot{y} = Ay + f(y) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -R & -Q & -P \end{pmatrix}.$$

Собственные числа матрицы A равны $-P$ и $\pm i\omega$, с $\omega^2 = Q$. Соответствующими собственными векторами являются

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -P \\ P^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \\ -Q \end{pmatrix}, \text{ и } \begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega \\ -Q \end{pmatrix},$$

а собственные векторы транспонированной матрицы заданы соответственно как

$$\begin{pmatrix} Q \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P\omega \\ \omega - iP \\ -i \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} P\omega \\ \omega + iP \\ i \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы можем ввести новые переменные $u \in R^1$ и $z \in C^1$ следующим образом:

$$y = u \begin{pmatrix} 1 \\ -P \\ P^2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \\ -Q \end{pmatrix} + z^* \begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega \\ -Q \end{pmatrix}.$$

Производные $\dot{u}$ и $\dot{z}$ вычисляются по следующему правилу:

$$\dot{u} = \frac{1}{Q + P^2}(Q\dot{y}_1 + \dot{y}_3), \quad \dot{z} = \frac{1}{2P\omega}(P\omega\dot{y}_1 + (\omega - iP)\dot{y}_2 - i\dot{y}_3),$$

таким образом, мы приходим к системе, линейная часть которой диагональна:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -Pu + \alpha_1 z^2 + \alpha_2 z z^* + \dots, \\ \dot{z} &= i\omega z + \beta_1 z^2 + \beta_2 z z^* - \beta_1^* z^{*2} + \gamma u z - \gamma^* u z^* + \delta z^2 z^* + \dots, \end{aligned} \quad (\text{C.5.8})$$

где точки обозначают нелинейные члены, которые не влияют на первую ляпуновскую величину. Если мы разложим нелинейность вплоть до членов третьего порядка:

$$f(y) = \sum c_{kj} y_j y_k + \sum d_{kjl} y_k y_j y_l + \dots, \quad (\text{C.5.9})$$

то коэффициенты $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ в (C.5.8) находятся следующим образом:

$$\begin{aligned} (Q + P^2)\alpha_1 &= 2iP\omega\beta_1 = \sum c_{kj}(i\omega)^{k+j-2}, \\ (Q + P^2)\alpha_2 &= 2iP\omega\beta_2 = -\sum((-1)^k + (-1)^j)c_{kj}(i\omega)^{k+j-2}, \\ \gamma &= \frac{1}{2} \sum c_{kj}((-P)^{k-2}(i\omega)^{j-2} + (-P)^{j-2}(i\omega)^{k-2}), \\ \delta &= -\frac{1}{2PQ^2} \sum d_{kjl}(i\omega)^{k+j+l}((-1)^k + (-1)^j + (-1)^l). \end{aligned} \quad (\text{C.5.10})$$

Центральное многообразие системы (C.5.8) имеет вид

$$u = \frac{\alpha_1}{P + i\omega} z^2 + \frac{\alpha_2}{P} z z^* + \dots$$

На центральном многообразии система принимает вид

$$\dot{z} = i\omega z + \beta_1 z^2 + \beta_2 z z^* - \beta_1^* z^{*2} + \left(\gamma \frac{\alpha_2}{P} - \gamma^* \frac{\alpha_1}{P + i\omega} + \delta \right) z^2 z^* + \dots \quad (\text{C.5.11})$$

Нормализующее преобразование

$$z_{\text{new}} = z + i\frac{\beta_1}{\omega}z^2 - i\frac{\beta_2}{\omega}zz^* + i\frac{\beta_1^*}{3\omega}z^{*2}$$

уничтожает все квадратичные члены, таким образом, система на центральном многообразии принимает вид

$$\dot{z} = i\omega z + (L_1 + i\Omega_1)z^2 z^* + \dots,$$

где

$$L_1 + i\Omega_1 = \frac{i}{\omega} \left(\beta_1\beta_2 - |\beta_1|^2 - \frac{2}{3}|\beta_2|^2 \right) + \gamma \frac{\alpha_2}{P} - \gamma^* \frac{\alpha_1}{P + i\omega} + \delta. \quad (\text{C.5.12})$$

По определению, L_1 — первая ляпуновская величина.

С.5.№63. Применим данный алгоритм, чтобы определить устойчивость негрубых состояний равновесия $O_{1,2}$ в модели Лоренца, см. параграф С.2. Для того чтобы найти, является ли соответствующая бифуркация Андронова–Хопфа суб- или надкритической на границе устойчивости этих состояний равновесия, мы найдем аналитическое выражение для первой ляпуновской величины L_1 .

Сначала, следуя [165, 186], сведем исходную систему

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma(x - y), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy\end{aligned}$$

к одному дифференциальному уравнению третьего порядка

$$\ddot{x} + (\sigma + b + 1)\dot{x} + b(1 + \sigma)\dot{x} + b\sigma(1 - r)x = \frac{(1 + \sigma)\dot{x}^2}{x} + \frac{\dot{x}\ddot{x}}{x} - x^2\dot{x} - \sigma x^3. \quad (\text{C.5.13})$$

Затем введем новую переменную $\xi = x - x_0$, где $x_0 = \pm\sqrt{b(r-1)}$ для $O_{1,2}$. Подчеркнем, что, для того чтобы найти первую ляпуновскую величину, нужны только квадратичные и кубические члены, а следовательно, в разложении $(x_0 + \xi)^{-1}$ достаточно членов первого порядка. Таким образом, уравнение (C.5.13) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} + (\sigma + b + 1)\dot{\xi} + [b(1 + \sigma) + x_0^2]\dot{\xi} + [b\sigma(1 - r) + 3\sigma x_0^2]\xi &= -3\sigma x_0\xi^2 - \\ - 2x_0\xi\dot{\xi} + \frac{1 + \sigma}{x_0}\xi^2 + \frac{1}{x_0}\xi\ddot{\xi} - \sigma\xi^3 - \xi^2\dot{\xi} - \frac{1 + \sigma}{x_0^2}\xi\xi^2 - \frac{1}{x_0^2}\xi\xi\dot{\xi} + \dots\end{aligned} \quad (\text{C.5.14})$$

Граница устойчивости O_1 и O_2 задается формулой

$$r = \sigma(\sigma + b + 3)(\sigma - b - 1)^{-1}.$$

Первая ляпуновская величина, вычисленная по вышеприведенному алгоритму, равна

$$L_1 = b[p^3q(p^2 + q)(p^2 + 4q)(\sigma - b - 1)]^{-1}B, \quad (\text{C.5.15})$$

где

$$B = [9\sigma^4 + (20 - 18b)\sigma^3 + (20b^2 + 2b + 10)\sigma^2 - \\ - (2b^3 - 12b^2 - 10b + 4)\sigma - b^4 - 6b^3 - 12b^2 - 10b - 3].$$

На границе устойчивости выполняется неравенство $\sigma > b + 1$. После подстановки $\sigma = \sigma_* + b + 1$ выражение для B становится полиномом от σ_* и b с положительными коэффициентами. Отсюда, если $\sigma_* > 0$ и $b > 0$, то $L_1 > 0$. Таким образом, оба состояния равновесия $O_{1,2}$ неустойчивы (седло-фокусы) на границе устойчивости. Сама граница опасна по определению главы 14. Соответствующая бифуркация $O_{1,2}$ Андронова–Хопфа является субкритической.

С.5.№64. Вычислите первую ляпуновскую величину для цепи Чуа (С.5.5). Проверьте, что при $c_1 = c_3 = 1/6$ она обращается в нуль в точке ($a \simeq 1,72886, b \simeq 1,816786$), обозначенной $L_1 = 0$ на кривой Андронова–Хопфа на рис. С.2.1. Эта точка коразмерности 2, из которой выходит кривая седло-узловых периодических орбит.

С.5.№65. Найдите уравнение для первой ляпуновской величины в системе Шимицу–Мориока (С.2.25), записанной в виде следующего дифференциального уравнения третьего порядка:

$$\ddot{x} + (a + b)\dot{x} + ab\dot{x} - bx + x^3 - \frac{a}{x}\dot{x}^2 - \frac{\dot{x}\ddot{x}}{x} = 0. \quad (\text{C.5.16})$$

Докажите, что она отрицательна (положительна) справа (слева) от точки ($a \simeq 1,359, b \simeq 0,1123$) на кривой бифуркации Андронова–Хопфа, заданной уравнением $(a + b)a - 2 = 0$.

С.6. Бифуркации неподвижных точек и периодических орбит

С.6.№66. Рассмотрим логистическое отображение

$$\bar{x} = ax(1 - x) \equiv f(x),$$

с $0 < a < 4$ и $x \in I = [0, 1]$. Когда $0 < a < 1$, начало координат является единственной устойчивой неподвижной точкой. Она полуустойчива при $a = 1$, поскольку $f'(0) = 1$, и становится неустойчивой при возрастании a , при этом от начала координат отражается другая неподвижная точка $O_1(x_1 = (a - 1)/a)$ (здесь мы имеем транскритическую бифуркацию). Точка O_1 устойчива, когда $1 < a \leq a_1 = 3$ [см. рис. С.6.1 (а)]. Она претерпевает бифуркацию удвоения, когда $f'(O_1) = a - 2ax_1 = -1$ при $a = 3$. Первая ляпуновская величина в этой точке равна $-\frac{1}{6}(f'''(O_1) + \frac{3}{2}f''(O_1)^2) = -\frac{2}{3}a_1 = -2$. Поскольку она отрицательна, точка является асимптотически устойчивой при $a = 3$. Таким образом, с ростом a из O_1 рождается устойчивый цикл C_2 периода два, как показано на рис. С.6.1 (b).

Цикл периода два состоит из пары точек периода два

$$x_2^{(1,2)} = \frac{a + 1 \pm \sqrt{a^2 - 2a - 3}}{2a},$$

которые являются корнями уравнения $x = f^2(x)$, отличными от O и O_1 . Подсчет мультипликатора цикла, который задан уравнением $f'(x_2^{(1)}) \cdot f'(x_2^{(2)})$, показывает, что цикл устойчив, когда $3 < a < 1 + \sqrt{6}$. Кроме того, мультипликатор положителен, когда $3 < a < 1 + \sqrt{5}$, и отрицателен, когда $1 + \sqrt{5} < a$, но его абсолютное значение по-прежнему меньше 1. Этот цикл становится отталкивающим, когда $a > 1 + \sqrt{6}$, и его устойчивость переходит к циклу C_4 периода четыре, показанному на рис. С.6.1 (с). Когда этот цикл проходит бифуркацию удвоения при $a = a_3 \simeq 3,54$, рождается устойчивый цикл периода восемь, и так далее [см. рис. С.6.2 (d)–(f)].

Отметим, что первая ляпуновская величина всегда отрицательна для бифуркаций удвоения любой периодической орбиты в логистическом отображении. Действительно, производная Шварца:

$$S(f)(x) = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2$$

отрицательна везде на интервале $[0, 1]$, где определено отображение. Легко можно проверить, что если для некоторого отображения $S(f) < 0$ всюду, то $S(f \circ f \circ \dots \circ f) < 0$ также всюду, т. е. она отрицательна для каждой степени отображения. Остается отметить, что $\frac{1}{6}S(f)$ совпадает с первой ляпуновской величиной в неподвижной точке в момент бифуркации удвоения (когда $f'(x) = -1$).

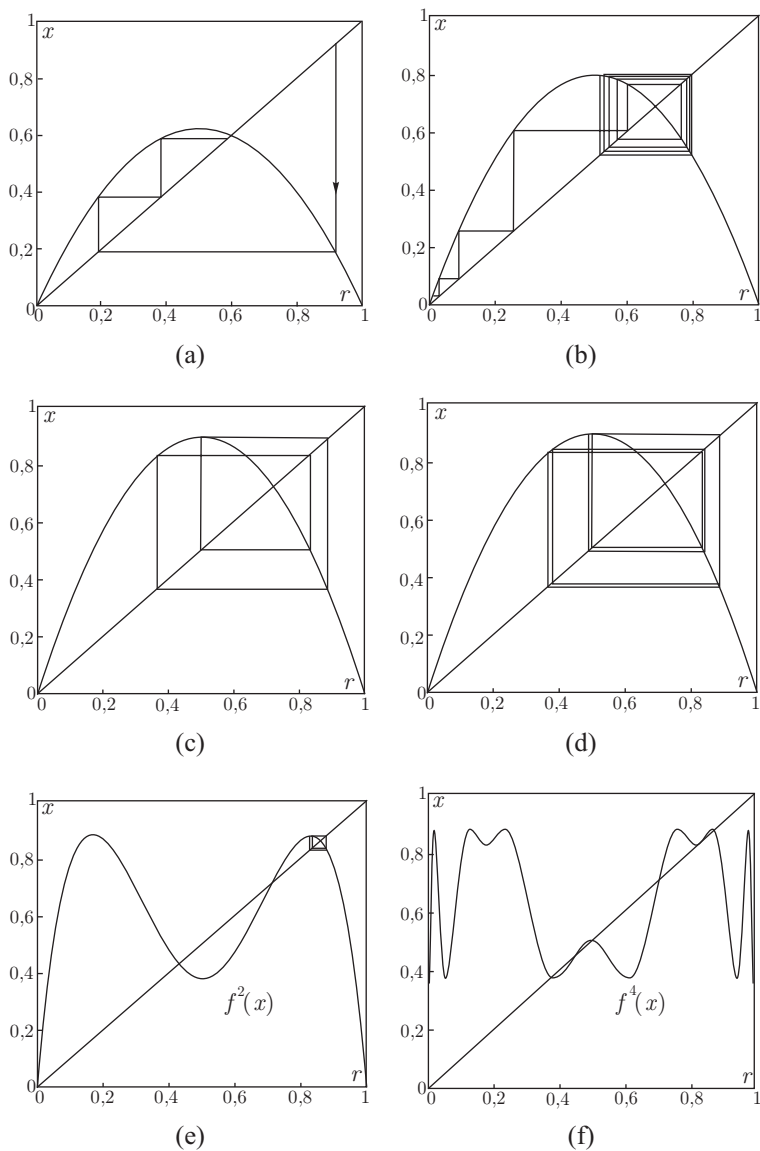


Рис. С.6.1. Удвоение периода логистического отображения

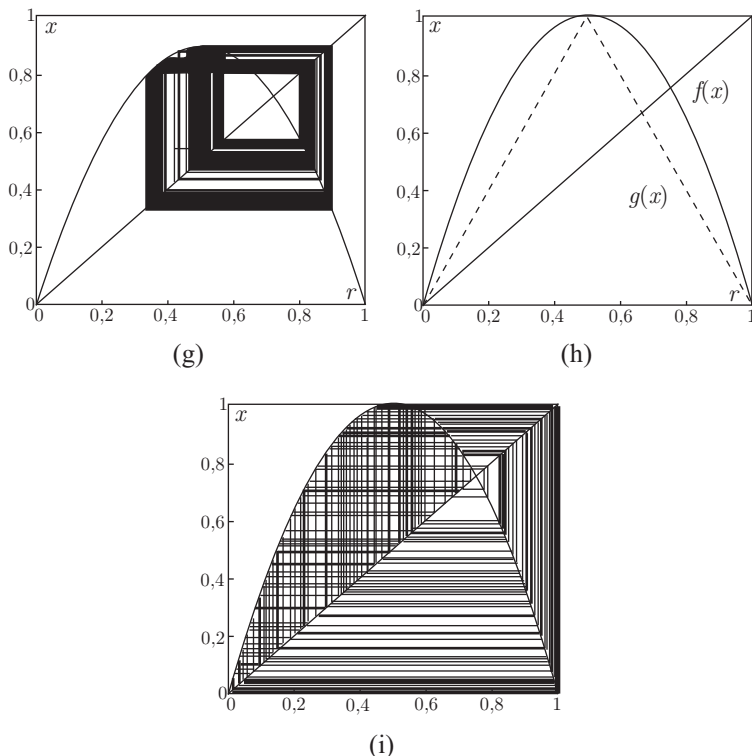


Рис. С.6.1. Продолжение. Удвоение периода логистического отображения

Эта последовательность бифуркаций удвоения периода заканчивается примерно при $a \simeq 3,569$, после чего логистическое отображение демонстрирует хаотическое поведение, см. рис. С.6.1 (г) и (и).

Файгенбаум [170] отметил, что бифуркационные значения a_n , $n = 1, 2, \dots$ возрастают асимптотически в геометрической прогрессии с множителем

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n+1} - a_n} \simeq 4,66920.$$

С.6.№67. Найдите критическое значение a , которое соответствует ситуации, изображенной на рис. С.6.1 (з). Может ли в этот момент данное отображение иметь устойчивые периодические орбиты? Для того чтобы ответить на этот вопрос, приведите отображение к кусочно-линейному виду (используя обратную тригонометрическую функцию).

Вычислите значения a_n , которые соответствуют бифуркации удвоения для орбит периода 16 и 32. Найдите соответствующее максимальное значение x для этих циклов и постройте их на рис. С.6.2.

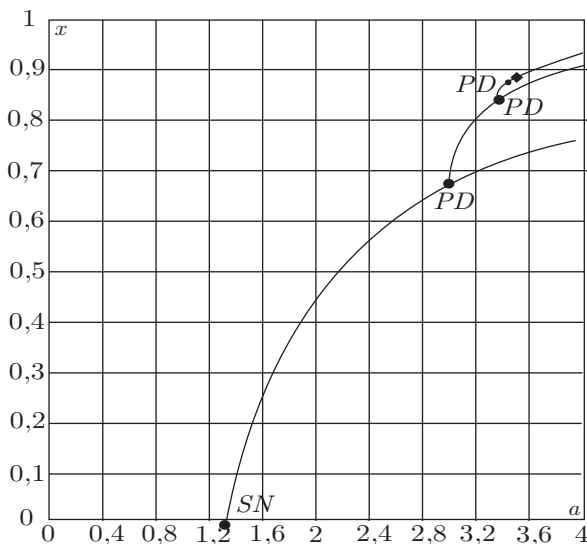


Рис. С.6.2. (x от a) Бифуркационная диаграмма логистического отображения для процесса удвоения периода

С.6.№68. Исследуйте отображение

$$\bar{x} = x + x(a(1-x) - b(1-x)^2) = f(x),$$

где a и b — некоторые положительные параметры. Найдите его неподвижные точки и определите соответствующие границы устойчивости. Установите асимптотическую устойчивость неподвижных точек и циклов периода два в критических случаях.

С.6.№69. Исследуйте отображения $\bar{x} = \mu_1 + Ax^{1+\mu_2}$ и $\bar{x} = \mu_1 - \mu_2 x^\nu + x^{2\nu}$, где $0 < \nu < 1$ и $|\mu_1| \ll 1$. Отдельно рассмотрите частные случаи $0 < \nu < 1/2$ и $1/2 < \nu$. Что происходит при $\nu = 1/2$? Проанализируйте бифуркации симметричных периодических точек в двух отображениях $\bar{x} = (\mu_1 + A|x|^{1+\mu_2}) \operatorname{sign}(x)$ и $\bar{x} = (\mu_1 - \mu_2|x|^\nu + |x|^{2\nu}) \operatorname{sign}(x)$, $|\mu_{1,2}| \ll 1$. Такие отображения возникают при изучении гомоклинических бифуркаций коразмерности два (см. параграф 13).

С.6.№70. Рассмотрите отображение Хенона:

$$\bar{x} = y, \quad \bar{y} = a - bx - y^2.$$

Это отображение является каноническим примером, иллюстрирующим хаотическое поведение. При некоторых значениях параметра отображение Хенона моделирует механизм рождения «подковы Смейла», как показано на рис. С.6.3, для этого отображения и обратного к нему:

$$y = \bar{x},$$

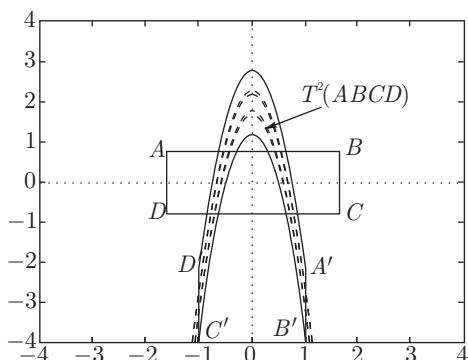
$$x = (a - \bar{y} - \bar{x}^2)/b$$

(если $b \neq 0$).

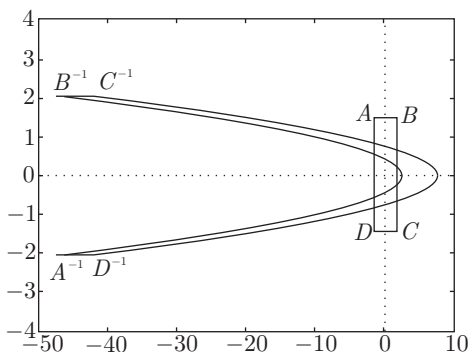
Якобиан отображения Хенона постоянен и равен b . Таким образом, когда $b > 0$, отображение Хенона сохраняет ориентацию на плоскости, в то время как при $b < 0$ ориентация сменяется на обратную. Отметим также, что если $|b| < 1$, отображение сжимает площади, следовательно, произведение мультипликаторов любой из его неподвижных точек меньше 1 по абсолютному значению. Следовательно, в этом случае отображение не может иметь вполне неустойчивых периодических орбит (только устойчивые и седловые). Напротив, когда $|b| > 1$, не могут существовать устойчивые орбиты. Когда $|b| = 1$, отображение становится консервативным. При $b = 0$ отображение Хенона вырождается в вышеприведенное логистическое отображение, и, следовательно, можно ожидать аналогичных бифуркаций неподвижных точек, когда b достаточно мало.

Найдем неподвижные точки в отображении Хенона и исследуем бифуркации, которые происходят с ними при изменении a и b . Бифуркационный портрет приведен на рис. С.6.4. Он содержит три бифуркационные кривые: $SN: a = -\frac{1}{4}(1+b)^2$, $PD: a = \frac{3}{4}(1+b)^2$ и $AH: b = 1, -1 < a < 3$. При $(a, b) \in SN$ отображение имеет неподвижную точку с одним мультипликатором $+1$; когда $|b| < 1$, эта точка является седло-узлом с притягивающим сектором; в то время как при $|b| > 1$ это седло-узел с отталкивающей зоной. При $(a, b) \in PD$ отображение имеет неподвижную точку с мультипликатором -1 ; когда $|b| < 1$, другой мультипликатор меньше 1 по абсолютному значению и первая ляпуновская величина меньше нуля, т. е. точка устойчива. При $|b| > 1$ другой мультипликатор больше 1 по абсолютному значению и первая ляпуновская величина больше нуля, т. е. точка вполне неустойчива. (Проверьте уравнения бифуркационных кривых и вычислите ляпуновские величины).

В области D_1 существует две неподвижные точки, одна из которых является седлом, а другая — устойчивой при $(a, b) \in D_1^s$ и отталкивающей при $(a, b) \in D_1^u$. Переход из D_1 в D_2 сопровождается бифуркацией



(a)



(b)

Рис. С.6.3. Подкова в отображении Хенона и в обратном к нему при $a = 2$ и $b = 0,4$

удвоения периода неподвижной точки, соответственно устойчивой на пути $D_1^s \rightarrow D_2^s$ и отталкивающей на пути $D_1^u \rightarrow D_2^u$. При этом неподвижная точка становится седлом $(-)$, из нее рождается цикл периода два, устойчивый при $(a, b) \in D_2^s$ и неустойчивый в области D_2^u .

Когда $b = 1$, отображение Хенона становится консервативным, так как его якобиан равен $+1$. При $b = 1$ и $a = -1$ оно имеет неустойчивую параболическую неподвижную точку с двумя мультипликаторами $+1$; при $b = 1$ и $a = 3$ имеется устойчивая параболическая неподвижная точка с двумя мультипликаторами -1 . Между этими точками при $-1 < a < 3$ (т. е. $(a, b) \in T$) отображение имеет неподвижную точку с мультипликато-

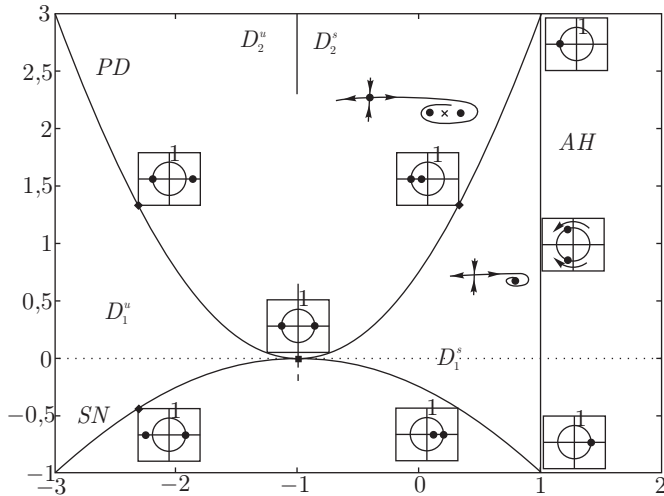


Рис. С.6.4. Бифуркационный портрет неподвижных точек в отображении Хенона

рами $e^{\pm i\psi}$, где $\cos \psi = 1 - \sqrt{a+1}$. Это эллиптическая точка общего типа при $\psi \notin \{\pi/2, 2\pi/3, \arccos(-1/4)\}$ [167]. Поскольку отображение Хенона консервативно, когда $b = 1$, все ляпуновские величины равны нулю. Когда мы пересекаем кривую AH , якобиан становится отличным от 1, т.е. отображение или сжимает, или растягивает площади, что, очевидно, делает невозможным существование инвариантных замкнутых кривых. Таким образом, при пересечении линии AH инвариантные кривые не возникают.

С.6.№71. Рассмотрим следующее отображение:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= y + \alpha y^2, \\ \bar{y} &= a - bx - y^2 + \beta xy\end{aligned}\tag{С.6.1}$$

при малых α и β . Как мы видим, это отображение можно рассматривать как малое возмущение отображения Хенона. Нас интересует, какие бифуркации происходят в некоторой ограниченной подобласти плоскости (x, y) , которая сохраняет конечный размер при α и β , стремящихся к нулю. Этот вопрос возникает при изучении бифуркации квадратичных гомоклинических касаний между устойчивым и неустойчивым многообразиями седловой неподвижной точки с мультипликаторами $|\nu| < 1 < |\gamma|$ такими, что $|\nu\gamma| = 1$ [175].

Выведем уравнения бифуркационных кривых $\widetilde{SN}$, $\widetilde{PD}$ и $\widetilde{AH}$ для (С.6.1) при малых α и β ; эти кривые относятся соответственно к возникновению седло-узла, удвоению периода и рождению тора.

Рассмотрим характеристическое уравнение (С.6.1)

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 + 2\alpha y \\ -b + \beta y & -2y + \beta x - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Поскольку $x = y + \alpha y^2$ в неподвижной точке, это уравнение можно записать как

$$\lambda^2 + \lambda(2y - \beta y - \alpha\beta y^2) + b + y(2b\alpha - \beta) - 2\alpha\beta y^2 = 0. \quad (\text{С.6.2})$$

Уравнение для координаты y неподвижной точки в (С.6.1) имеет вид

$$a - y(1 + b) - y^2(1 + b\alpha - \beta) + \alpha\beta y^3 = 0. \quad (\text{С.6.3})$$

Выведем уравнение кривой $\widetilde{SN}$ неподвижных точек типа седло-узел. Поскольку одно из собственных чисел для таких точек равно 1, подстановка $\lambda = 1$ в (С.6.2) дает

$$1 + b + 2y(1 + b\alpha - \beta) - 3\alpha\beta y^2 = 0. \quad (\text{С.6.4})$$

Это уравнение имеет только одно решение в любой конечной области при условии, что α и β достаточно малы:

$$y = -\frac{1 + b}{2(1 + b\alpha - \beta)} + O(\alpha\beta).$$

Подстановка этого выражения в (С.6.3) дает следующее уравнение для $\widetilde{SN}$:

$$a = -\frac{(1 + b)^2}{4}(1 - b\alpha + \beta) + O(\alpha^2 + \beta^2). \quad (\text{С.6.5})$$

Аналогично уравнение кривой $\widetilde{PD}$, отвечающей бифуркации удвоения периода, задается как

$$a = \frac{3}{4}(1 + b)^2 \left(1 + \frac{4}{3}b\alpha - \frac{\beta}{3} \right) + O(\alpha^2 + \beta^2). \quad (\text{С.6.6})$$

Отметим, что кривые $\widetilde{SN}$ и $\widetilde{PD}$ близки к кривым SP и PD отображения Хенона.

После этого выведем уравнение кривой $\widetilde{АН}$, которая отвечает рождению инвариантной кривой (бифуркация Андронова–Хопфа для отображений). Поскольку характеристическими числами такой точки являются $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\varphi}$, якобиан отображения в неподвижной точке равен 1, а след матрицы Якоби равен $2 \cos \varphi$. Это приводит к следующей системе для нахождения y и b :

$$\begin{aligned} 2y - \beta y - \alpha \beta y^2 &= -2 \cos \varphi \\ b + y(2b\alpha - \beta) - 2\alpha \beta y^2 &= 1. \end{aligned} \quad (\text{C.6.7})$$

Из первого уравнения мы получаем

$$y = -\frac{\cos \varphi}{1 - \beta/2} + O(\alpha\beta), \quad (\text{C.6.8})$$

а из второго:

$$b = 1 - (\beta - 2\alpha) \cos \varphi + O(\alpha^2 + \beta^2). \quad (\text{C.6.9})$$

В итоге мы находим из (C.6.3), что

$$a = \cos^2 \varphi [1 + \beta - \alpha] - 2 \cos \varphi [1 + \beta/2] + O(\alpha^2 + \beta^2). \quad (\text{C.6.10})$$

Кривая $\widetilde{АН}$ задана при помощи (C.6.9)–(C.6.10). Поскольку якобиан отображения (C.6.1) уже не является постоянным, следует ожидать, что соответствующая бифуркация рождения инвариантной кривой будет невырожденной. Для того чтобы в этом удостовериться, вычислим первую ляпуновскую величину L_1 .

Пусть $(a, b) \in \widetilde{АН}$. Тогда $b = -1 + O(\alpha, \beta)$ и $-1 + O(\alpha, \beta) < a < 3 + O(\alpha, \beta)$. Неподвижная точка с мультипликаторами $e^{\pm i\varphi}$ имеет координаты

$$\begin{aligned} x &= -\cos \varphi (1 + \beta/2) + \alpha \cos^2 \varphi + O(\alpha^2 + \beta^2), \\ y &= -\cos \varphi (1 + \beta/2) + O(\alpha^2 + \beta^2). \end{aligned} \quad (\text{C.6.11})$$

Переместим начало координат в неподвижную точку. Тогда отображение (C.6.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \bar{x} &= y(1 + \rho) + \alpha y^2 + \dots, \\ \bar{y} &= -x/(1 + \rho) + 2y \cos \varphi - y^2 + \beta xy + \dots \end{aligned}$$

где $\rho = 2\alpha \cos \varphi + O(\alpha^2 + \beta^2)$ и точки обозначают нелинейные члены порядка $O(\alpha^2 + \beta^2)$. Отмасштабировав переменную x на $(1 + \rho)$, отображение приводим к виду

$$\begin{aligned} \bar{x} &= y + \alpha y^2 + \dots, \\ \bar{y} &= -x + 2y \cos \varphi - y^2 + \beta xy + \dots \end{aligned} \quad (\text{C.6.12})$$

Теперь делаем линейное преобразование $x = \xi$ и $y = (\cos \varphi)\xi - (\sin \varphi)\eta$, после чего линейная часть отображения становится поворотом на угол φ :

$$\begin{aligned}\bar{\xi} &= \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi + \alpha(\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi)^2 + \dots, \\ \bar{\eta} &= \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi + \frac{1}{\sin \varphi}(\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi)^2(1 + \alpha \cos \varphi) - \\ &\quad - \frac{\beta}{\sin \varphi} \xi(\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi) + \dots\end{aligned}\quad (\text{C.6.13})$$

Обозначая $z = \xi + i\eta$, получаем

$$\bar{z} = ze^{i\varphi} + c_{20}z^2 + c_{11}zz^* + c_{02}(z^*)^2 + \dots, \quad (\text{C.6.14})$$

где z^* комплексно-сопряжено с z и коэффициенты c_{ij} заданы как

$$\begin{aligned}c_{20} &= \frac{1}{4}[-2 \cos \varphi - \alpha + \beta] + \frac{i}{4} \left[\frac{\cos 2\varphi}{\sin \varphi} + \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}(\alpha - \beta) \right], \\ c_{11} &= \frac{\alpha}{2} + \frac{i}{2} \left[\frac{1}{\sin \varphi} + \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}(\alpha - \beta) \right], \\ c_{02} &= \frac{1}{4}[2 \cos \varphi + \alpha(3 \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) - \beta] + \\ &\quad + \frac{i}{4} \left[\frac{\cos 2\varphi}{\sin \varphi} + \alpha \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}(\cos^2 \varphi - 3 \sin^2 \varphi) - \beta \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \right].\end{aligned}\quad (\text{C.6.15})$$

В соответствии с формулами параграфа 3.13, квадратичные члены исключаются при помощи следующего нормализующего преобразования (когда $\varphi \neq 2\pi/3$):

$$z_{\text{new}} = z - \frac{c_{20}}{e^{2i\varphi} - e^{i\varphi}}z^2 - \frac{c_{11}}{1 - e^{i\varphi}}zz^* - \frac{c_{02}}{e^{-2i\varphi} - e^{i\varphi}}(z^*)^2 + \dots \quad (\text{C.6.16})$$

Это преобразование не меняет линейную часть; известно, что после него исчезают все квадратные члены. Таким образом, нам необходимо привести коэффициенты перед кубическим членом z^2z^* . Это дает

$$\bar{z}_{\text{new}} = e^{i\varphi}z_{\text{new}} + e^{i\varphi}z_{\text{new}}^2z_{\text{new}}^*(L + i\Omega) + O_3(z), \quad (\text{C.6.17})$$

где $O_3(z)$ обозначает остальные члены третьего и более высоких порядков и

$$L + i\Omega = -c_{20}c_{11}e^{-2i\varphi}\frac{1 - 2e^{i\varphi}}{1 - e^{i\varphi}} - |c_{11}|^2\frac{1}{1 - e^{i\varphi}} - |c_{02}|^2\frac{2}{1 - e^{3i\varphi}}. \quad (\text{C.6.18})$$

Взяв действительную часть, мы получаем следующую формулу для первой ляпуновской величины L_1 [184]:

$$L_1 = \operatorname{Re}(c_{20}c_{11}) \frac{\cos 3\varphi - 3 \cos 2\varphi + 2 \cos \varphi}{2(1 - \cos \varphi)} + \operatorname{Im}(c_{20}c_{11}) \frac{\sin 3\varphi - 3 \sin 2\varphi + 2 \sin \varphi}{2(1 - \cos \varphi)} - |c_{02}|^2 - \frac{1}{2}|c_{11}|^2. \quad (\text{C.6.19})$$

Подставляя (C.6.15) в эту формулу, в итоге получаем следующее выражение:

$$L_1 = \frac{1}{16(1 - \cos \varphi)} [\beta - 2\alpha] + O(\alpha^2 + \beta^2). \quad (\text{C.6.20})$$

Отметим, что L_1 обращается в нуль при $\alpha = \beta = 0$, так как оно должно быть равно нулю в отображении Хенона.

Таким образом, когда α и β малы, знак первой ляпуновской величины равен знаку разности $(\beta - 2\alpha)$. Если он отрицательный, то в надкритической бифуркации Андронова–Хопфа при пересечении кривой $\widetilde{AH}$ в направлении увеличения β рождается устойчивая инвариантная кривая.

С.6.№72. Используя компьютер, проследите эволюцию инвариантной кривой при увеличении b (выберите $\alpha = \beta = 0.001$).

Сначала рассмотрим случай $L_1 < 0$. В области слева от $\widetilde{AH}$ точка O устойчива, см. рис. С.6.5. Точка O становится неустойчивой справа от кривой бифуркации Андронова–Хопфа AH , и из нее возникает устойчивая инвариантная кривая. Устойчивая кривая эволюционирует следующим образом: при дальнейшем росте параметра она «влипает» в гомоклиническую петлю к седловой неподвижной точке O_1 . Под «влипанием» мы подразумеваем здесь, что устойчивая инвариантная кривая разрушается, approaching к сложной гомоклинической структуре, существующей благодаря пересечениям устойчивых и неустойчивых многообразий седловой неподвижной точки O_1 . При дальнейшем изменении параметра это неблуждающее множество исчезает в результате гомоклинических касаний.

Такой сценарий потери устойчивости называется «мягким» (см. главу 14). В случае $L_1 > 0$ потеря устойчивости развивается по *опасному* пути: точка O изначально устойчива, в то время как неустойчивая инвариантная кривая «материализуется» из гомоклинической структуры O_1 и стягивается к началу координат при приближении к линии $\widetilde{AH}$. Неподвижная точка в начале координат становится неустойчивой на пересечении $\widetilde{AH}$, и все близкие траектории уходят из ее окрестности.

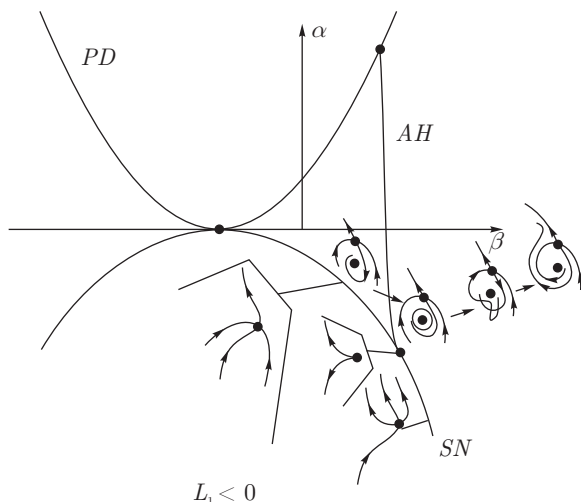


Рис. С.6.5. Бифуркационный портрет для возмущенного отображения Хенона

С.6.№73. Изучите следующее отображение:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= y, \\ \bar{y} &= \mu_1 + \mu_2 y + dy^3 - bx,\end{aligned}$$

где μ_1, μ_2, b — управляющие параметры и $d = \pm 1$. Такие отображения возникают при исследовании аттрактора Лоренца, а также при моделировании поведения периодически возмущенных уравнений с кубической нелинейностью, подобных системе Дюффинга [176, 184].

Якобиан отображения равен b , и, следовательно, когда $b \neq 0$, оно является диффеоморфизмом. Обратное отображение имеет вид

$$\begin{aligned}\bar{y} &= x, \\ \bar{x} &= \frac{1}{b}(\mu_1 + \mu_2 x + dx^3 - y).\end{aligned}$$

Из этой формулы понятно, что случаи $|b| > 1$ и $|b| < 1$ симметричны. Когда $b = 0$, исходное отображение становится «одномерным» в том смысле, что у него есть инвариантная кривая $y = dx^3 + \mu_2 x + \mu_1$, на которую отображается любая точка на плоскости после одной итерации. Следует отметить, что отображение инвариантно относительно преобразования $(x, y, \mu_1, \mu_2) \rightarrow (-x, -y, -\mu_1, \mu_2)$, и, следовательно, бифуркационные кривые на плоскости параметров (μ_1, μ_2) симметричны относительно оси μ_2 .

С.6.№74. Найдите аналитически уравнения основных бифуркационных кривых неподвижных точек и циклов периода два для данного отображения.

Частичное решение: кривая SN , отвечающая неподвижной точке с мультипликатором $+1$, задана уравнением

$$\mu_1 = \pm \frac{2}{3} \left(\frac{-1 + b - \mu_2}{3d} \right)^{1/2};$$

а с мультипликатором -1 — уравнением

$$\mu_1 = \pm \frac{2}{3} \left(\frac{-1 + b - \mu_2}{3d} \right)^{1/2} (2 + 2b - \mu_2).$$

Бифуркационные кривые цикла периода два с мультипликатором $+1$ заданы как

$$\mu_1 = \pm \frac{2}{3\sqrt{3}} (-\mu_2 - 2(b+1))^{3/2}, \quad \text{at } d = +1,$$

$$\mu_1 = \pm \frac{2}{3\sqrt{3}} (\mu_2 + 2b - 1)^{3/2}, \quad \mu_2 > -\frac{2}{3}(b+1), \quad \text{at } d = -1,$$

а соответствующие удвоению периода этого цикла заданы как

$$\mu_1^2 = \frac{1}{216d} (b(b+1) + \mu_2 \pm q)^2 (-5\mu_2 - 6(b+1) \pm q),$$

где $q = \sqrt{(3\mu_2 + 2b + 2)^2 - 8(b^2 + 1)}$.

Быстро-медленное отображение. Модель нейрона. Рассмотрим следующее двумерное быстро-медленное отображение

$$x_{n+1} = f(x_n, y_n), \quad (\text{C.6.21})$$

$$y_{n+1} = y_n - \mu(x_n + 1) + \mu\sigma, \quad (\text{C.6.22})$$

где

$$f(x, y) = \begin{cases} \alpha/(1-x) + y, & x \leq 0, \\ \alpha + y, & 0 < x < \alpha + y, \\ -1, & x \geq \alpha + y \end{cases} \quad (\text{C.6.23})$$

и x_n, y_n — быстрые и медленные переменные. Медленная динамика y_n определена малым параметром $\mu = 0,001$; здесь α и σ — бифуркационные параметры. Это отображение было предложено для симуляции пачечных и тонических режимов в нейронах коры головного мозга [192]. На рис. С.6.6 изображен график быстрого одномерного отображения.

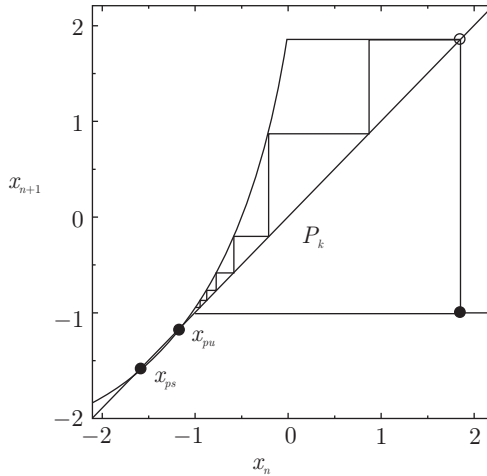


Рис. С.6.6. Быстрое отображение при $\alpha = 5, 6$ и $y_n = -3, 75$. Устойчивая и неустойчивая неподвижные точки: x_{ps} и x_{pu} . С ростом y_n неподвижные точки сливаются и исчезают через седло-узловую бифуркацию

Неподвижные точки x_p быстрого отображения определяют так называемые ветви медленных движений в фазовом пространстве (x_n, y_n) (см. рис. С.6.6). Они имеют вид

$$y = x_p - \frac{\alpha}{1 - x_p}, \quad x_p \leq 0. \quad (\text{С.6.24})$$

Устойчивая ветвь $S_{ps}(y)$ определена для $x_p < 1 - \sqrt{\alpha}$, а неустойчивая ветвь $S_{pu}(y)$ — для $1 - \sqrt{\alpha} \leq x_p < 0$. Точка пересечения прямой $x_s = -1 + \sigma$ с ветвью есть неподвижная точка исходного отображения (С.6.21).

Ограничимся рассмотрением прямоугольника $\{2 \leq a \leq 8; -2 \leq \sigma < 1\}$ на плоскости параметров. Внутри него двумерное отображение (С.6.21) имеет одну неподвижную точку O с координатами $x_o = -1 + \sigma$ и $y_o = x_o - \frac{\alpha}{1 - x_o}$.

Анализ устойчивости неподвижной точки сводится к изучению вторичной бифуркации Андронова–Хопфа, или бифуркации тора, где неподвижная точка имеет пару мультипликаторов равных $e^{\pm i\psi}$.

Матрица Якоби $\mathbf{J}$ отображения в неподвижной точке имеет вид

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{(2-\sigma)^2} & 1 \\ -\mu & 1 \end{pmatrix}.$$

В случае вторичной бифуркации Андронова–Хопфа якобиан и след $\mathbf{J}$ равны 1 и $2 \cos \psi$, соответственно. Отсюда получим уравнение соответствующей бифуркационной кривой:

$$\sigma = 2 - \sqrt{\alpha/(1-\mu)}. \quad (\text{C.6.25})$$

На ней, неподвижная точка имеет мультипликаторы:

$$\rho_{1,2} = \frac{2-\mu}{2} \pm \frac{i}{2} \sqrt{(4-\mu)\mu} = \cos \psi \pm i \sin \psi. \quad (\text{C.6.26})$$

Заметим, что $\rho_{1,2}$ в (C.6.26) зависят только от μ . Устойчивость неподвижной точки в момент бифуркации определяется знаком первой ляпуновской величины L_1 . Точка является устойчивой, когда $L_1 < 0$ и неустойчивой, когда $L_1 > 0$.

Переместим неподвижную точку O отображения

$$\bar{x} = \frac{\alpha}{1-x} + y, \quad (\text{C.6.27})$$

$$\bar{y} = y - \mu(x + 1 - \sigma), \quad (\text{C.6.28})$$

в начало координат, применяя преобразование

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + \sigma - 1 \\ y + \sigma - 1 - \frac{\alpha}{2-\sigma} \end{pmatrix}.$$

Далее, разложим правую часть (C.6.27) в виде ряда Тейлора; для того, чтобы найти L_1 достаточно первых трех членов ряда:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= y + \frac{\alpha}{(2-\sigma)^2}x + \frac{\alpha}{(2-\sigma)^3}x^2 + \frac{\alpha}{(2-\sigma)^4}x^3 + O(x^4), \\ \bar{y} &= y - \mu x. \end{aligned} \quad (\text{C.6.29})$$

Преобразование координат

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sin \psi & 1 - \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

приводит линейную часть (С.6.29) к повороту на угол ψ :

$$\begin{pmatrix} \bar{\xi} \\ \bar{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\alpha}{(2-\sigma)^3}\eta^2 + \frac{\alpha}{(2-\sigma)^4}\eta^3 + O(\eta^4) \end{pmatrix}.$$

Вводя $z = \xi + i\eta$, получим комплексное отображение

$$\bar{z} = ze^{i\psi} + i \left(-\frac{\alpha(z-z^*)^2}{4(2-\sigma)^3} + i\frac{\alpha(z-z^*)^3}{8(2-\sigma)^4} \right) + O(|z|^4),$$

где z^* означает z -сопряженный. В нем квадратичные члены

$$\bar{z} = ze^{i\psi} + \frac{c_{20}}{2}z^2 + c_{11}zz^* + \frac{c_{02}}{2}z^{*2} + O(|z|^3),$$

где

$$c_{20} = -\frac{i\alpha}{2(2-\sigma)^3}, \quad c_{11} = \frac{i\alpha}{2(2-\sigma)^3}, \quad c_{02} = -\frac{i\alpha}{2(2-\sigma)^3}, \quad (\text{С.6.30})$$

убиваются нормирующим преобразованием

$$z \mapsto z - \frac{c_{20}}{e^{2i\psi} - e^{i\psi}}z^2 - \frac{c_{11}}{1 - e^{i\psi}}zz^* - \frac{c_{02}}{e^{-2i\psi} - e^{i\psi}}z^{*2}.$$

Полученная нормальная форма принимает канонический вид:

$$z = e^{i\psi} + L_1z^2z^* + O(|z|^3),$$

где $O(|z|^3)$ обозначает оставшиеся кубические и члены более высоких порядков. Выражение для первой ляпуновской величины имеет вид:

$$L_1 = -\operatorname{Re} \left[\frac{e^{-i\psi}c_{21}}{2} \right] + \operatorname{Re} \frac{(1 - 2e^{i\psi})e^{-2i\psi}c_{20}c_{11}}{2(1 - e^{i\psi})} + \frac{|c_{11}|^2}{2} + \frac{|c_{02}|^2}{4}. \quad (\text{С.6.31})$$

Подставляя (С.6.30) в (С.6.31), получим

$$L_1 = \frac{(2-\mu)(1-\mu)(4-2\mu+\mu^2)}{16(2-\sigma)^2}. \quad (\text{С.6.32})$$

Очевидно, что $L_1 > 0$, когда μ мало.

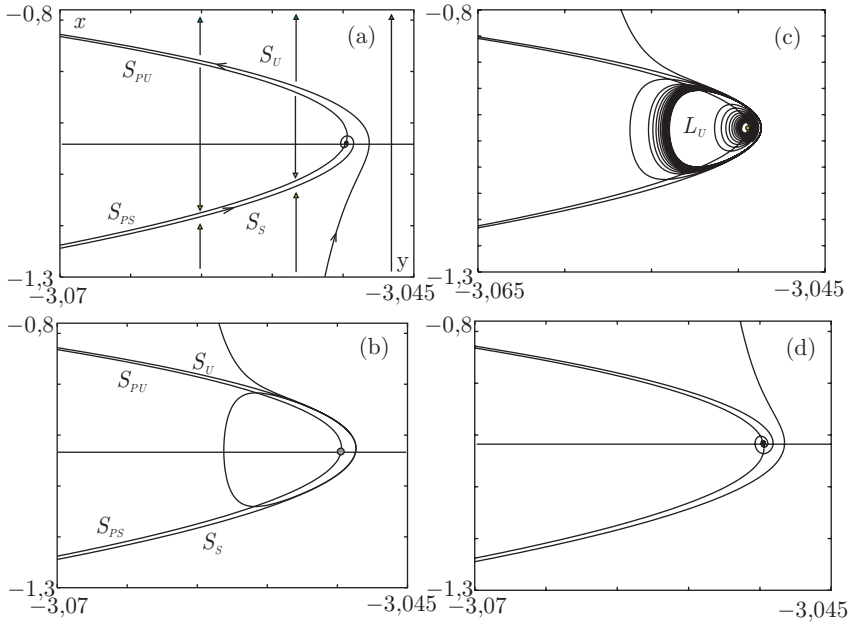


Рис. С.6.7. Рождение инвариантной окружности из неподвижной точки при $\mu = 0,001$ и $\alpha = 4, 1$: (a) $\sigma = -0,0262$; (b) $-0,026113175787$; (c) $-0,02605$ и (d) $-0,016$). В контексте быстро-медленных систем, рождение инвариантной окружности связано с решениями, известными как французские утки.

На рис. С.6.7 показана эволюция решений отображения вблизи бифуркации: сначала неподвижная точка устойчива и окружена неустойчивой инвариантной кривой L_u . Эта кривая стягивается в неподвижную точку и, исчезая, делает ее неустойчивой.

Задача. Заменить гиперболу в (С.6.21) параболой $f(x, y) = ax + (x + 1)^2 + y$ и определить тип вторичной бифуркации Андронова–Хопфа в этом случае; подробнее см. [193].

С.6.№75. Следующая система является асимптотической нормальной формой для бифуркации состояния равновесия с тройным нулевым характеристическим показателем [162, 163]

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = ax - x^2 - by - z,$$

в случае с полным жордановым блоком (см. параграф С.2). Здесь a и b являются управляющими параметрами. Фрагмент бифуркационной диаграммы для этой системы показан на рис. С.6.8. При $a, b \geq 0$ эта система имеет два состояния равновесия: $O(0, 0, 0)$ и $O_1(a, 0, 0)$. Начало координат $a = b = 0$ отвечает бифуркации Богданова–Тakens коразмерности 2 (см. параграф 13.4).

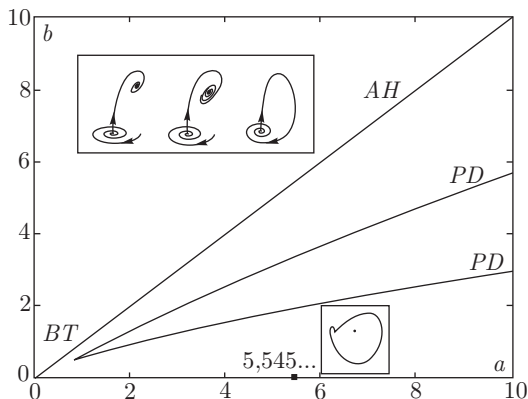


Рис. С.6.8. Часть бифуркационной диаграммы. AH обозначает бифуркацию Андронова–Хопфа нетривиального состояния равновесия O_1 ; PD обозначает бифуркацию удвоения для устойчивых периодических орбит, которые возникают из O_1 на AH

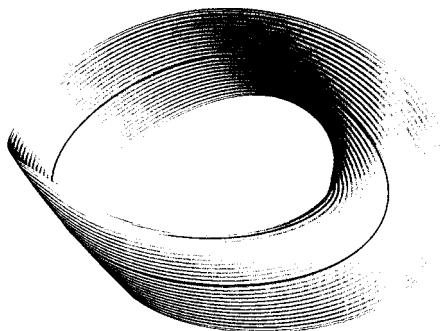


Рис. С.6.9. Устойчивое многообразие седловой периодической траектории системы из С.6.№75 при $a = 3,2$ внутри клина PD на рис. С.6.8

Опишем основные бифуркации в этой системе на пути $b = 2$ при возрастании a . Слева от кривой AH состояние равновесия O_1 устойчиво. На кривой AH оно претерпевает надкритическую бифуркацию Андронова–Хопфа. Устойчивая периодическая орбита становится седлом при бифуркации удвоения периода, которая происходит на кривой PD . Рисунок С.6.8 показывает неустойчивое многообразие седловой периодической орбиты, гомеоморфное ленте Мёбиуса. При дальнейшем возрастании a седловая периодическая орбита влипаёт в гомоклиническую петлю к седловой точке $O(0, 0, 0)$ при $a \simeq 5,545$. Что можно сказать о мультипликаторах периодической орбиты при ее приближении к петле? Может ли периодическая орбита, изображенная на рисунке, «отделиться» от двухобходной устойчивой орбиты после бифуркации удвоения? Другими словами, каким образом такие орбиты зацеплены в $\mathbb{R}^3$?

С.6.№76. Используя компьютер, постройте бифуркационную кривую на плоскости (a, b) , которая отвечает бифуркации вилки симметричной периодической орбиты в модели Шимицу–Мориока [191]:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x - xz - ay, \\ \dot{z} &= -bz + x^2\end{aligned}\tag{С.6.33}$$

(начиная с $a \simeq 0,4$ и $b \simeq 0,45$). Может ли симметричный предельный цикл в этой системе пройти бифуркацию удвоения периода? А в уравнении Лоренца? В цепи Чуа? В чем состоит отличие?

С.6.№77. Рассмотрим пример системы с бифуркацией рождения тора. В качестве примера возьмем модель Лоренца-84, используемую в метеорологии [128, 183]:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y^2 - z^2 - ax + aF, \\ \dot{y} &= xy - bxz - y + G, \\ \dot{z} &= bx y + xz - z.\end{aligned}\tag{С.6.34}$$

Из анализа линейной устойчивости (см. параграф С.2) следует, что плоскость параметров (a, b) имеет точку коразмерности 2, отвечающую состоянию равновесия с характеристическими показателями $(0, \pm i\omega)$. Следовательно, размерность центрального многообразия в таком случае должна равняться по крайней мере трем. Более подробный анализ этой бифуркации можно найти в [51, 64]. Ниже мы приведем лишь краткий обзор.

Отметим, что в такой точке коразмерности 2 одновременно происходят бифуркации Андронова–Хопфа и седло-узла. Пусть μ_1 и μ_2 — параметры, которые управляют этими бифуркациями:

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\mu_1 + L_1 r^2) + \dots, \\ \dot{\varphi} = \omega(\mu_1) + \Omega(\mu_1) r^2 + \dots, \\ \dot{z} = \mu_2 - z^2 + \dots, \end{cases} \quad (\text{C.6.35})$$

где $\omega(0) \neq 0$, $\Omega(0) \neq 0$ и L_1 обозначает ляпуновскую величину. Учитывая взаимодействие, итоговую нормальную форму можно записать как

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(\tilde{\mu}_1 + L_1 r^2 + az + z^2) + O(|(r, z)|^4), \\ \dot{z} &= \tilde{\mu}_2 + z^2 + br^2 + O(|(r, z)|^4), \\ \dot{\varphi} &= \omega + cz + O(|(r, z)|^2), \end{aligned}$$

где a, b можно положить равными ± 1 . Отметим, что если мы отбрасываем члены $O(|(r, z)|^4)$, система становится инвариантной относительно вращения вокруг оси z , следовательно, ее траектории лежат на интегральных поверхностях, определяемых траекториями плоской системы, состоящей из двух первых уравнений, которые отщепляются от третьего. В этой плоской системе состояния равновесия с $r = 0$ отвечают состояниям равновесия трехмерной нормальной формы, а если $r \neq 0$, то периодическим орбитам, а предельный цикл будет отвечать инвариантному тору. В зависимости от знаков a и b может быть 4 существенно различных случая. Мы сосредоточимся на случае $a = -1$ и $b = 1$, в котором только и может происходить бифуркация рождения тора. Соответствующая бифуркационная диаграмма показана на рис. С.6.10. Далее опишем свойства соответствующих бифуркаций, существенные для данной трехмерной модели (С.6.34).

Точка O_1 является отталкивающей в области справа от $АН$. Слева от $АН$ она становится седло-фокусом $(2, 1)$, и из нее рождается отталкивающая периодическая орбита. Эта периодическая орбита представляет из себя край устойчивого многообразия точки O_1 (рис. С.6.11 (а)). По пересечении $ТВ$ периодическая орбита становится устойчивой, и из нее рождается неустойчивый двумерный инвариантный тор (см. рис. С.6.11 (b)). Тор становится гетероклинической связкой между двумя седло-фокусами (рис. С.6.11 (с)) на кривой $Н$ на рис. С.6.10. Заметим, что все неустойчивые орбиты становятся аттракторами при обращении времени в данной модели. Это пример того, что надо рассматривать неустойчивые множества, чтобы понять динамику системы.

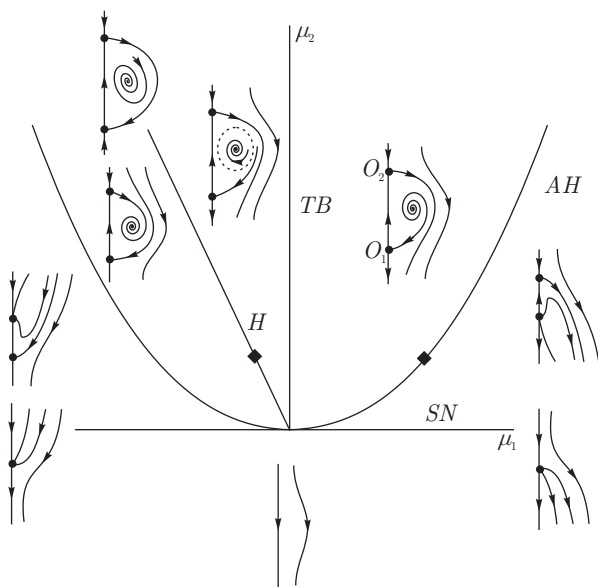


Рис. С.6.10. Бифуркационная диаграмма для плоской системы с $a = -1$ и $b = 1$

Описанные выше бифуркации происходят при условии инвариантности относительно вращения вокруг оси z . Прямая $r = 0$ тогда является интегральной кривой, а в случае когда O_1 и O_2 являются седлами, — их общей одномерной сепаратрисой. Кроме того, в таких симметричных системах двумерные устойчивые и неустойчивые инвариантные многообразия седел либо совпадают, либо не имеют общих точек. В общих системах, которые не инвариантны относительно вращения, одномерные сепаратрисы седел могут совпадать только при отдельных (коразмерности два) значениях параметра, в то время как двумерные многообразия седел могут пересекаться трансверсально для открытого множества значений параметров. Учет членов, уничтожающих вращательную симметрию, может значительно изменить структуру гетероклинической связки, а именно, она может расщепиться. В этом случае вероятна ситуация, когда одномерная сепаратриса становится двоякоасимптотической к одному из седло-фокусов, как показано на рис. С.6.11 (d). При этом, если седловая величина положительна в седло-фокусе, петля сепаратрисы приводит к бесконечному множеству седловых периодических орбит (см. параграф 13).

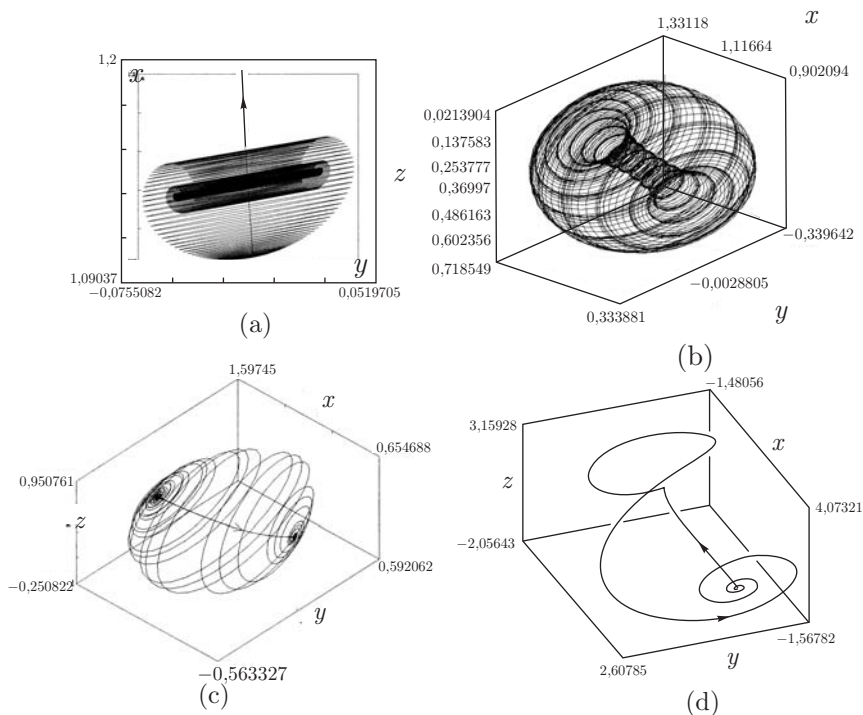


Рис. С.6.11. Фазовые портреты системы (С.6.34): (a) ($F = 1,77, G = 1,8$); (b) ($F = 1,8, G = 1,65$); (c) ($F = 1,8, G = 1,5$); (d) ($F \simeq 1,416, G \simeq 2,195$): устойчивый предельный цикл рождается из состояния равновесия. Он становится тором, который становится гетероклиническим контуром между седло-фокусом в соответствии с бифуркациями на рис. С.6.10

С.6.№78. Предложенная Медведевым [95] конструкция катастрофы голубого неба на торе проиллюстрирована на рис. С.6.13. Предполагается, что здесь существует пара седло-узловых циклов C_1 и C_2 на торе при $\mu = 0$. Требуется, чтобы один цикл вращался по часовой стрелке, а другой — в противоположном направлении. Рассмотрите, каким образом может протекать катастрофа голубого неба. Сколько циклов и какого типа устойчивости может появиться при этой бифуркации?

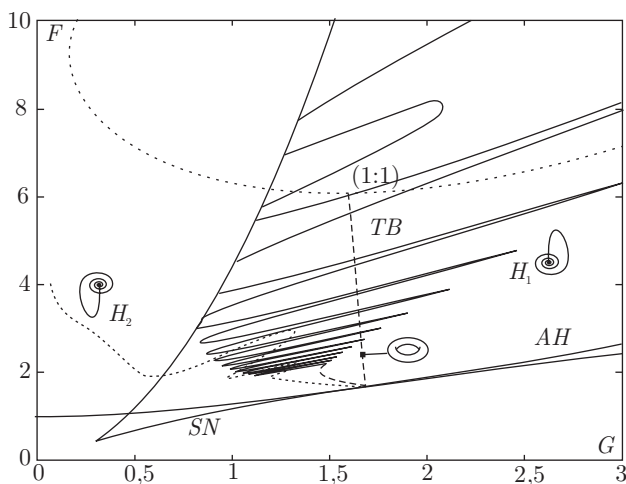


Рис. С.6.12. Часть бифуркационной диаграммы для системы (С.6.34)

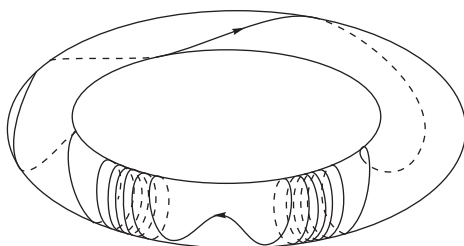


Рис. С.6.13. Катастрофа голубого неба на торе

С.6.№79.

Задача. Придерживаясь идеи развития катастрофы голубого неба в системах с двумя масштабами времени, которая приведена в параграфе 12.4, найдите катастрофу голубого неба в модифицированной модели нейтронной активности Хидмарша–Розе

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= y - z - x^3 + 3x^2 + 5, \\
 \dot{y} &= -y - 2 - 5x^2, \\
 \dot{z} &= \varepsilon(2(x + 2.1) - z) - \frac{A}{(z - 1.93)^2 + 0.003},
 \end{aligned}
 \tag{С.6.36}$$

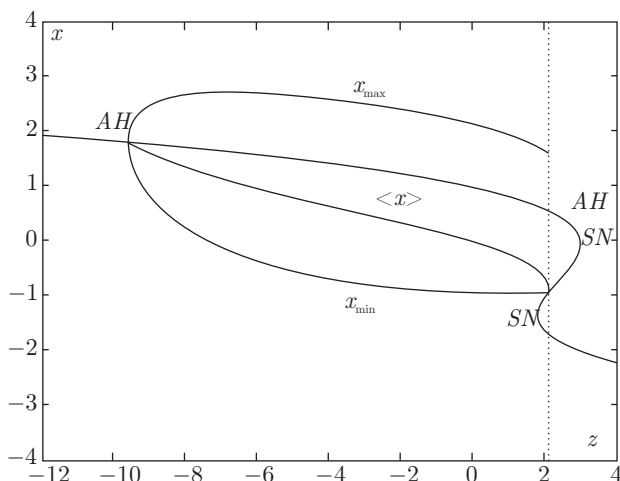


Рис. С.6.14. Зависимость координаты x состояния равновесия от z при $\varepsilon = 0$. Символы $x_{\min}$, $x_{\max}$ и $\langle x \rangle$ обозначают соответственно максимальное, минимальное и среднее значение координаты x устойчивого предельного цикла, который рождается из устойчивого фокуса на AH и оканчивается в сепаратрисе петли к седлу O (см. следующий рисунок) в точке H : $z \simeq 2,086$

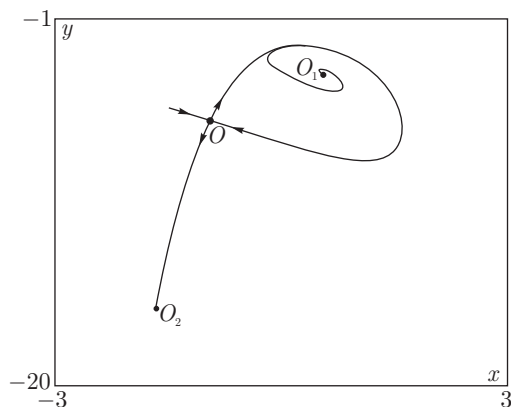
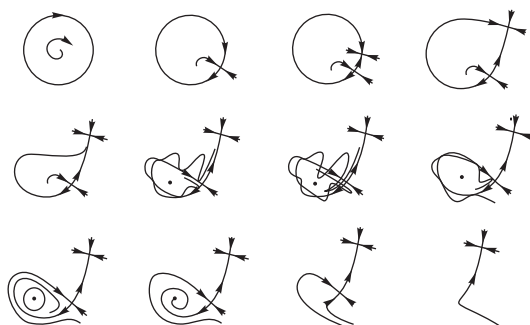
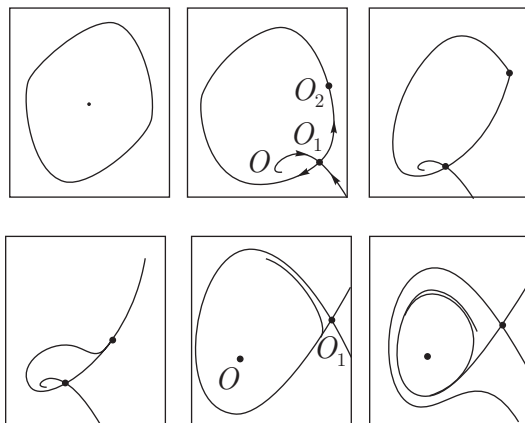


Рис. С.6.15. Петля сепаратрисы к седлу O при $z \simeq 2,086$ и $\varepsilon = 0$ в модели Хиндмарш–Роуз



(a)



(б)

Рис. С.6.16. Отображение сдвига на $2\pi/\omega$: теоретический бифуркационный сценарий (a) и численные результаты (b) при $a = 0,4$, $\omega = 0,893$ и при $\beta = 0,0, 0,37, 0,37409, 0,375, 0,376, 0,3761$

где A и ε — два управляющих параметра. На рис. С.6.14 представлена бифуркационная диаграмма для медленной системы. Докажите устойчивость рождающейся периодической орбиты. Как вы можете объяснить задержку потери устойчивости состоянием равновесия O_1 : сравните соответствующую диаграмму при нулевых и малых ненулевых ε . Это явление более подробно описано в [21].

Катастрофа голубого неба в модели Хиндмарша–Розе. Изменяя параметр A , мы можем контролировать седло-узловую бифуркацию, возникающую, когда «горб» коснется средней ветви $\langle x \rangle$ (см. рис. С.6.17). Поднимая медленную нульклину выше, получим две новые точки пересечения и, следовательно, две новые периодические орбиты на многообразии M_{lc} , состоящее из устойчивых предельных циклов быстрой подсистемы модели. Одна из этих орбит устойчива, а другая неустойчива по переменной z . Это делает первую периодическую орбиту устойчивой в трехмерном фазовом пространстве, тогда как вторая — седлового типа и имеет двумерные устойчивое и неустойчивое инвариантные многообразия W^s и W^u . Локально, M_{lc} представляет собой неустойчивое многообразие седловой орбиты. Очевидно, что когда «горб» кривой ниже $\langle x \rangle$, не оставляя точек пересечения, многообразие M_{lc} свободно для возникновения пачечной активности в модели.

Локально, седло-узловая бифуркация периодических орбит определяет только первую компоненту катастрофы голубого неба в быстро-медленных системах (см. раздел 12.4 и [144]). Простая седло-узловая периодическая орбита в $\mathbb{R}^3$ имеет сильно устойчивое, или неведущее многообразие W^{ss} , которое разделяет окрестность седло-узловой орбиты на две области: узловую и седловую, см. Главу 12. В узловой области траектории притягиваются к седло-узловой периодической орбите. В седловой области седло-узловая периодическая орбита неустойчива. Ее неустойчивое многообразие W^u состоит из траекторий, которые притягиваются к ней при обратном ходе времени. В прямом времени, фазовая точка на W^u следует глобальному пути: вращаясь вокруг M_{lc} она медленно смещается вправо, затем падает вниз на ветвь M_{eq} , составленную из положений равновесий быстрой подсистемы, вдоль которой она скользит влево навстречу складке, с которой она прыгает вверх обратно на M_{lc} . Для катастрофы голубого неба *необходимо*, чтобы фазовая точка подходила к седло-узловой периодической орбите слева. Этого всегда можно добиться, двигая «горб» медленной нульклина вправо относительно складки на M_{eq} . Таким образом, траектории на неустойчивом многообразии W^u становятся гомоклиническими для седло-узловой периодической орбиты; это вторая составляющая катастрофы голубого неба.

Следовательно, при этой бифуркации модель имеет седло-узловую периодическую орбиту L_{sn} , двумерное неустойчивое многообразие W^u которой возвращается к периодической орбите, делая бесконечно много вращений в узловой (притягивающей) области слева от сильно устойчивого многообразия W^{ss} . Как только мы понижаем «горб» медленной нульклина, касание исчезает вместе с седло-узловой периодической орбитой. При условии сильного сжатия в направлении поперечном нижней, гиперполяризованной

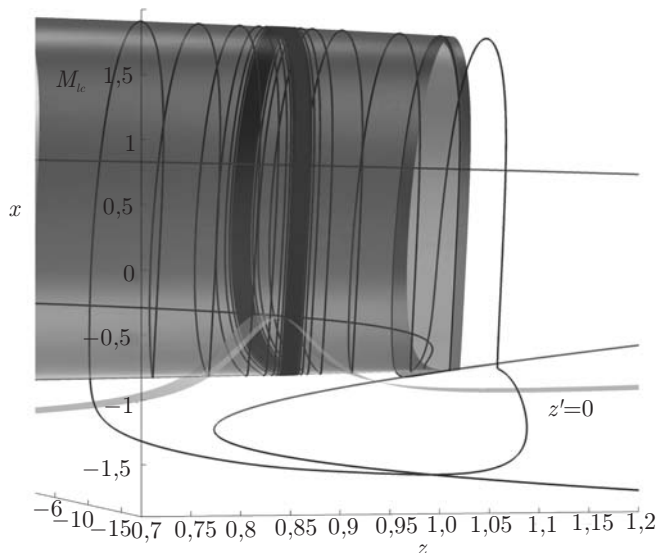


Рис. С.6.17. Катастрофа голубого неба в модели Хиндмарша–Розе. Проходя фантом седло-узловой периодической орбиты, периодическая орбита получает все больше и больше витков, увеличивая тем самым свой период. См. также рис. 12.4.1

ветви M_{eq} , которая составлена из экспоненциально устойчивых состояний равновесия быстрой подсистемы, бифуркация голубого неба приводит к появлению новой устойчивой периодической орбиты, длина и период которой стремятся к бесконечности при обратном изменении параметра. Бесконечный период этой «пачечной» орбиты обусловлен медленным переходом фазовой точки через «фантом» исчезнувшего седло-узла. Чем дальше система удаляется от бифуркации, тем короче будет пачки. Таким образом, приближая или удаляя «горб» медленной нуклины мы можем эффективно управлять периодом пачки, который оценивается как $1/\sqrt{A - A_*}$, где A_* бифуркационное значение. Отметим, что такая зависимость является особенностью седло-узловых бифуркаций. Более подробно см. [195].

Катастрофа голубого неба в нейронной модели. Катастрофа голубого неба оказалась типичным явлением в быстро-медленных системах [194]. В быстро-медленных моделях Ходжкина–Хаксли нейробиологии катастрофа голубого неба описывает непрерывный и обратимый переход между периодическими пачечной и тонической активностями, например, в

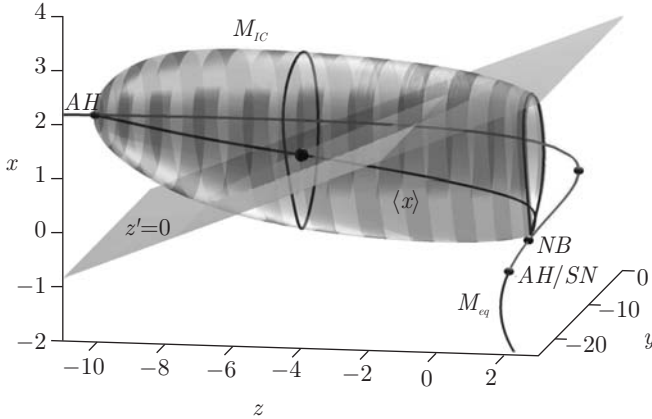


Рис. С.6.18. «Центр тяжести» устойчивой периодической орбиты на многообразии медленных движений M_{IC} в фазовом пространстве модели Хиндмарша–Розе. Он расположен в точке пересечения медленной нульклина $z' = 0$ с ветвью средних значений $\langle x \rangle$. Вращаясь вокруг M_{IC} , фазовая точка сдвигается потоком вправо пока она над нульклином при $z' > 0$, и оттягивается обратно влево, когда она проходит ниже нульклина. Когда эти противоположные силы взаимно компенсируют друг друга, фазовая точка вращается вокруг «центра тяжести», т. е. остается на периодической орбите

упрощенной модели нейрона сердца пиявки [196]:

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= -2 [30 m_{K2}^2 (V + 0,07) + 8 (V + 0,046) + \\
 &\quad + 200 f_{\infty}^3 (-150, 0,0305, V) h_{Na} (V - 0,045) + 0,0060], \\
 \dot{h}_{Na} &= [f_{\infty} (500, 0,0325, V) - h_{Na}] / 0,0406, \\
 \dot{m}_{K2} &= [f_{\infty} (-83, V_{1/2} + V_{K2}^{shift}, V) - m_{K2}] / 0,9,
 \end{aligned} \tag{C.6.37}$$

где V — это мембранный потенциал, h_{Na} — инактивация быстрого натриевого тока, и m_{K2} — активация постоянного тока калия; функция Больцмана $f_{\infty}(a, b, V) = 1/(1 + e^{a(b+V)})$ описывает динамику (ин)активации токов. Параметр бифуркации V_{K2}^{shift} — это отклонение от канонического значения $V_{1/2} = 0,018V$, соответствующего $f_{\infty} = 1/2$, т. е. полуктивированному каналу калия. Катастрофа голубого неба возникает в модели вблизи $V_{K2}^{shift} = -0,02425$ (рис. С.6.19).

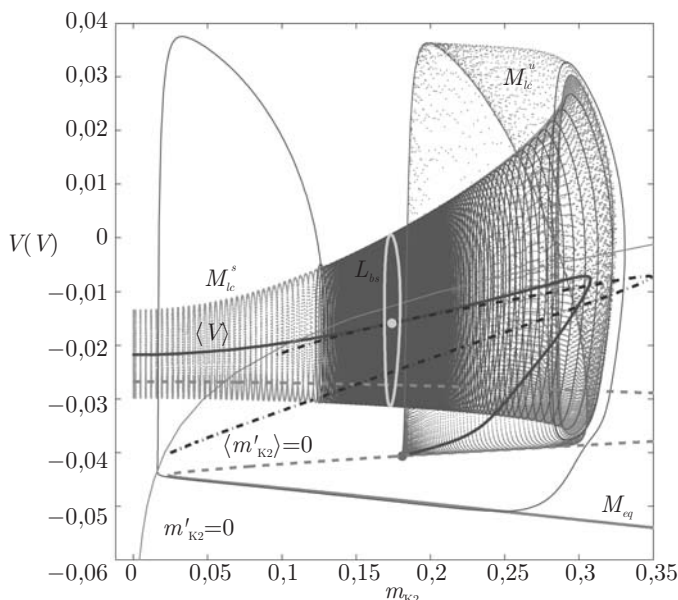


Рис. С.6.19. Длинная пачечная орбита многократно переключается между тоническим многообразием M_{lc} и гиперполяризованной ветвью состояний покоя M_{eq} в фазовом пространстве нейронной модели (С.6.37). Светлым выделен фантом седло-узловой периодической орбиты L_{SN} . После того, как седло-узловой цикл расщепляется на устойчивую и седловую орбиты, модель демонстрирует периодическую тоническую активность (из [196])

С.6.№80. Изучите механизм рождения и разрушения инвариантного тора в периодически возмущенном уравнении Ван-дер-Поля

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x - a(x^2 - 1)y + \beta \cos \omega t, \\ \dot{t} &= \omega \end{aligned} \quad (\text{С.6.38})$$

при возрастании β . Начните с бифуркации Андронова–Хопфа для начала координат в невозмущенном уравнении. Что происходит с предельным циклом при $a = 2$? Феноменологический сценарий эволюции тора показан на рис. С.6.16. Какая бифуркация предшествует его разрушению и когда он теряет гладкость? Следует уделить внимание поведению сепаратрис седла вблизи устойчивого резонансного цикла.

С.7. Гомоклинические бифуркации

Гомоклинические бифуркации *a priori* не локальная задача. Нахождение гомоклинической бифуркации в конкретном семействе дифференциальных уравнений — само по себе искусство. Кроме того, оно часто требует выполнения довольно сложных численных расчетов. Однако, как мы поняли при изучении нормальной формы Богданова–Тakensа, в некоторых особых случаях можно аналитически доказать существование гомоклинической петли. Это касается систем, близких к интегрируемым. Другим примером являются системы с кусочно-линейной правой частью, а также системы с двумя масштабами времени (с медленными и быстрыми переменными). Тем не менее эти примеры — исключения. А в рассматриваемых обычно нелинейных диссипативных системах ситуация довольно нетривиальна, особенно если седло в задаче имеет неустойчивое и устойчивое многообразие с размерностью равной или превышающей 2. Что действительно упрощает задачу — так это то, что существует не так много бифуркационных сценариев, которые обычно предшествуют появлению гомоклинической петли. Ниже мы проиллюстрируем некоторые из них. Однако этот список, несомненно, не полон, и мы надеемся, что пытливый и удачливый читатель натолкнется на новые бифуркации в дальнейших исследованиях.

Гомоклиническая бифуркация — составная конструкция. На первой стадии необходим анализ локальной устойчивости для определения, чем является состояние равновесия: седлом или седло-фокусом, чему равны первая и вторая седловая величина и т. д. После этого изучают эволюцию ω -предельных множеств сепаратрис при изменении параметров системы. Следует провести также отдельный анализ размерности инвариантных многообразий седловых периодических траекторий, рождающихся из гомоклинической петли. Она прямо связана с отношением локального расширения и сжатия вблизи седловой точки, т. е. она зависит от знака седловых величин.

С.7.№81. Придерживаясь тех же шагов, как и в изучении общей нормальной формы Богданова–Тakensа, проанализируйте структуру бифуркационного множества близи начала координат $\mu_1 = \mu_2 = 0$ в симметричной нормальной форме Хорозова–Тakensа:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \mu_1 x + \mu_2 y \pm x^3 - x^2 y.\end{aligned}$$

Нормировка

$$x \rightarrow \varepsilon u, \quad y \rightarrow \varepsilon^2 v, \quad |\mu_1| \rightarrow \varepsilon^2, \quad \mu_2 \rightarrow \varepsilon^2 \nu, \quad t \rightarrow t/\varepsilon$$

дает

$$\begin{aligned}\dot{u} &= v, \\ \dot{v} &= \gamma u + \nu v \pm u^3 - \varepsilon u^2 v,\end{aligned}$$

где $\gamma = \text{sign } \mu_1 = \pm 1$. При $\varepsilon = 0$ система становится гамильтоновой

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -\frac{\partial H}{\partial v}, \\ \dot{v} &= \frac{\partial H}{\partial u},\end{aligned}$$

с первым интегралом

$$H = \frac{v^2}{2} + \gamma \frac{u^2}{2} \pm \frac{u^4}{4}.$$

Наиболее интересен случай, когда знак γ противоположен знаку коэффициента члена четвертого порядка в H , так что предположим далее

$$H = \frac{v^2}{2} + \gamma \frac{u^2}{2} - \gamma \frac{u^4}{4}.$$

Эта интегрируемая система имеет три состояния равновесия $O(0, 0)$ и $O_{1,2}(\pm 1, 0)$. Когда $\gamma = 1$, начало координат является центром, в то время как $O_{1,2}$ — седла [см. рис. С.7.1 (а)].

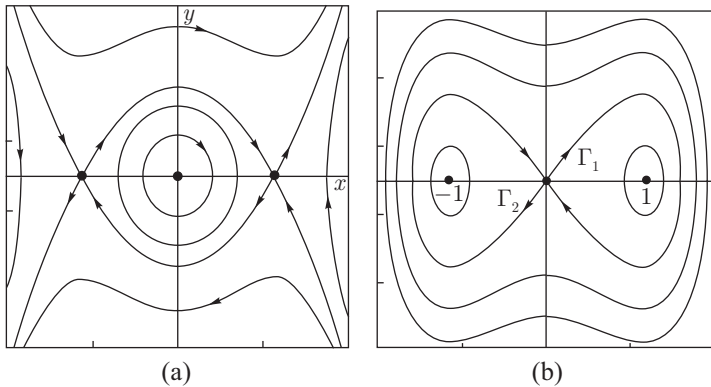


Рис. С.7.1. Интегральные кривые гамильтоновых систем: случаи $\gamma = 1$ (а) и $\gamma = -1$ (б)

Седла имеют симметричную гетероклиническую связку в уровне $H = 1/4$. Уравнения траекторий, соединяющих седла, можно найти явно, и для верхней оно имеет вид

$$u = \frac{e^{\sqrt{2}t} - 1}{e^{\sqrt{2}t} + 1}, \quad v = \frac{2\sqrt{2}e^{\sqrt{2}t}}{(e^{\sqrt{2}t} + 1)^2}.$$

В случае $\gamma = -1$ начало координат становится седлом, а $O_{1,2}$ являются центрами [см. рис. С.7.1 (b)]. Сепаратрисная восьмерка лежит в нулевом уровне соответствующего гамильтониана. Уравнение ее правого лепестка имеет вид

$$u(t) = \frac{2\sqrt{2}e^t}{1 + e^{2t}}, \quad v(t) = \frac{2\sqrt{2}e^t(1 - e^{2t})}{(1 + e^{2t})^2}.$$

Гетероклиническое соединение или гомоклиническая восьмерка в возмущенной системе сохраняется на кривой $\mu_2 = \nu\mu_1 + O(\mu_1^2)$, где ν находится из условия

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{d}{dt} H(u(t), v(t)) dt \Big|_{\varepsilon=0} = 0.$$

Последнее можно записать как

$$\nu = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} u^2(t)v(t) dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} v(t) dt},$$

что дает

$$\nu = \frac{1}{5} \quad \text{и} \quad \frac{4}{5},$$

соответственно для каждого случая. Вычислите седловые величины на кривой $H=1/4$ в случае $\gamma = -1$. Докажите, что устойчивый симметричный предельный цикл не может родиться из гомоклинической восьмерки на этой кривой. На рис. С.7.2 можно увидеть полную бифуркационную диаграмму.

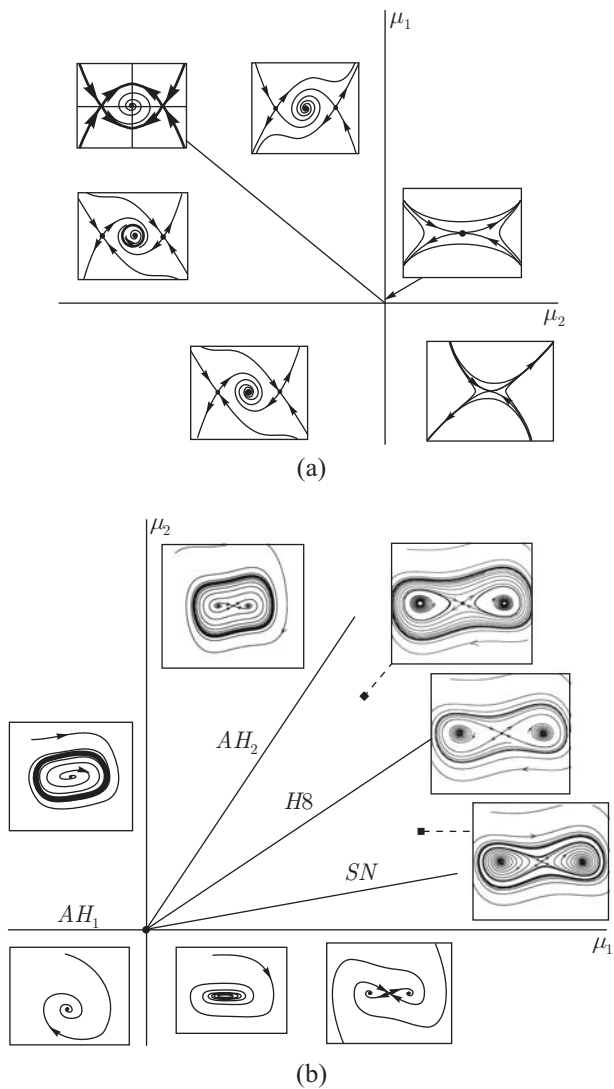


Рис. С.7.2. Бифуркационные диаграммы для нормальной формы Хорозова–Такенса

С.7.№82. Примените теорему Шильникова и объясните, какое поведение следует ожидать от системы Ресслера [172, 188]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= 0,3x - cz + xz\end{aligned}$$

вблизи гомоклинических петель седло-фокусов, изображенных на рис. С.7.3. Определите соответствующие характеристические показатели и вычислите седловые величины.

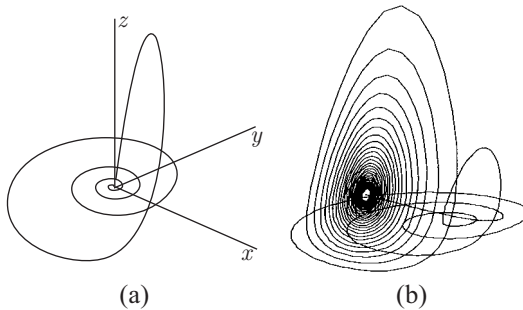


Рис. С.7.3. Гомоклинические петли к седло-фокусам O и O_1 в модели Ресслера при $(a = 0,380, c = 4,820)$ и $(a = 0,4853, c = 4,50)$, соответственно

Расчеты показывают, что при заданных параметрах седло-фокус O имеет показатели $\lambda_{1,2} \simeq 0,1597 \pm i0,9815$ и $\lambda_3 \simeq -4,7594$. Поскольку комплексные экспоненты $\lambda_{1,2}$ являются наиболее близкими к мнимой оси, гомоклиническая петля влечет появление бесконечного множества седловых периодических орбит. Кроме того, поскольку вторая седловая величина $\sigma_2 = \lambda_3 + 2 \operatorname{Re} \lambda_{1,2}$ отрицательна (здесь она равна дивергенции векторного поля в O), вблизи гомоклинической петли могут также существовать и устойчивые периодические орбиты. Эти устойчивые орбиты имеют большие периоды и узкие области притяжения, и поэтому они практически невидимы в численных экспериментах.

Во втором случае состояние равновесия O_2 имеет характеристические показатели $(-0,0428 \pm 3,1994i, 0,4253)$. В отличие от первого случая, в малой окрестности петли нет устойчивых периодических орбит, поскольку дивергенция векторного поля в O_2 положительна. (Вопрос: как мультипликаторы периодических орбит связаны с дивергенцией векторного поля. Ответ внутри книги.)

С.7.№83. Изучите следующую $\mathbb{Z}_3$ -симметричную цепь Чуа с кубической нелинейностью [179]:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a \left(y - \frac{x}{6} + \frac{x^3}{6} \right), \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -by,\end{aligned}\tag{C.7.1}$$

где $a \geq 0$ и $b \geq 0$ — управляющие параметры. Когда $a = b = 0$, бифуркационная диаграмма (C.7.1) идентична диаграмме нормальной формы Хорозова–Такенса. В частности, она включает бифуркацию гомоклинической восьмерки. Таким образом, соответствующая бифуркационная кривая, обозначенная $H8$, начинается из начала координат на плоскости параметров (a, b) на рис. С.7.4. Отдельного изучения здесь заслуживают четыре точки коразмерности 2 на этой кривой, в которых выполнены следующие резонансные условия (в соответствии с параграфом С.2):

- (1) NS ($a \simeq 1,13515, b \simeq 1,07379$) отвечает седлу (в начале координат) с нулевой седловой величиной σ . Ниже этой точки σ положительна.
- (2) Точка $S \rightarrow SF$ ($a \simeq 1,20245, b \simeq 1,14678$) отвечает переходу от седла к седло-фокусу $(2, 1)$. Важно, что в этой точке $\sigma < 0$.
- (3) NFS отвечает нейтральному седло-фокусу, для которого седловая величина σ обращается в нуль.
- (4) Вводим вторую седловую величину σ_2 , равную сумме трех ведущих характеристических показателей в седло-фокусе. В трехмерном случае она равна дивергенции векторного поля в начале координат. Здесь кривая $\sigma_2 = 0$, заданная уравнением $a = 6$, пересекает $H8$ в точке ($a = 6, b = 7,19137$). Над этой точкой $\sigma_2 > 0$.

Эти точки делят бифуркационную кривую $H8$ на 4 сегмента, поведение на которых описано ниже.

Сегмент $(0, NS)$: на этом интервале бифуркация гомоклинической восьмерки аналогична происходящей в нормальной форме Хорозова–Такенса. Обе петли, которые образуют гомоклиническую восьмерку, являются ориентируемыми. Размерность центрального гомоклинического многообразия равна 2. Третье измерение еще не играет существенной роли. Таким образом, из результатов параграфа 13.7 следует, что справа от $H8$ существует два неустойчивых цикла (цикл 1 и 2 на рис. 13.7.9). Слева от $H8$

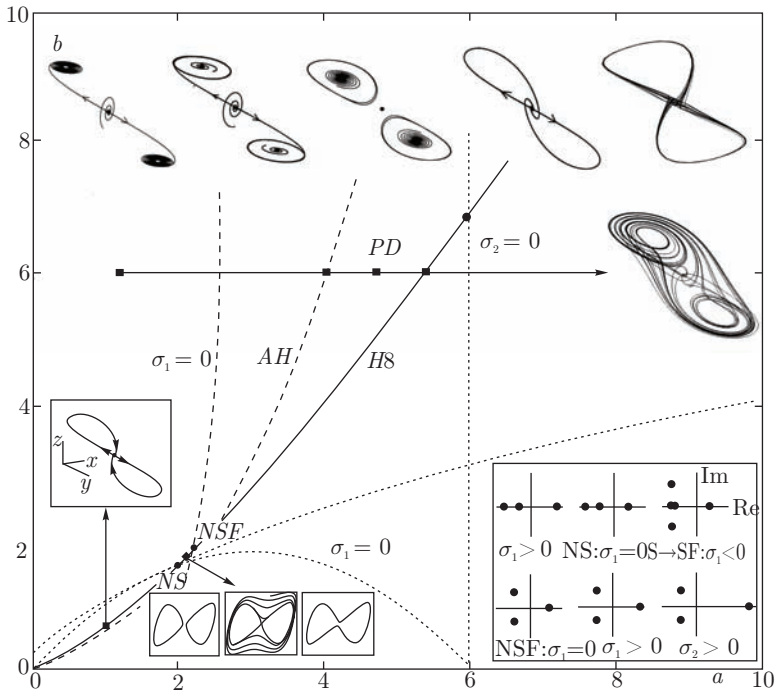


Рис. С.7.4. Бифуркационная диаграмма цепи Чуа

из гомоклической восьмерки при бифуркации возникает симметричная седловая периодическая орбита (цикл 12), см. также рис. С.7.5.

Точка *NS*. Эта точка имеет коразмерность 2, так как $\sigma = 0$. Поведение траекторий вблизи гомоклической восьмерки, а также структура бифуркационного множества вблизи такой точки зависят от сепаратрисной величины A (см. формулу (13.3.8)). Более того, они зависят не только от того, является ли A положительным или отрицательным, здесь существенно также, $|A|$ больше или меньше 1. Если $|A| < 1$, гомоклическая восьмерка устойчива и она неустойчива в противоположном случае. Чтобы определить, какой мы имеем здесь случай, можно выбрать начальную точку достаточно близко к гомоклической восьмерке и численно построить траекторию, которая выходит из нее. Если восьмерка отталкивает ее (как в случае цепи Чуа), значит $|A| > 1$. Отметим, что кривая двойных циклов с множителем $+1$ должна выходить из точки *NS* в силу теоремы 13.5.

На промежутке между NS и NSF седловая величина меньше нуля, т. е. $\sigma < 0$. Двигаясь вверх вдоль HS , мы проходим через точку, на которой начало координат становится седло-фокусом. В силу теоремы 13.11 в любом случае (т. е. когда начало координат является седлом или седло-фокусом с $\sigma < 0$) из гомоклинической восьмерки при бифуркации возникают только два устойчивых цикла или один симметричный устойчивый цикл на противоположных сторонах от $H8$. Таким образом, точка $S \rightarrow SF$ не является точкой бифуркации. Однако, введя малое возмущение, которое разрушит симметрию цепи Чуа, можно получить совершенно другую бифуркационную диаграмму (см. разницу между рис. 13.7.5 и 13.7.9). Следует также отметить, что переход от седла к седло-фокусу вызовет значительные изменения в динамике системы, если в такой точке σ больше нуля. Если рассматривать только одну гомоклиническую петлю, это вызовет взрывной переход от единственной седловой периодической орбиты в случае седла к бесконечному множеству их в случае седло-фокуса (см. теоремы 13.7–10 и [29]).

Точка NSF : $\sigma = 0$ отвечает нейтральному седло-фокусу. В этой точке коразмерности 2 динамика траекторий вблизи гомоклинических петель к седло-фокусу становится хаотической. Эта бифуркация действительно предшествует возникновению хаотического аттрактора в цепи Чуа. В общем случае эта бифуркация впервые исследована в [29]. Коротко результаты [29] можно описать следующим образом: существуют бесконечные последовательности бифуркационных кривых коразмерности 1, которые накапливаются к кривой $H8$ над точкой NSF . Эти кривые отвечают вторичным гомоклиническим бифуркациям, бифуркациям седло-узла или удвоения периода для периодических орбит, близких к обходной гомоклинике. Для того чтобы понять это явление (гомоклинический взрыв), можно исследовать упрощенную картину эволюции одномерного отображения с седловым индексом $\nu > 1$ (соответствующим $\sigma < 0$), и $\nu < 1$ ($\sigma > 0$), показанную на рис. С.7.6. Напоминаем, что в рассматриваемом случае $\nu = |\lambda^*|/\lambda_1$, где $\lambda_1 > 0$ и λ^* — действительная часть комплексно-сопряженной пары показателей седло-фокуса. Из рисунка видно, что период периодической орбиты стремится к бесконечности, когда параметр приближается к критическому значению. В случае седло-фокуса при $\nu < 1$ зависимость периода от параметра имеет характерные колебания. Каждая точка поворота соответствует бифуркации седло-узла, которая сопровождается бифуркацией удвоения периода. Таким образом, имеет место бесконечная последовательность таких бифуркаций, накапливающихся к гомоклинической бифуркации [173].

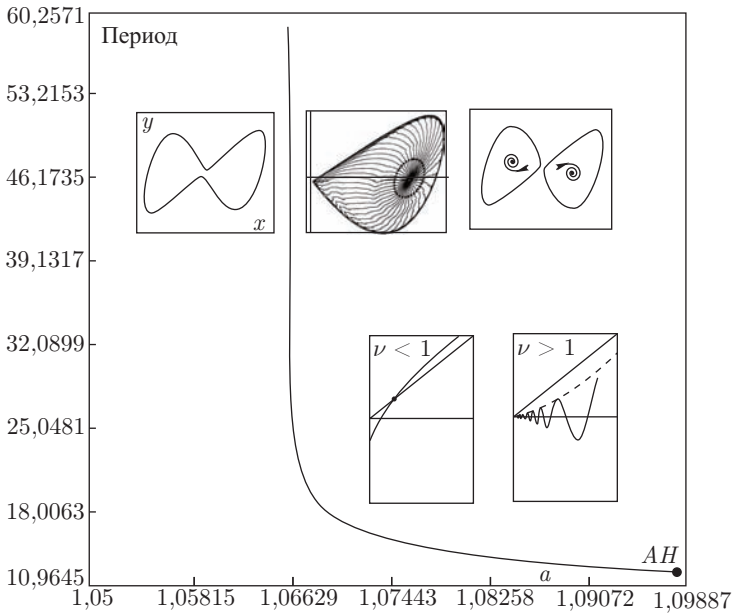


Рис. С.7.5. Зависимость периода T орбиты, рождающейся в субкритической бифуркации Андронова–Хопфа, от параметра a ($b = 1$), когда цикл подходит к гомоклинической петле. Начало координат является седлом с $\sigma > 0$

Как мы видели, в окрестности гомоклинической петли к седло-фокусу с $\nu < 1$ могут существовать негрубые периодические орбиты, в частности, седло-узлы (см. главу 13). В связи с этим встает вопрос: «Приводит ли бифуркация седло-узла к появлению устойчивых орбит?»

Для того чтобы на него ответить, необходимо вместо одномерного изучить двумерное отображение Пуанкаре и вычислить его якобиан. Если его абсолютное значение больше единицы, отображение не имеет устойчивых периодических точек и, следовательно, в окрестности гомоклинической траектории не существует устойчивых периодических орбит, т.к. произведение мультипликаторов неподвижной точки равно детерминанту матрицы Якоби. Из формулы (13.4.2) можно увидеть, что значение якобиана зависит от того, какое условие выполнено: $2\nu - 1 > 0$ или $2\nu - 1 < 0$, или, что эквивалентно, $\nu > 1/2$ или $\nu < 1/2$. В терминах характеристических показателей седло-фокуса это условие состоит в том, больше или меньше нуля вторая седловая величина $\sigma_2 = \lambda_1 + 2 \operatorname{Re} \lambda^*$. Можно показать [100], что

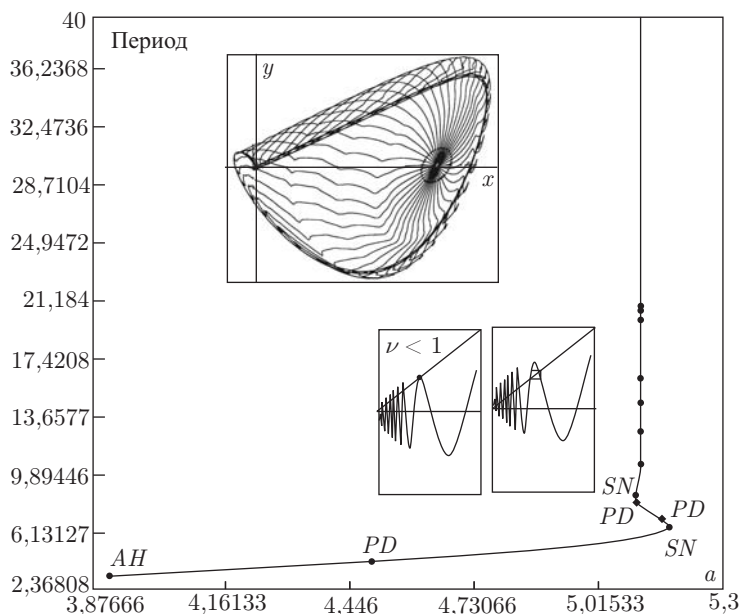


Рис. С.7.6. Зависимость периода T от периодической орбиты, рожденной в надкритической бифуркации Андронова–Хопфа, от параметра a при $(b = 6)$, когда цикл подходит к гомоклинической петле седло-фокуса с $\sigma > 0$

если $\sigma > 0$, а $\sigma_2 < 0$ ($a < 6$ на рис. С.7.4), то вблизи петли может наряду с седловой периодической орбитой существовать устойчивая. Однако, когда $\sigma_2 > 0$ (автоматически $\sigma > 0$), при бифуркации седло-узла рождаются вполне неустойчивые периодические орбиты.

Последнее замечание о цепи Чуа касается бифуркаций вдоль пути $b = 6$ (см. рис. С.7.4). Отметим, что эта последовательность весьма типична для многих симметричных систем с седловыми состояниями равновесия. Мы продолжаем устойчивую периодическую орбиту, возникающую при надкритической бифуркации Андронова–Хопфа нетривиальных состояний равновесия при $a \simeq 3,908$. При больших a обе сепаратрисы стремятся к устойчивым периодическим орбитам. Последние претерпевают бифуркацию вилки при $a \simeq 4,496$ и становятся седловыми. Их размер возрастает, и при $a \simeq 5,111$ они влипают в гомоклиническую восьмерку. Эта, а также последующие бифуркации приводят к возникновению странного аттрактора, известного как аттрактор Чуа в цепи Чуа.

С.7.№84. Гомоклинические бифуркации в модели Шимицу–Мо-риока [127]:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x - ay - xz, \\ \dot{z} &= -bz + x^2.\end{aligned}\tag{С.7.2}$$

Мы будем искать гомоклинические бифуркации, начав с бифуркации Андронова–Хопфа для нетривиальных состояний равновесия $O_{1,2}$, которая имеет место на кривой AH : $b = \frac{(2 - a^2)}{a}$ (см. параграф С.2). Эта бифуркация может быть надкритической — первая ляпуновская величина отрицательна справа от точки GH , а справа от точки GH она является субкритической. Рассмотрим далее эволюцию поведения сепаратрис седла O в начале координат при уменьшении параметра a при фиксированном $b = 0,9$. Выше AH сепаратрисы стремятся к устойчивым состояниям равновесия $O_{1,2}$, которые теряют устойчивость в надкритической бифуркации Андронова–Хопфа при $a \simeq 1,0341$. В области между AH и HB сепаратрисы притягиваются к появившимся устойчивым периодическим орбитам. При дальнейшем уменьшении a амплитуда устойчивых орбит увеличивается и при $a \simeq 0,8865$ они формируют гомоклиническую бабочку. Такая симметричная гомоклиническая бифуркация с $\sigma < 0$ часто называется *склеивающей* бифуркацией, вне зависимости от геометрической формы гомоклинической конфигурации, которая может быть бабочкой или восьмеркой. Можно увидеть, что ведущим направлением в седле при заданных значениях параметров является ось z , отвечающая характеристическому показателю $\lambda_2 = -b$. Таким образом, по нашей классификации, мы имеем дело с гомоклинической бабочкой: обе сепаратрисы входят в седло, касаясь друг друга. Гомоклиническая бабочка преобразуется в восьмерку, когда сепаратрисы входят в седло в противоположных направлениях, заданных собственным вектором другого отрицательного собственного числа, которое становится ведущим, когда $\lambda_2 < \lambda_3 = -a/2 - \sqrt{a^2/4 + 1}$ на HB . И в том и в другом случае после гомоклинической бифуркации возникает устойчивая симметричная периодическая орбита. Таким образом, при $\sigma < 0$ результат гомоклинической перестройки всегда одинаков. Другая ситуация наблюдается при $\sigma > 0$, когда геометрическая форма гомоклиник является ключевым фактором.

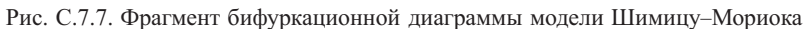
Важное условие резонанса на HB имеет место при ($a \simeq 1,044$, $b \simeq 0,608$), когда седловая величина σ обращается в нуль (см. параграф 13.6). Вблизи такой точки локальное изучение сводится к соответствующей усеченной «нормальной форме» — одномерному отображению

Пуанкаре

$$\bar{x} = (-\mu + A|x|^{1+\sigma}) \operatorname{sign}(x), \quad (\text{С.7.3})$$

где $\|\mu, \sigma\| \ll 1$, а A — сепаратрисная величина. В нашей интерпретации, неподвижная точка в начале координат при $\mu = 0$ соответствует гомоклинической бабочке. Из параграфа 13.6 следует, что структура бифуркационной диаграммы вблизи такой точки коразмерности 2 существенно зависит от величины и знака A . Ранее мы уже подчеркивали роль A , но повторим, что знак A определяет ориентацию гомоклинических петель. Более того, в «линейном случае» (т.е. при $\sigma = 0$) величина A также определяет устойчивость гомоклинической бабочки. Без компьютерного моделирования способов нахождения значения A в конкретной системе дифференциальных уравнений практически не существует. Простейший способ сделать это — провести численный эксперимент, аналогичный тому, который мы уже использовали при анализе цепи Чуа. Сепаратрисные величины будут удовлетворять условию $|A| < 1$, если сепаратрисы седла остаются в малой окрестности резонансной ($\sigma = 0$) гомоклинической бабочки после того, как она расщепляется. Другая проблема — как определить «ориентацию», т.е. найти, положительным или отрицательным является A ; мы вернемся к этому вопросу позже.

Из численных экспериментов, которые показывают, что узкие траектории действительно стремятся к гомоклинической бабочке, нетрудно сделать вывод, что A должна быть в пределах $(0, 1)$. В этом случае, когда $\sigma < 0$, все просто: гомоклиническая бабочка расщепляется либо на две устойчивые периодические орбиты (рис. С.7.8(g)), либо только на одну устойчивую периодическую орбиту (рис. С.7.8(i)). Когда $\sigma > 0$, из параграфа 13.6 следует, что из этой точки коразмерности 2 выходят две бифуркационные кривые. Они соответствуют бифуркации седло-узла (рис. С.7.8(e)) и двойной гомоклинической петли (рис. С.7.8(f)). Симметрия добавляет в задачу огромное количество других бифуркационных явлений. Особого внимания заслуживает бифуркация, показанная на рис. С.7.8(c). Она приводит к образованию замкнутого интервала, который отображается сам на себя. Более того, поскольку производная отображения больше 1 на этом интеграле, оно не имеет устойчивых периодических точек, зато имеет бесконечное множество неустойчивых. Это момент появления инвариантного притягивающего множества без устойчивых траекторий — аттрактора Лоренца. В терминах потока, эта бифуркация происходит, когда одномерные сепаратрисы седла в начале координат ложатся на двумерные устойчивые многообразия седловых периодических орбит, которые ранее возникли при бифуркации из каждой петли (аналогичную бифуркацию для системы Лоренца см. на рис. С.7.14). Поскольку $A > 0$, эти многообразия гомеоморфны цилиндру.



Важный вывод на данном этапе: поскольку имеется гомоклиническая бабочка с $|A| < 1$, область существования аттрактора Лоренца примыкает к точке коразмерности 2 в пространстве параметров. Заинтересованный читатель может ознакомиться с бифуркациями аттрактора Лоренца в модели Шимицу–Мориока в [127, 129, 187], а в исходной системе Лоренца и некоторых других — в [114, 115, 117, 161].

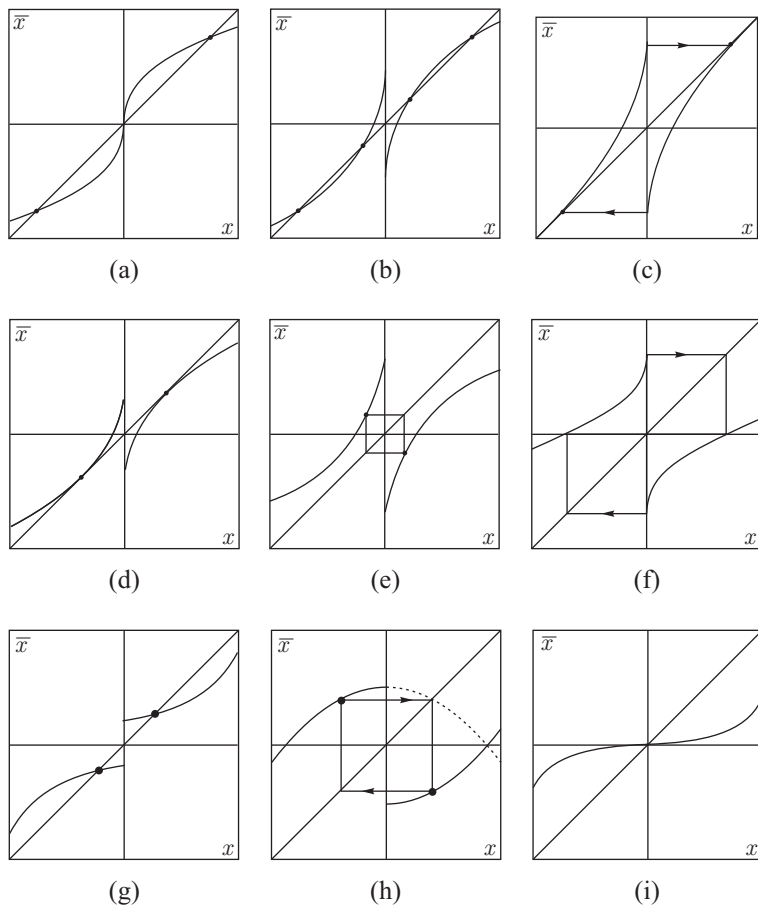


Рис. С.7.8. Бифуркации в одномерном отображении вблизи точки $\sigma = 0$ (a)–(f) отвечают случаю $\sigma > 0$, в то время как (g)–(i) отвечают $\sigma < 0$

С.7.№85. Рассмотрим бифуркации симметричного цикла, когда σ меняется с положительного на отрицательное. Может ли с циклом произойти бифуркация удвоения периода? Бифуркация седло-узла? Воспользуйтесь симметрией задачи. Для отображения (С.7.3) найдите аналитические выражения основных бифуркационных кривых. Предшествует ли здесь бифуркация седло-узла появлению аттрактора Лоренца? Исследуйте кусочно-

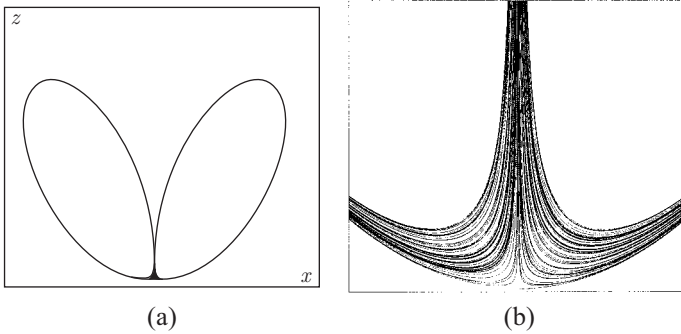


Рис. С.7.9. Узкий аттрактор Лоренца в модели Шимицу–Мориока вблизи точки $\sigma = 0$

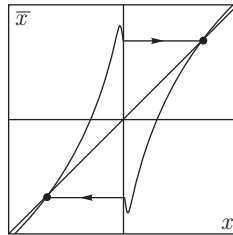


Рис. С.7.10. Аттрактор Лоренца не возникает, если $A < 0$ на кривой LA

линейное отображение с $A > 1$ и определите критическое значение A , после которого возникает аттрактор Лоренца.

Другая гомоклиническая бифуркация коразмерности 2 возникает в модели Шимицу–Мориока при $(a \simeq 0,605, b \simeq 0,549)$ на кривой H_2 , отвечающей двойным гомоклиническим петлям. В этой точке сепаратрисная величина A обращается в нуль и петли становятся неориентируемыми (см. рис. 13.4.8 и С.7.11). Геометрия локального двумерного отображения Пуанкаре показана на рис. 13.4.5 и 13.4.6. Для того чтобы найти, чему соответствует наша бифуркация согласно классификации параграфа 13.6, нам также необходимо определить седловой индекс ν в этой точке. Снова, как и в случае гомоклинической петли к седло-фокусу, важно определить, какое из условий выполнено: $\nu < 1/2$ или $\nu > 1/2$. Вычисления показывают, что

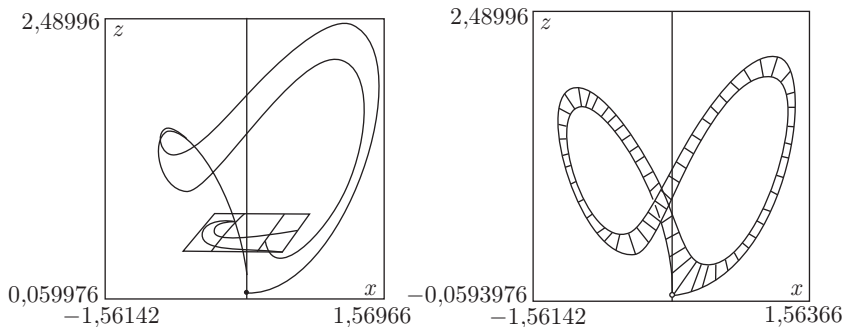


Рис. С.7.11. Неориентируемые ($A < 0$) и ориентируемые ($A > 0$) двойные гомоклинические петли. Двумерное отображение Пуанкаре имеет характерный крюк после того, как сепаратрисная величина A становится отрицательной

для данных значений параметра $\nu > 1/2$. Таким образом, бифуркационная диаграмма для каждой гомоклинической петли в бабочке аналогична приведенной в параграфе 13.6. Из данной точки выходят следующие четыре бифуркационные кривые. Они отвечают бифуркации седло-узла (обозначенной через «+1» на рис. С.7.7), бифуркации удвоения периода («-1») и двойным петлям сепаратрисы (концы этих кривых по спирали стремятся к точкам T на плоскости (a, b)). Штриховая кривая на плоскости (a, b) соответствует $A = 0$ на бифуркационной диаграмме на рис. 13.6.4. Выше этой кривой все гомоклинические петли ориентируемые, а ниже ее — неориентируемые. В каждой точке пересечения кривой $A = 0$ и кривой гомоклинической бифуркации структуры бифуркационных множеств одинаковы, пока ν не станет больше $1/2$. Важность этого отношения становится очевидной при изучении одномерного отображения Пуанкаре

$$\bar{x} = (\mu + A|x|^\nu + |x|^\gamma) \operatorname{sign}(x), \quad (\text{C.7.4})$$

где $|\mu, A| \ll 1$, $\nu = |\lambda_2|/\lambda_1$ и $\gamma = |\max\{2\lambda_2, \lambda_3\}|/\lambda_1$, при этом $\lambda_{1,2}$ — это неустойчивый и ведущий устойчивый характеристический показатель в седле, а λ_3 — неведущий устойчивый характеристический показатель.

Когда $A = 0$, устойчивость траекторий этого отображения определяется третьим членом. Очевидно, что в зависимости от γ отображение для значений параметра на кривой $A = 0$ может быть либо сжатием, если $\gamma > 1$, либо растяжением, если $\gamma < 1$. Если $2\lambda_2 > \lambda_3$, то условие на γ сводится либо к $\nu < 1/2$, либо к $\nu > 1/2$. Нетрудно понять, что отображение будет иметь форму, показанную на рис. С.7.8(а) при $\nu < 1/2$ и на рис. С.7.8(б) при $\nu > 1/2$. Если $\nu < 1/2$, при нулевых значениях A устойчивые точки отсутствуют.

Структура бифуркационной диаграммы для усеченного отображения (без члена $|x|^\gamma$) с $1/2 < \nu < 1$ и $A > 0$ аналогична резонансному случаю $\nu = 1$. Случай $A < 0$ изображен на рис. С.7.12 (а)–(с). Задача читателя — исследовать бифуркации в этом отображении. Характерным свойством случая $A < 0$ является то, что отображение имеет инвариантный притягивающий интервал, который отображается сам в себя (рис. С.7.12 (с)). На этом интервале мы имеем хаотическое поведение с «неориентируемым аттрактором Лоренца» [127, 129].

С точки зрения потока это означает, что для значений параметра из экспоненциально узкой области в пространстве параметров, которая при- мыкает к точке $A = 0$ на $H8$ со стороны $A < 0$, существует аттрактор типа Лоренца, содержащий бесконечное множество седловых периодических орбит, устойчивые и неустойчивые многообразия которых гомеоморфны ленте Мёбиуса.

Одномерное отображение (С.7.4) имеет при $A < 0$ вид, по форме схожий с параболой, показанный на рис. С.7.12 (d)–(f). Очевидно, можно ожидать здесь каскад удвоения периода (рис. С.7.12 (с) и С.7.11 (е)), подобные тем, которые появляются при исследовании чисто квадратичного отображения в параграфе С.11. Отличие состоит в бесконечной производной в точке разрыва, которая гарантирует сильное растяжение вблизи начала координат.

Каскад удвоения периода тесно связан с каскадом удвоения гомоклиник [71, 120, 126], см. рис. С.7.13.

Двумерное отображение имеет характерную форму крюка при значениях параметра вдоль кривой $H8$ в области $A < 0$, как показано на рис. С.7.10. Фактически это наблюдение предполагает простейший способ вычисления ориентации гомоклинической петли; а именно, выбрав точку на секущей, близкую к устойчивому многообразию, и построив соответствующую траекторию, проверяем, лежат ли начальная и конечная точки траектории по одну сторону относительно W^s на секущей. Если это так, то $A > 0$, в противном случае $A < 0$. Начальная точка должна быть достаточно близкой к W^s , потому что, когда A меняет знак еще один раз и вновь становится положительной, петля становится дважды скрученной и т. д. Рис. С.7.7 показывает две такие вторичные бифуркационные кривые, которые выходят из точки $A = 0$ и заканчиваются, наматываясь на точки T на плоскости параметров (a, b) (см. тонкую структуру вблизи точки T в [35, 174]). Такая точка коразмерности 2 (примерно $a \simeq 0,781, b \simeq 0,39$ на рис. С.7.7) отвечает гетероклиническому циклу, включающему седло в начале координат и нетривиальные седло-фокусы. Из [35] следует, что вблизи исходной точки T существуют последовательности аналогичных точек, которые лежат внутри сектора, ограниченного бифуркационными кривыми,

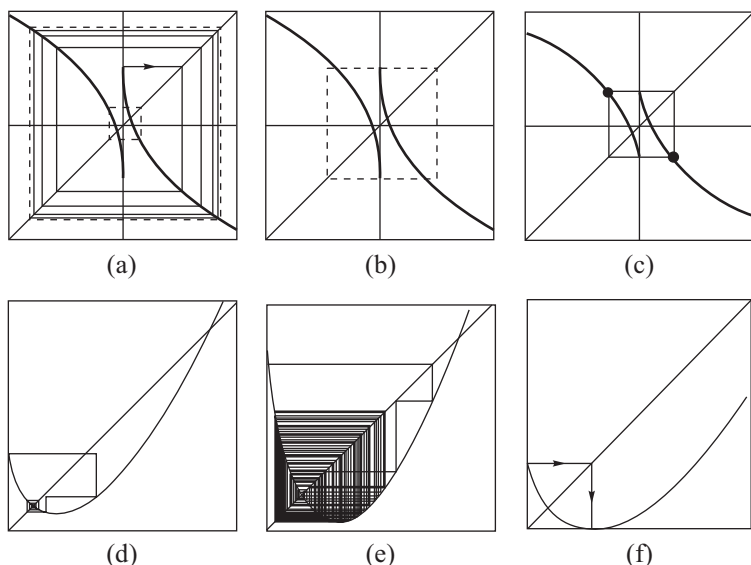


Рис. С.7.12. Перестройки отображения (С.7.4) вблизи $A \leq 0$

отвечающими гомоклиникам и гетероклиникам к этим седло-фокусам. Это частично объясняет, почему сепаратрисная величина A меняет здесь свой знак (вспомните двумерное отображение Пуанкаре вблизи седло-фокуса).

С.7.№86. Если существует гомоклиническая петля к седло-фокусу в модели Шимицу–Мориока, то, не вычисляя характеристические показатели седло-фокуса, что мы можем сказать о локальной структуре: тривиальная ли она (одна периодическая орбита) или сложная (бесконечное множество периодических орбит)? Ответ связан со знаком дивергенции векторного поля, которая постоянна в данной модели. Напомним, что это и сумма собственных чисел состояний равновесий в модели.

Классическое уравнение Лоренца

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma(x - y), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= -\frac{8}{3}z + xy.\end{aligned}\tag{C.7.5}$$

Фрагмент его бифуркационной диаграммы на плоскости (r, σ) показан на рис. С.7.14. Определите точки, где линия $\sigma = 10$ пересекает кривую $HВ$ го-

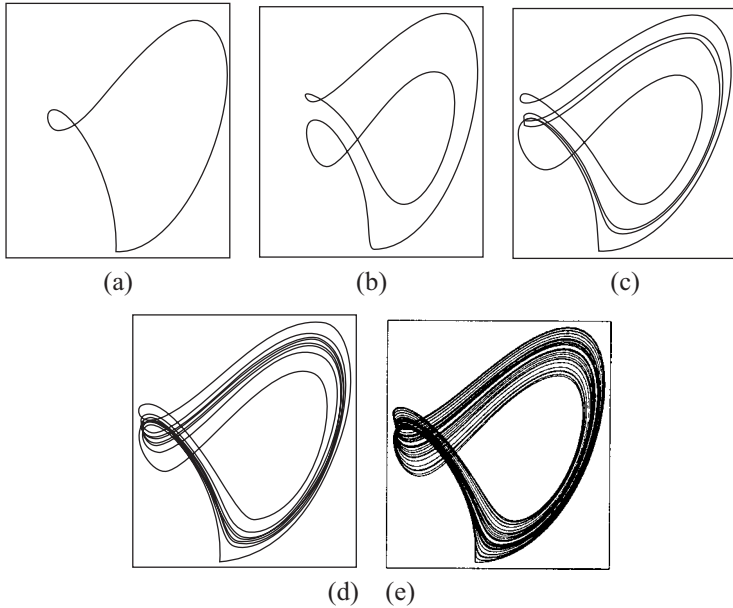


Рис. С.7.13. Каскад удвоений гомоклиник в модели Шимицу–Мориока при изменении параметра a ($b = 0,40$). Методом пристрелки найдите соответствующие значения параметра a

моклинической бабочки и кривую LA , на которой одномерные сепаратрисы седла ложатся на седловые периодические орбиты. Найдите точку на кривой LA , выше которой аттрактор Лоренца не возникает после пересечения кривой LA в направлении увеличения r . Пунктирная линия, проходящая через точку T на рис. С.7.14, отвечает моменту появления крючков в одномерном отображении Пуанкаре, когда сепаратрисная величина обращается в нуль: $A = 0$ (см. исследование модели Шимицу–Мориока). Как мы видим, гомоклинические бифуркации в системах с симметрией имеют много общего.

Далее опишем универсальный сценарий образования гомоклинической петли к седло-фокусу в «типичной» системе. В частности, этот механизм действует в модели Ресслера, в новых моделях Лоренца, в нормальной форме (С.2.27) и во многих других.

Первым шагом на пути к такой гомоклинической бифуркации является надкритическая бифуркация Андронова–Хопфа: устойчивое состояние

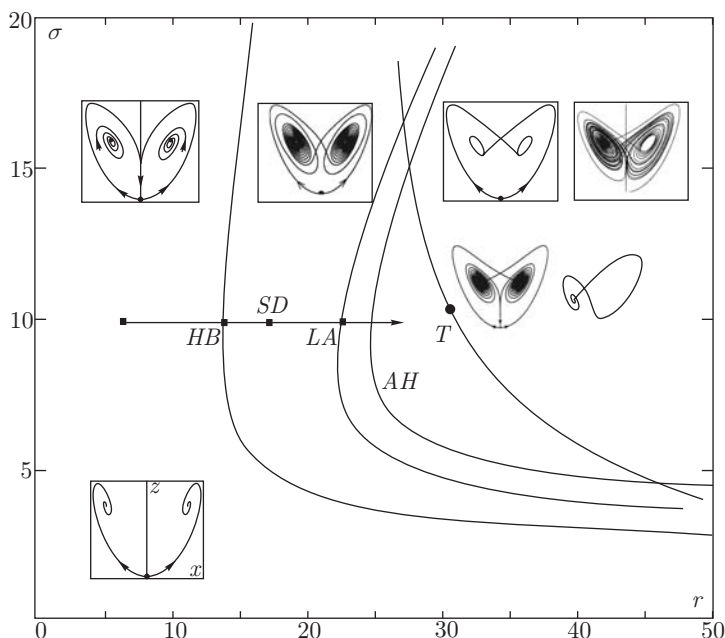


Рис. С.7.14. Классический путь к аттрактору Лоренца. Точка T , соответствующая гетероклиническому контуру, составленного из всех состояний равновесий, имеет координаты ($r \simeq 30,4$, $\sigma \simeq 10,2$, $b = 8/3$)

равновесия теряет устойчивость и становится седло-фокусом. Границей его двумерного устойчивого многообразия является появившаяся устойчивая периодическая орбита. Далее, пусть действительный ведущий мультипликатор устойчивой периодической орбиты станет кратным, после чего возникнет пара комплексно-сопряженных, остающихся внутри единичной окружности. При этом неустойчивое многообразие седло-фокуса начинает по спирали наматываться на устойчивую периодическую орбиту, формируя притягивающую «чашку» или «воронку», как показано на рис. С.7.15. При дальнейшем изменении параметра системы размеры витков увеличиваются, и в конечном итоге неустойчивое многообразие седло-фокуса сталкивается с его устойчивым многообразием. Обычно эта гомоклиническая бифуркация следует за предварительной бифуркацией, в ходе которой периодическая орбита теряет устойчивость: через удвоение, через удвоение, либо через рождение тора. Кроме того, если седловая величина в седло-фокусе

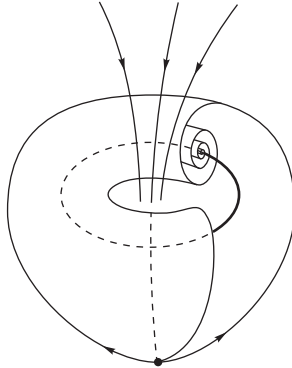


Рис. С.7.15. Притягивающая воронка

положительна, то воронка будет содержать притягивающее множество с нетривиальной структурой.

Представим эти шаги более наглядно, используя в качестве примера модель Лоренца [84, 128]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y^2 - z^2 - ax + aF, \\ \dot{y} &= xy - bxz - y + G, \\ \dot{z} &= bxy + xz - z,\end{aligned}\tag{С.7.6}$$

где (F, G) — управляющие параметры, а $(a = 1/4, b = 4, 0)$ (см. рис. С.7.16).

Новая модель Лоренца богата бифуркациями. Одной из них является бифуркация нетрансверсальной гомоклиники к седло-узлу. В параграфе С.2 мы уже нашли обычную кривую бифуркации седло-узла SN . Рис. С.7.17 дает бифуркационную диаграмму системы вблизи верхней ветви SN , сравните с рис. С.6.10 и С.2.4. Эта ветвь отвечает негрубому состоянию равновесия с одним нулевым характеристическим показателем; другие два имеют отрицательную действительную часть. Слева от SN это критическое состояние равновесия исчезает, в то время как справа от SN оно разваливается на два: устойчивое и седло-фокус $(2, 1)$. Кривая H_1 отвечает гомоклинической петле седло-фокуса. Точки, в которых H_1 сливается с SN , отвечают бифуркациям нетрансверсальной гомоклиники к седло-узлу (коразмерность 2). В такой точке неустойчивое многообразие седло-узла возвращается к состоянию равновесия вдоль сильно устойчивого многообразия. Остальная часть кривой SN отвечает бифуркации коразмерности 1 и разделена этими точками на чередующиеся интервалы двух типов. Бифуркационные последовательности на пути справа налево через эти интервалы значительно

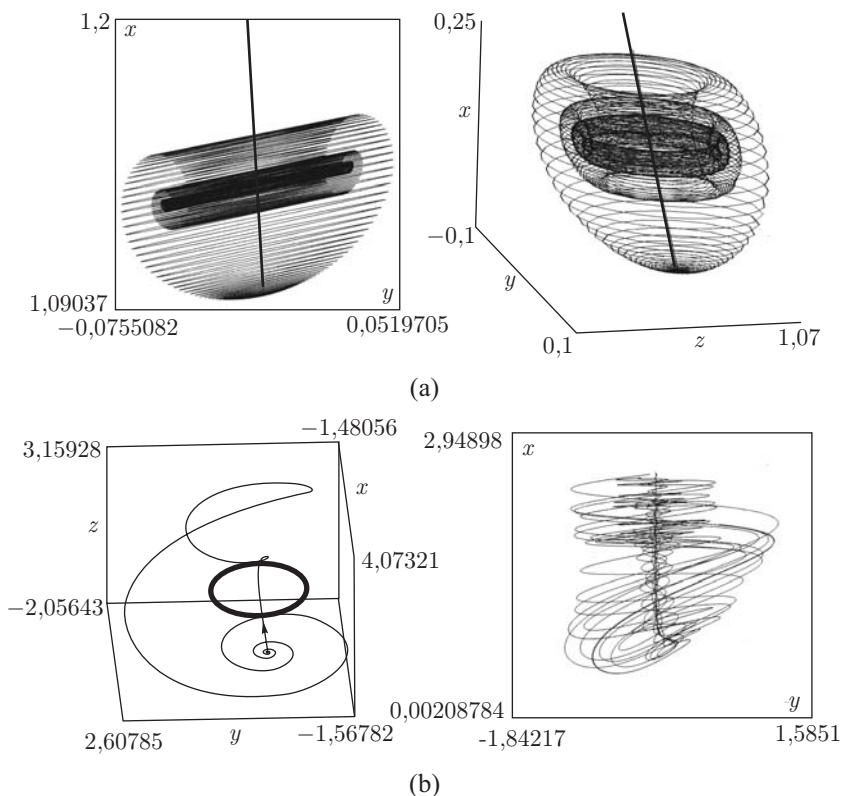


Рис. С.7.16. Развитие воронки в модели Лоренца-84

различаются. В первом случае это простая бифуркация седло-узла: два состояния равновесия сливаются и исчезают. Точка на сегменте второго типа отвечает седло-узловому состоянию равновесия с гомоклинической орбитой, которая становится притягивающим предельным циклом после того, как точка седло-узла исчезает слева от SN . Следует отметить, что эта бифуркационная последовательность обратима: при пересечении SN слева направо устойчивость периодической орбиты наследуется притягивающим состоянием равновесия. В связи с этим см. исследование «безопасных» и «опасных» бифуркаций в главе 14.

Завершим этот параграф иллюстрацией, соответствующей гомоклинической бабочке седло-фокуса в четырехмерном случае. Рассмотрим четы-

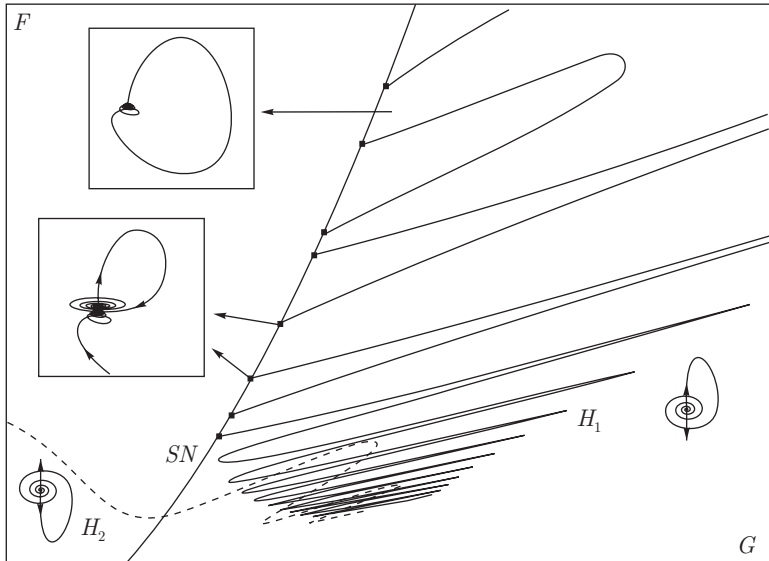


Рис. С.7.17. Расширенная бифуркационная диаграмма рис. С.6.10. Отмеченные точки отвечают бифуркации нетрансверсальной гомоклиники к седло-узлу

рехмерное возмущение уравнения Лоренца

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -10(x - y), & \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= -\frac{8}{3}z + \mu w + xy, & \dot{w} &= -\frac{8}{3}w - \mu z \end{aligned}$$

и модели Шимицу–Мориока

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, & \dot{y} &= -ay + x - xz, \\ \dot{z} &= w, & \dot{w} &= -bw - \mu z + x^2, \end{aligned} \quad (\text{C.7.7})$$

где новый параметр $\mu \geq 0$ вводится таким образом, что седловое состояние равновесия в начале координат, в ограничении на инвариантное (z, w) -подпространство, становится устойчивым фокусом.

С.7.№87. Найдите устойчивое, сильно устойчивое и неустойчивое линейное подпространство состояния равновесия в начале координат. Найдите основные гомоклинические петли к началу координат (начните с $\mu = 0$). Классифицируйте их на гомоклинические бабочки и восьмерки. Какова первая и вторая седловая величина в гомоклинических бифуркациях?

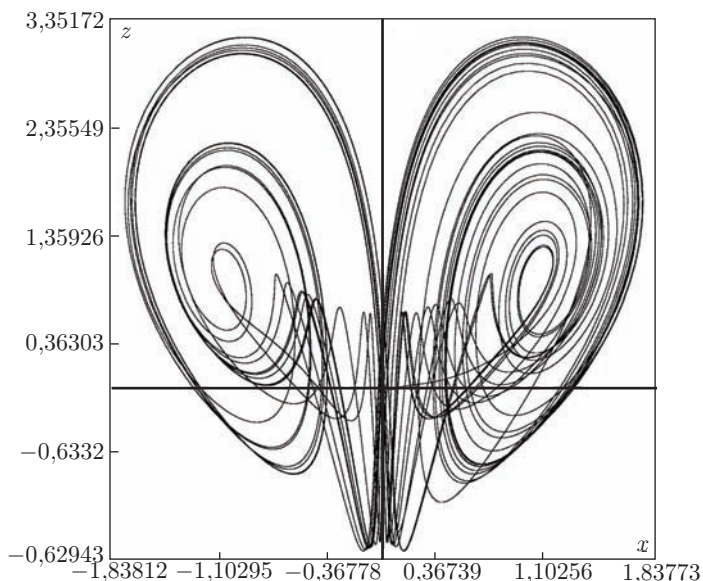


Рис. С.7.18. Гомоклинический взрыв, вызванный гомоклинической бабочкой к седло-фокусу в системе (С.7.7) при $a = 2$, $b = 0,5$, $\mu = 1,2$

Что вы можете сказать о размерности устойчивого и неустойчивого многообразия периодических орбит, которые появляются при гомоклиническом взрыве в этих моделях? Постройте отображение Пуанкаре.

С.7.№88. Гомоклиническая бифуркация в модели Хиндмарша–Розе: смена ведущего направления. В «плоском» случае $\varepsilon = 0$, устойчивый предельный цикл влипает в гомоклиническую петлю седлового состояния равновесия быстрой подсистемы модели Хиндмарша–Розе (С.6.23), смотри рис. С.6.14. Когда $0 < \varepsilon \ll 1$, ведущее неустойчивое направление седла меняется, так что одномерная устойчивая сепаратриса теперь возвращается, в обратном времени, к седлу полной системы вдоль направления, касательного ветви M_{eq} , составленной из седловых состояний равновесий быстрой подсистемы. Таким образом, значение $\varepsilon = 0$ соответствует вырожденной гомоклинической бифуркации смены ведущего направления в седле. Рисунок С.7.19 показывает этапы преобразования гомоклинических петель при увеличении ε (из [195]).

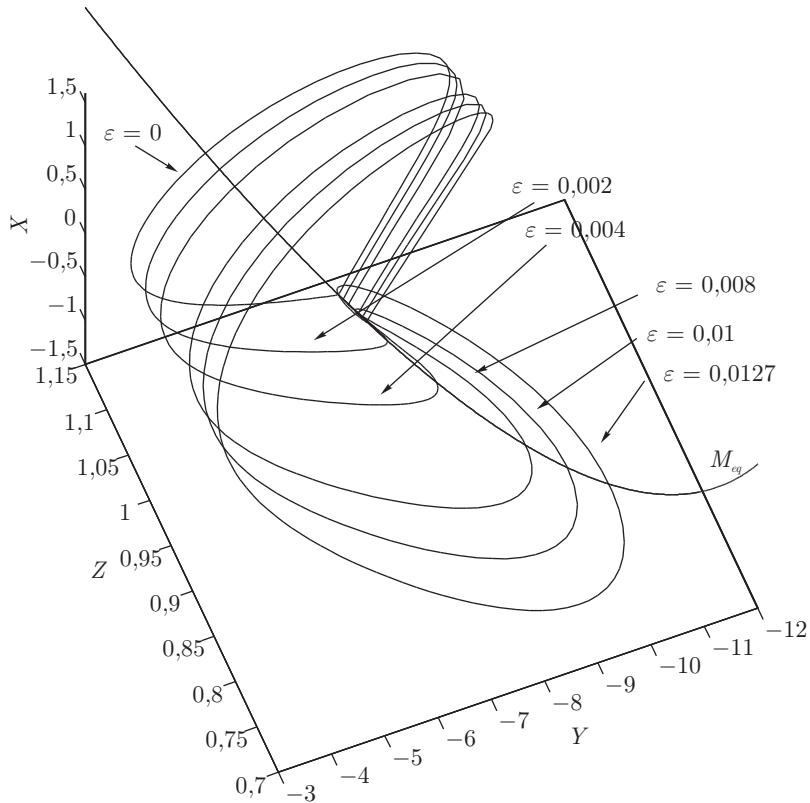


Рис. С.7.19. Этапы эволюции (x, y) -«плоской» гомоклинической петли седлового состояния точки модели Хиндмарша–Розе (С.6.23) при увеличении ε . Гомоклиническая петля претерпевает бифуркацию смены ведущего направления: одномерная устойчивая сепаратриса входит в седло, касаясь M_{eq} при $t \rightarrow -\infty$

Литература

Список литературы не является полным, книги, отмеченные *, рекомендуются для дополнительного чтения.

1. Afraimovich V. S., Bykov V. V. and Shilnikov L. P. The Origin and structure of Lorenz attractor, *Sov. Phys. Dokl.*, 1977, **22**(5), 253–255.
2. Afraimovich V. S. and Shilnikov L. P. On critical sets of Morse–Smale systems, *Trans. Moscow Math. Soc.*, 1973, **28**, 1761–1765.
3. Afraimovich V. S. and Shilnikov L. P. On some global bifurcations connected with the disappearance of fixed point of a saddle-node type, *Soviet Math. Dokl.*, 1974, **15**, 1761–1765.
4. Afraimovich V. S. and Shilnikov L. P. On small periodic perturbations of autonomous systems, *Doklady AN SSSR*, 1974, **5**, 734–742.
5. Afraimovich V. S. and Shilnikov L. P. The annulus principle and problems on interaction of two self-oscillation systems, *Prikladnaja Matematika i Mehanika*, 1977, **41**, 618–627.
6. Afraimovich V. S. and Shilnikov L. P. On a bifurcation of codimension-one leading to the appearance of a countable set of tori, *Soviet Math. Dokl.*, 1982, **25**, 101–105.
7. Afraimovich V. S. and Shilnikov, L. P. Invariant tori, their breakdown and stochasticity, *Amer. Math. Soc. Transl.*, 1991, **149**, 201–211.
8. Andronov A. A. Mathematical problems of the theory of self-oscillations, in *All-Union Conference on Auto-oscillations*, November 1933 (GTTI: Moscow-Leningrad), 32–71.
9. Andronov A. A. and Leontovich E. A. Some cases of the dependence of the limit cycles upon parameters, *Uchenye zapiski Gorkovskogo Universiteta*, 1937, **6**, 3–24.
10. Andronov A. A. and Leontovich E. A. Dynamical systems of first degree of roughness on the plane, *Am Math. Soc., Transl., II, Ser.*, 1968, **75**, 149–199.
- *11. Andronov A. A., Leontovich E. A., Gordon I. E. and Maier A. G. *The Theory of Bifurcations of Dynamical Systems on a Plane* (Israel program of scientific translations, Jerusalem), 1971.

-
- *12. Andronov A. A., Leontovich E. A., Gordon I. E. and Maier A. G. *The Theory of Dynamical Systems on a Plane* (Israel program of scientific translations, Jerusalem), 1973.
 13. Andronov A. A. and Pontryagin L. S. Systèmes grossières, *Dokl. Acad. Nauk SSSR*, 1937, **14**(5), 247–251.
 14. Andronov A. A. and Vitt A. A. Zur Theorie des Mitmehmens von van der Pol, *Archiv für Elektrotechnik*, 1930, Bd. XXIV, 99.
 15. Andronov A. A. and Vitt A. A. On Lyapunov stability, *Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki*, 1933, **5**.
 16. Anosov D. V., Bronshtejn I. U., Aranson S. Kh. and Grines V. Z. *Smooth Dynamical Systems, Dynamical Systems I*, Encyclopedia of Mathematics Science I (Springer-Verlag: New York), 1988, 149–233.
 - *17. Andronov A. A., Vitt A. A. and Khaikin S. E. *Theory of Oscillations* (Pergamon Press: Oxford), 1966.
 18. Arneodo A., Couillet P., Spiegel E. and Tresser C. Asymptotic chaos, *Physica*, 1981, **D14**, 327–347.
 19. Arnold V. I. Lectures on bifurcations and versal families, *Recre. Math. Surv.*, 1937, **27**(5), 54–123.
 - *20. Arnold V. I. *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations* (Springer-Verlag: New York), 1982.
 - *21. Arnold V. I., Afraimovich V. S., Ilyashenko Y. S. and Shilnikov L. P. *Bifurcation Theory*, Dynamical Systems V. Encyclopaedia of Mathematical Sciences (Springer-Verlag: New York), 1994.
 22. Arnold V. I. and Ilyashenko Y. S. *Ordinary Differential Equations*, Dynamical Systems I. Encyclopaedia of Mathematical Sciences (Springer-Verlag: New York), 1985.
 23. Auslander L., Green L. and Hahn F. Flows on homogeneous spaces, *Annals of Mathematics Studies*, 1963, **53** (Princeton University Press: Princeton, N.J.).
 - *24. Bautin N. N. *Behavior of Dynamical Systems near the Boundaries of Stability Regions* (OGIZ GOSTEHIZDAT: Leningrad), 1949.
 - *25. Bautin N. N. and Leontovich E. A. *Methods and Rules for the Qualitative Study of Dynamical Systems of the Plane* (Nauka: Moscow), 1976.
 26. Bautin N. N. and Shilnikov L. P. Supplement I: Safe and dangerous boundaries of stability regions, *The Hopf Bifurcation and Its Applications*, Russian translation of the book by Marsden J. E. and McCracken M. (Mir: Moscow), 1980.

-
27. Belitskii G. R. *Normal Forms, Invariants, and Local Mappings* (Naukova Dumka: Kiev), 1979.
 28. Belogui J. A. *Module de estabilidade para campos vetoriais em variedades tridimensionais* (Ph.D. Thesis, I.M.P.A., Brazil), 1981.
 29. Belyakov L. A. A case of the degeneration of a periodic motion with homoclinic curves, *Math. Zametki*, 1974, **15**, 336–341; The bifurcation set in a system with a homoclinic saddle curve, *ibid.*, 1980, **28**, 910–916; Bifurcation of systems with homoclinic curve of a saddle-focus with saddle quantity zero, *ibid.*, 1984, **36**, 838–843.
 30. Bendixson J. Sur les courbes definies par les equations differentielles, *Acta Math.*, 1901, **24**.
 31. Birkhoff G. D. Dynamical systems, *Amer. Math. Soc., Colloquium Publications*, 1927, **9**.
 32. Birkhoff G. D. Nouvelles recherche sur les systèmes dynamiques, *Memorie Pont Acad. Sci. Novi Lyncae*, 1935, **53**(1), 85–216.
 33. Bogdanov R. I. Versal deformations of a singular point on the plane in the case of zero eigenvalues, *Functional Analysis and Its Applications*, 1975, **9**(2), 144–145.
 34. Bykov V. V. On the structure of a neighborhood of a separatrix contour with a saddle-focus, in *Methods of Qualitative Theory of Differential Equation* (Gorky: Gorky State University), 1978, 3–32; On bifurcations of dynamical systems with a separatrix contour containing a saddle-focus, *ibid.*, 1980, 44–72; On the birth of a non-trivial hyperbolic set from a contour formed by separatrices of a saddle, *ibid.*, 1988, 22–32.
 35. Bykov V. V. The bifurcations of separatrix contours and chaos, *Physica*, 1993, **D62**, 290–299.
 36. Cartwright M. L. and Littlewood J. E. On nonlinear differential equations of the second order, I: The equation $\ddot{y} + k(1 - y^2)\dot{y} + y = b \lambda k \cos(\lambda t + a)$, k large, *J. Lond. Math. Soc.*, 1945, **20**, 180–189.
 37. Chenciner A. Courbes fermées invariantes non-normalement hyperboliques au voisinage d'une bifurcation de Hopf dégénérée de difféomorphismes $\mathbb{R}^2$, *Comptes Rendus Acad. Sci. 292, Ser.*, 1981, **1**, 507–510.
 38. Chow S.-N., Deng B. and Fiedler B. Homoclinic bifurcations of resonant eigenvalues, *J. Dyn. Diff. Eq.*, 1990, **2**(2), 177–245.
 - *39. Chow S.-N. and Hale J. *Methods of Bifurcation Theory* (Springer-Verlag: New York), 1982.
 - *40. Chow S.-N., Li C. and Wang D. *Normal Forms and Bifurcations of Planar Vector Fields* (Cambridge University Press: Cambridge), 1994.

41. Chua L. O. *CNN: A Paradigm for Complexity* (World Scientific: Singapore), 1998.
42. de Melo W. Moduli of stability of two-dimensional diffeomorphisms, *Topology*, 1980, **19**, 9–21.
43. de Melo W. and van Streen S. J. Diffeomorphisms on surfaces with finite number of moduli, *Erg. Theory Dynam. Systems*, 1987, **7**, 415–462.
44. Deng B. Homoclinic twisting bifurcations and cusp horseshoe maps, *J. Dyn. Diff. Eq.*, 1993, **5**, 417–467.
45. Diaz L., Rocha J. and Viana M. Strange attractors in saddle-node cycles: prevalence and globality, *Invent. Math.*, 1996, **125**, 37–74.
46. Doedel E. Nonlinear numerics, *Int. J. Bif. Chaos*, 1997, **7**(9–10), 2127–2143.
47. Dulac H. Sur les cycles limites, *Bull. Soc. Math. France*, 1923, **51**, 45–188.
48. Fenichel N. Persistence and smoothness of invariant manifolds for flows, *Indiana Univ. Math. J.*, 1971, **21**, 193–226.
49. Fink A. M. *Almost Periodic Differential Equations*, Lecture Notes in Mathematics **377** (Springer-Verlag: Berlin, New York), 1974.
50. Gambaudo J. M., Glendinning P. and Tresser C. The gluing bifurcation. I: Symbolic dynamics of the closed curves, *Nonlinearity*, 1988, **1**(1), 203–214.
51. Gavrilov N. K. On some bifurcations of an equilibrium state with one zero and a pair of purely imaginary roots, in *Methods of Qualitative Theory of Differential Equations* (Gorky State University: Gorky), 1978; On bifurcations of equilibrium with one zero and pair of pure imaginary eigenvalues and additional degeneracy, *ibid.*, 1987, 43–51.
52. Gavrilov N. K. and Roshchin N. V. On the stability of an equilibrium with one zero and a pair of pure imaginary eigenvalues, in *Methods of Qualitative Theory of Differential Equations* Leontovich–Andronova, ed., (Gorky State University: Gorky), 1983, 41–49.
53. Gavrilov N. K. and Shilnikov A. L. On a blue sky catastrophe model, Proc. Int. Conf. *Contemp. Problems of Dynamical Systems Theory*, ed. Lerman, L. (Nizhny Novgorod State University: Nizhny Novgorod), 1996. An Example of blue sky catastrophe, in *Ams Transl. Series II. Methods of qualitative theory of differential equations and related topics.* (AMS, Providence, Rhode Island), 1999.
54. Gavrilov N. K. and Shilnikov L. P. On three-dimensional dynamical systems close to systems with a structurally unstable homoclinic curve I, *Math. USSR Sbornik*, 1972, **88**(44), 467–485.
55. Gavrilov N. K. and Shilnikov L. P. On three-dimensional dynamical systems close to systems with a structurally unstable homoclinic curve II, *ibid.*, 1973, **90**(1), 139–156.

-
- *56. Golubitsky M. and Schaeffer D. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory I* (Springer-Verlag: New York), 1985.
- *57. Golubitsky M., Stewart I. and Schaeffer D. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory II* (Springer-Verlag: New York), 1988.
58. Gonchenko S. V. and Shilnikov L. P. Invariants of Ω -conjugacy of diffeomorphisms with a structurally unstable homoclinic trajectory, *Ukrainian Math. J.*, 1990, **42**(2), 134–140.
59. Gonchenko S. V. and Shilnikov L. P. On moduli of systems with a structurally unstable homoclinic Poincaré curve, *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, 1993, **41**(3), 417–445.
60. Gonchenko S. V., Turaev D. V. and Shilnikov L. P. On models with non-rough Poincaré homoclinic curves, *Physica*, 1993a, **D62**, 1–14.
61. Gonchenko S. V., Turaev D. V. and Shilnikov L. P. Dynamical phenomena in multi-dimensional systems with a structurally unstable homoclinic Poincaré curve, *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, 1993b, **47**(3), 410–415.
62. Gonchenko S. V., Shilnikov L. P. and Turaev D. V. Dynamical phenomena in systems with structurally unstable Poincaré homoclinic orbits, *Interdisc. J. Chaos*, 1996, **6**(1), 1–17.
63. Gonchenko S. V., Sten'kin O. V. and Turaev D. V. Complexity of homoclinic bifurcations and Ω -moduli, *Int. J. Bifurcation & Chaos*, 1996, **6**(6), 969–989.
- *64. Guckenheimer J. and Holmes P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* (Springer-Verlag: New York), Series title: Applied Mathematical Sciences **42**, 1988.
65. Guimond L. S. Homoclinic loop bifurcations on a Möbius band, *Nonlinearity*, 1999, **12**(1), 59–78.
66. Halanay A. *Differential Equations; Stability, Oscillations* (Academic Press: New York) Series title: Mathematics in Science and Engineering **23**, 1966.
67. Hale J. and Kocak H. *Dynamics and Bifurcations* (Springer-Verlag: New York), 1991.
68. Hermann M. Mesure de Lebesgue et nombre de rotation, *Proc. Symp. Geometry Topology*, Lecture Notes in Mathematics, 1971, Vol. 597 (Springer-Verlag: New York), 371–295.
69. Homburg A. J. Global aspects of homoclinic bifurcations of vector fields, *Memoirs of the A.M.S.*, 1996, **578**.
70. Homburg A. J., Kokubu H. and Krupa M. The cusp horseshoe and its bifurcations in the unfolding of an inclination flip homoclinic orbit, *Ergod. Th. Dynam. Syst.*, 1994, **14**, 667–693.

-
71. Homburg A. J., Kokubu H. and Naudot V. Homoclinic-doubling cascades, preprint, 1997.
 72. Homburg A. J. and Krauskopf B. Resonant homoclinic flip bifurcations, preprint, Free University-Berlin, 1998.
 73. Ilyashenko Yu. S. and Yakovenko S. Yu. Finite-smooth normal forms of local families of diffeomorphisms and vector fields, *Uspechi Mat. Nauk*, 1991, Vol. 46, 1(277), 1–39.
 74. Ilyashenko Yu. S. and Yakovenko S. Yu. Nonlinear Stokes phenomena in smooth classification problems, *Adv. Soviet Math.*, 1993, Vol. 14, 235–287.
 75. Khazin L. G. and Shnol E. E. *Stability of Critical Equilibrium States* (Manchester University Press), 1991.
 76. Khibnik A. I., Kuznetsov Y. A., Levitin V. V. and Nikolaev E. V. Continuation techniques and interactive software for bifurcation analysis of ODE's and iterated maps, *Physica*, 1993, **D62**(1–4), 360–371.
 77. Kisaka M., Kokubu H. and Oka H. Bifurcations to N -homoclinic orbits and N -periodic orbits in vector fields, *J. Dyn. Diff. Eq.*, 1993, **5**, 305–357.
 78. Kokubu H., Komuro M. and Oka H. Multiple homoclinic bifurcations from orbit flip. I. Successive homoclinic-doublings, *Int. J. Bif. Chaos*, 1996, **6**, 833–850.
 79. Kokubu H. and Naudot V. Existence of infinitely many homoclinic-doubling bifurcations from some codimension-three homoclinic orbits, *J. Dyn. Diff. Eq.*, 1997, **9**, 445–462.
 80. Krauskopf B. Bifurcation sequences at 1:4 resonance: An inventory, *Nonlinearity*, 1994, **7**(3), 1073–1091.
 81. Krylov N. M. and Bogolyubov N. N. *Introduction to Nonlinear Mechanics* (Princeton University Press: Princeton), 1947.
 - *82. Kuznetsov Yu. A. *Elements of Applied Bifurcation Theory* (Springer-Verlag: New York), 1998.
 83. Kuznetsov Yu. A. and Levitin V. V. CONTENT: A multiplatform environment for analyzing dynamical systems (Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam), <ftp.cwi.nl/pub/CONTENT>, 1996.
 84. Levitan B. M. and Zhikov V. V. *Almost Periodic Functions and Differential Equations* (Cambridge University Press: Cambridge [Cambridgeshire]; New York), 1982.
 85. Leontovich E. A. On birth of limit cycles from separatrices, *DAN SSSR*, 1951, **744**, 641–644.

-
86. Li W. and Zhang Z. F. The «blue sky catastrophe» on closed surfaces, *Adv. Series Dynam. Syst.*, 1991, **9** (World Scientific, River Edge, N.J.), 316–332.
 87. Lorenz E. N. Deterministic non-periodic flow, *J. Atmos. Sci.*, 1963, **20**, 130–141.
 88. Lukyanov V. On bifurcations of dynamical systems with a separatrix loop to a saddle-node, *Diff. Eq. (Russian)*, 1982, **58**, 1493–1506.
 89. Lyapunov A. M. Problème général de la stabilité du mouvement, *Ann. de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1950, **9**, 203–474.
 90. Lyapunov A. M. *Stability of Motion* (Academic Press: New York), 1966.
 91. Malkin I. G. *Theory of Stability of Motion* (Washington, D. C., United States Atomic Energy Commission, Series title: Translation series: AEC-tr-3352), 1952.
 92. Markov A. A. Stabilität im Liapunoffschen Sinne und Fastperiodizität, *Math. Zeitschr.*, 1933, **36**.
 93. Mayer A. G. On center trajectories and a Birkhoff problem, *Mat. Sbornik*, 1943, **12**(1).
 94. Meyer K. R. Energy functions for Morse–Smale systems, *Amter. J. Math.*, 1968, **90**(4), 1031–1040.
 95. Medvedev V. S. On a new type of bifurcations on manifolds, *Mat. Sbornik*, 1980, **113**, 487–492.
 96. Naudot V. Bifurcations homoclines des champs de vecteurs en dimension trois, thesis, l'Université de Bourgogne, Dijon, 1996.
 97. Newhouse S., Palis J. and Takens F. Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms, *Publ. Math. IHES*, 1983, **57**, 5–71.
 - *98. Nemytskii V. V. and Stepanov V. V. *Qualitative Theory of Differential Equations* (Princeton, N.J., Princeton University Press. Series title: Princeton Mathematical Series **22**), 1960.
 99. Nozdracheva V. P. Bifurcation of a noncoarse separatrix loop, *Differ. Equations*, 1982, **18**, 1098–1104.
 100. Ovsyannikov I. M. and Shilnikov L. P. On systems with a saddle-focus homoclinic curve, *Math. USSR Sb.*, 1987, **58**, 557–574.
 101. Ovsyannikov I. M. and Shilnikov L. P. Systems with a homoclinic curve of multi-dimensional saddle-focus type, and spiral chaos, *Math. USSR Sb.*, 1992, **73**, 415–443.
 102. Palis J. On Morse–Smale dynamical systems, *Topology*, 1969, **4**, 385–404.
 103. Palis J. A differentiable invariant of topological conjugacies and moduli of stability, *Asterisque*, 1978, **51**, 335–346.

-
104. Palis J. and de Melo W. *Geometric Theory of Dynamical Systems. An Introduction* (Springer-Verlag: New York), 1982.
 105. Palis J. and Pugh C. Fifty problems in dynamical systems, *Lecture Notes in Mathematics*, 1975, Vol. 486, 34–353.
 106. Palis J. and Smale S. Structural stability theorem, preprint, 1969.
 107. Peixoto M. M. Structural stability on two-dimensional manifolds, *Topology*, 1962, **1**, 101–120.
 108. Poincaré H. Sur l'équilibre d'une masses fluide animés d'un mouvement de rotation, *Acta Mathematica*, 1903, **7**.
 109. Poincaré H. Sur les courbes définies par des équations différentielles, *J. de Math. Pures et Appl.*, 1885, **1**, 167–244.
 110. Poincaré H. *Figures d'équilibre d'une masse fluide* (Paris), 1903.
 111. Poincaré H. Analyse des travans de Henri Poincaré faite par lui-même, *Acta Mathematica*, 1921, **38**, 36–135.
 112. Pontryagin L. S. Les fonctions presque périodiques et l'analysis situs, *C.R. Acad. Sci.*, 1933, **196**(17), 1201–1203.
 113. Pugh C. C. The closing lemma, *Amer. J. Math.*, 1967, **89**, 956–1009.
 114. Robinson C. Homoclinic bifurcation to a transitive attractor of Lorenz type, *Nonlinearity*, 1989, **2**, 495–518.
 115. Robinson C. Homoclinic bifurcation to a transitive attractor of Lorenz type II, *SIAM J. Math. Anal.*, 1992, **23**, 1255–1268.
 116. Roussarie R. On the number of limit cycles which appear by perturbation of separatrix loop of planar vector fields, *Bol. Soc. Math. Brasil*, 1986, **17**(2), 67–101.
 117. Rychlik M. R. Lorenz attractors through Sil'nikov-type bifurcation. Part I, *Ergod. Th. Dynam. Syst.*, 1990, **10**, 793–821.
 118. Sacker R. On invariant surfaces and bifurcations of periodic solutions of ordinary differential equations, *IMM-NUY*, 1964, **333**, New York State University.
 119. Sanstede B. Verzweigungstheorie homokliner Verdopplungen, Ph.D. Thesis, Free University of Berlin, Institut für Angewandte Analysis und Stochastic, Report No. 7, Berlin, 1993.
 120. Sanstede B. Center manifold for homoclinic solutions, *Weierstrass Inst. Appl. Analysis Stochastic*, preprint N 186, 1995.
 121. Shashkov M. V. Bifurcations of separatrix contours, Ph.D. Thesis, Nizhny Novgorod State University, 1994.

122. Shashkov M. V. On bifurcations of separatrix contours with two saddles, *Int. J. Bif. Chaos*, 1992, **2**(4), 911–914.
123. Shashkov M. V. On the bifurcations of separatrix contours on two-dimensional surfaces. I, *Selecta Math. Sovietica*, 1992, **11**(4), 341–353.
124. Shashkov M. V. On the bifurcations of separatrix contours on two-dimensional surfaces. II, *ibid.*, 1994, **13**(2), 175–182.
125. Shashkov M. V. and Turaev D. V. On the complex bifurcation set for a system with simple dynamics, *Int. J. Bif. Chaos*, 1996, **6**(5), 949–968.
126. Shilnikov A. L. Qualitative and numerical analysis of Lorenz-like systems, Ph.D Thesis, Gorky State University, 1990.
127. Shilnikov A. L. Bifurcations of the Lorenz attractors in the Morioka–Shimizu model, *Physica*, 1993, **D62**, 338–346.
128. Shilnikov A. L., Nicolis G. and Nicolis C. Bifurcation and predictability analysis of a low-order atmospheric circulation model, *Int. J. Bif. Chaos*, 1995, **5**(6), 1701–1711.
129. Shilnikov A. L., Shilnikov L. P. and Turaev D. V. Normal forms and Lorenz attractors, *Int. J. Bif. Chaos*, 1993, **1**(4), 1123–1139.
130. Shilnikov L. P. Some cases of generation of periodic motion from singular trajectories, *Math. USSR Sbornik*, 1963, **61**(103), 443–466.
131. Shilnikov L. P. A case of the existence of a denumerable set of periodic motions, *Sov. Math. Dokl.*, 1965, **6**, 163–166.
132. Shilnikov L. P. The existence of a denumerable set of periodic motions in four-dimensional space in an extended neighborhood of a saddle-focus, *Soviet Math. Dokl.*, 1967, **8**(1), 54–58.
133. Shilnikov L. P. On a Poincaré–Birkhoff problem, *Math. USSR Sbornik*, 1967, **3**, 415–443.
134. Shilnikov L. P. On the generation of periodic motions from trajectories doubly asymptotic to an equilibrium state of saddle type, *Math. USSR Sbornik*, 1968, **6**, 427–437.
135. Shilnikov L. P. On a new type of bifurcation of multi-dimensional dynamical systems, *Soviet Math. Dokl.*, 1969, **10**, 1368–1371.
136. Shilnikov L. P. A contribution to the problem of the structure of an extended neighborhood of a rough equilibrium state of saddle-focus type, *Math. USSR Sbornik*, 1970, **10**, 91–102.
137. Shilnikov L. P. Theory of the bifurcations of dynamical systems, *Math. Physics*, 1975, **20**, 674–676.

-
138. Shilnikov L. P. The bifurcation theory and quasihyperbolic attractors, *Uspehi Mat. Nauk*, 1981, **36**, 240–241.
 139. Shilnikov L. P. and Turaev D. V. Simple bifurcations leading to hyperbolic attractors, *Computers Math. Applic.*, 1997, **34**(2–4), 173–193.
 140. Shilnikov L. P. and Turaev D. V. A new simple bifurcation of a periodic orbit of blue sky catastrophe type, in AMS Transl. Series II. Methods of qualitative theory of differential equations and related topics (AMS, Rhode Island, Providence), 2000.
 141. Simonov A. A. An investigation of bifurcations in some dynamical systems by the methods of symbolics dynamics, *Sov. Math. Dokl.*, 1978, **19**, 759–763.
 142. Smale S. Morse inequalities for a dynamical system, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1960, **66**, 43–49.
 143. Smale S. Diffeomorphisms with many periodic points, in *Diff. Combin. Topology*, ed. S. Cairns (Princeton University Press: Princeton), 1963, 63–86.
 144. Sotomayor J. Generic bifurcations of dynamical systems, in *Dynamical Systems Proc. Symp. Univ. Bahia*, Salvador, 1971, 561–582, Zbl.296.58007.
 145. Sotomayor J. Structural stability and bifurcation theory, in *Dynamical Systems Proc. Symp. Univ. Bahia*, Salvador, 1971, 549–560, Zbl.293.34081.
 146. Takens F. Singularities of vector fields, *Publ. Math. IHES*, 1974, **43**, 47–100.
 147. Tresser C. About some theorems by L. P. Sil'nikov, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Theor.*, 1984, **40**, 441–461.
 148. Turaev D. V. On a case of bifurcations of a contour composed by two homoclinic curves of a saddle, in *Methods of Qualitative Theory of Differential Equations* (Gorky State University), 1984, 162–175.
 149. Turaev D. V. On bifurcations of dynamical systems with two homoclinic curves of the saddle, Ph.D. Thesis, Nizhny Novgorod State University, 1991.
 150. Turaev D. V. On dimension of nonlocal bifurcational problems, *Int. J. Bif. Chaos*, 1996, **2**(4), 911–914.
 151. Turaev D. V. and Shilnikov L. P. On bifurcations of a homoclinic «figure-eight» for a saddle with a negative saddle value, *Soviet Math. Dokl.*, 1987, **44**(2), 422–426.
 152. Turaev D. V. and Shilnikov L. P. On a blue sky catastrophe, *Soviet Math. Dokl.*, 1995, **342**(5), 596–599.
 153. Turaev D. V. and Shilnikov L. P. An example of a wild strange attractor, *Sbornik. Math.*, 1998, **189**(2), 291–314.
 154. van der Pol B. Forced oscillations in a circuit with nonlinear resistance (receptance with reactive triode), *London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag.*, 1927, **3**, 65–80 (Reprinted in Bellman and Kakaba [1964]).

-
155. Van Strien S. J. *On Parameter Families of Vector Fields. Bifurcations Near Saddle-connections*, Ph.D. Thesis, Utrecht University, 1982.
- *156. Wiggins S. *Global Bifurcations and Chaos* (Springer-Verlag: New York), 1988.
157. Eleonsky V. M., Kulagin N. E., Turaev D. V. and Shilnikov L. P. On the classification of self-localized states of the electromagnetic field within nonlinear medium, *DAN SSSR*, 1988, **309**(9) 898–852.
158. Shashkov M. Impossibility of complete bifurcation description for some classes of systems with simple dynamics, Abstracts of Int. Conference, *Equadiff 99* (Berlin), 1999, 22.
159. Shilnikov L. P., Turaev D. V. Superhomoclinic orbits and multi-pulse homoclinic loops in Hamiltonian systems with discrete symmetries, *Regular and Chaotic Dynamics*, 1997, **2**(3/4) 126–138.
- *160. Ilyashenko Y. Li Weigu Nonlocal bifurcations. *Math. Surveys and Monographs*, 1999, **66** (AMS, Rhode Island, Providence).
161. Afraimovich V., Bykov V. V. and Shilnikov L. P. On attracting structurally unstable sets of Lorenz attractor type, *Trans. Moscow. Math. Soc.*, 1983, **44**, 150–213.
162. Arneodo A., Couller P. H. and Spiegel E. A. The dynamics of triple convection, *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, 1985, **31**, 1–48.
163. Arneodo A., Couller P. H., Spiegel E. A. and Tresser C. Asymptotic chaos, *Physica*, 1985, **14D**, 327–347.
164. Back A., Guckenheimer J., Myers M. R., Wicklin F. J. and Worfolk P. A. DsTool: Computer assisted exploration of dynamical systems, *Notices Amer. Math. Soc.*, 1992, **39**(4), 303–309; <ftp://cam.cornell.edu/pub/dstool/>.
165. Bautin N. N. *Behavior of Dynamical Systems near the Boundaries of Stability Regions* (Nauka: Moscow), 1984.
166. Belykh V. N. Qualitative methods of the theory of nonlinear oscillations of concentrated systems, Gorky State University press: Gorky, 1980.
167. Byragov V. S. Bifurcations in a two-parameter family of conservative mappings that are close to the Henon mapping, in *Methods of the Qualitative Theory of Differential Equations* (Gorky: Gorky State Univ. Press), 1987, 10–24.
168. Bykov V. V. On bifurcations leading to chaos in Chua's circuit, *Int. J. Bifurcation & Chaos*, 1998, **8**(4), 685–699.
169. Bykov V. V. and Shilnikov A. L. On boundaries of the region of existence of the Lorenz attractor, *Selecta Math. Sovietica*, 1992, **11**(4), 375–382.
170. Feigenbaum M. Quantative universality for a class of nonlinear transformations, *J. Statist. Phys.*, 1978, **19**, 25–52.

-
171. Gaspard P. Local birth of homoclinic chaos, *Physica*, 1993, **D62**, 94–122.
 172. Gaspard P. and Nicolis G. What can we learn from homoclinic orbits in chaotic dynamics? *J. Stat. Phys.*, 1983, **27**(1), 499–518.
 173. Glendenning P. and Sparrow C. Local and global behavior near homoclinic orbits, *J. Stat. Phys.*, 1984, **35**, 645–696.
 174. Glendenning P. and Sparrow C. T-point: a codimension-two heteroclinic bifurcation, *J. Stat. Phys.*, 1985, **43**, 479–488.
 175. Gonchenko S. V. and Gonchenko V. S. On Andronov-Hopf bifurcations of two-dimensional diffeomorphisms with homoclinic tangencies, Preprint No. 556, WIAS, Berlin, 2000.
 176. Gonchenko S. V. and Komlev Yu. A Bifurcations and chaos in a cubic map of the plane, in *Methods of Qualitative Theory of Diff. Equations* (Gorky University Press: Gorky), 1988, 33–39.
 177. Hindmarsh J. L. and Rose R. M. A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations, *Proc. R. Soc. Lond.*, 1984, **B221**, 87–102.
 178. Khibnik A. I., Kuznetsov Yu. A., Levitin V. V. and Nikolaev E. V. Continuation techniques and interactive software for bifurcation analysis of ODEs and iterated maps, *Physica*, 1993, **62D**, 360–371.
 179. Khibnik A. I., Roose D. and Chua L. O. On periodic orbits and homoclinic bifurcations in Chua's circuit with smooth nonlinearity, *Int. J. Bifurcation & Chaos*, 1993, **3**(2), 363–384.
 180. Krauskopf B. and Osinga H. M. Investigating torus bifurcations in the forced Van der Pol oscillator, in *Numerical Methods for Bifurcation Problems and Large-Scale Dynamical Systems* eds. E. J. Doedel, L. S. Tuckerman, IMA Volumes in Mathematics and its Applications **119**, Springer-Verlag, to appear, 1999.
 181. Osinga H. M. Non-orientable manifolds of periodic orbits, *Proceedings of Equadiff 99*, Berlin, to appear, 1999.
 182. Kuznetsov Yu. A. CONTENT — integrated environment for analysis of dynamical systems Tutorial, Ecole Normale Supérieure de Lyon, Rapport de Recherche UPMA-98-224; <ftp://ftp.cwi.nl/pub/CONTENT>, 1998.
 183. Lorenz E. N. Irregularity: A fundamental property of the atmosphere, *Tellus*, 1984, **A36**, 98–110.
 184. Mira C. *Chaotic Dynamics: From the One-dimensional Endomorphism to the Two-Dimensional Diffeomorphism*. (World Scientific: Singapore-New Jersey-Hong Kong), 1987.

-
185. Pisarevskii V., Shilnikov A. L. and Turaev D. V. Asymptotic normal forms for equilibria with a triplet of zero charactersitic exponents in systems with symmetry, *Regular and Chaotic Dynamics*, 1998, **3**(1), 19–27.
 186. Roschin N. V. Unsafe stability boundaries of the Lorenz model, *J. Appl. Math. Mech.*, 1978, **42**(5), 1038–1041.
 187. Rucklidge A. M. Chaos in magnetoconvection, *Nonlinearity*, 1994, **7**, 1565–1591.
 188. Rössler O. An equation for continuous chaos, *Phys. Lett.*, 1976, **57A**, 397–398.
 189. Shilnikov A. L. and Shilnikov L. P. On the nonsymmetric Lorenz model, *Int. J. Bifurcation & Chaos*, 1991, **1**(4), 773–776.
 190. Shimizu T. and Morioka N. On the bifurcation of a symmetric limit cycle to an asymmetric one in a simple model, *Phys. Lett.*, 1981, **76A**, 201–204.
 191. Vladimirov A. G. and Volkov D. Yu. *Optics Commun.*, 1993, **100**, 351–360.
 192. Shilnikov A. L. and Rulkov N. F. Origin of chaos in a two-dimensional map modeling spiking-bursting neural activity, *Bifurcations & Chaos*, 2003, **13**, (11), 3325.
 193. Shilnikov A. L. and Rulkov N. F. Subthreshold oscillations in a map-based neuron model, *Physics Letters A*, 2004, **328**, 177.
 194. Shilnikov A. L., Shilnikov L. P. and Turaev D. V. Blue sky catastrophe in singularly perturbed systems, *Moscow Math J.*, 2005, **5**, (1), 205.
 195. Shilnikov A. L. and Kolomiets M. L. Methods of the qualitative theory for the Hindmarsh-Rose model: a case study, *Tutorial. J. Bifurcations and Chaos*, **18**, (8), 1-127, 2008.
 196. Shilnikov A. L. and Cymbalyuk G., Transition between tonic-spiking and bursting in a neuron model via the blue-sky catastrophe, *Physics Review Letters*, **94**, 048101 (2005).

Леонид Павлович Шильников

НИИ прикладной механики и кибернетики ННГУ,
Нижний Новгород, Россия
shilnikov@focus.nnov.ru

Andrey L. Shilnikov

The Neuroscience Institute and Department of Mathematics & Statistics
Georgia State University, USA
ashilnikov@gsu.edu

Dmitry D. Turaev

Imperial College, London, UK
dturaev@imperial.ac.uk

Leon O. Chua

University of California, Berkeley, USA
chua@eecs.berkeley.edu

МЕТОДЫ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ В НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ

Часть 2

*Технический редактор А. В. Широбоков
Компьютерный набор и верстка О. В. Кузякова
Корректор Г. Г. Тетерина*

Подписано в печать 12.03.2009. Формат $60 \times 84\frac{1}{16}$.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 31,85. Уч. изд. л. 30,45.
Гарнитура Таймс. Бумага офсетная №1. Заказ №13.

Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
<http://shop.rcd.ru> E-mail: mail@rcd.ru Тел./факс: (+73412) 500–295

Уважаемые читатели!

Интересующие Вас книги нашего издательства можно заказать через наш Интернет-магазин <http://shop.rcd.ru> или по электронной почте subscribe@rcd.ru

Книги можно приобрести в наших представительствах:

МОСКВА

Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН
ул. Бардина, д. 4, корп. 3, к. 414, тел.: (499) 135-54-37

ИЖЕВСК

Удмуртский государственный университет
ул. Университетская, д. 1, корп. 4, 2 эт., к. 211, тел./факс: (3412) 500-295

Также книги можно приобрести:

МОСКВА

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
ГЗ (1 эт.), Физический ф-т (1 эт.), Гуманитарный ф-т (0 и 1 эт.),
Биологический ф-т (1 эт.).

Российский государственный университет нефти и газа им. И. М. Губкина
ГЗ (3-4 эт.), книжные киоски фирмы «Аргумент».

Магазины:

МОСКВА:

«Дом научно-технической книги»
Ленинский пр., 40, тел.: 137-06-33

«Московский дом книги»
ул. Новый Арбат, 8, тел.: 290-45-07

ДОЛГОПРУДНЫЙ:

Книжный магазин «Физматкнига»
новый корп. МФТИ, 1 эт., тел.: 409-93-28

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ:

«Санкт-Петербургский дом книги»
Невский проспект, 28

Издательство СПбГУ, Магазин №1
Университетская набережная, 7/9